パラメータ付きイデアルで定義された多様体の点でのゼロ次元性判定
Zero-dimensionality at a point of varieties defined by a parametric ideal

鍋島克輔 *
徳島大学大学院社会産業理工学研究部
NABESHIMA, Katsusuke
Graduate School of Technology, Industrial and Social Sciences, Tokushima University

田島慎一 †
新潟大学大学院自然科学研究科
TAJIMA, Shinichi
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

Abstract

Two algorithms for testing zero-dimensionality at a point of varieties are given. The key of the proposed algorithms is the use of the notion of comprehensive Gröbner systems.

1 序

多様体の局所次元（多様体の与えられた点における germ の次元）は，代数幾何，複素解析，特異点論など多くの数学分野で表れる重要な不変量である [2, 7, 18]．一般に, イデアルの零点集合として定められた（いくつもの既約成分や特異点を持つような）多様体の局所的性質等を研究する際は, 注目している点における局所次元を求める事やゼロ次元性判定を行う計算方法が必要となる [4, 11, 12, 14]．

本稿では，パラメータ付きイデアルで定義された多様体の点でのゼロ次元判定法について，2 つの計算法を紹介する．

1 つは tangent cone を用い次元を直接計算する方法であり，もう 1 つは飽和イデアルを用い与えられた点以外の多様体に関する情報を利用することでゼロ次元性の判定を行う方法である．本稿で紹介する 2 つの計算法は共に, 局所環でのスタンダード基底や Mora のリダクション [3, 8] を必要とせず，多項式環での計算のみによりゼロ次元性判定を行う計算法である．これら 2 つの計算法の鍵となるのは，包括的グレブナー基底系 [5, 10, 13, 16] である．

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

2 Tangent cone を用いた次元判定

標数 0 の体を k とし，n 変数を $x=(x_1,\ldots,x_n)$，点を $p=(p_1,\ldots,p_n)\in k^n$ とする．多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を用いて

$$(x-p)^\alpha=(x_1-p_1)^{\alpha_1}\cdots(x_n-p_n)^{\alpha_n}$$

とする．ただし，この全次数は $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ である．

ゼロでない全次数 d の多項式 $f\in k[x]$ に対し，f の点 p におけるテイラー展開を $f(x)=\sum_{|\alpha|\leq d}c_\alpha(x-p)^\alpha$ とする．ここで $f_{p,j}=\sum_{|\alpha|=j}c_\alpha(x-p)^\alpha$ とおき, 多項式 f の展開式を, j 次の項ごとにまとめ

$$f=f_{p,0}+f_{p,1}+\cdots+f_{p,d}$$

と表す．ここで，$f_{p,j}\neq 0$ となるような最小の j に対し，$f_{p,j}$ を $f_{p,min}$ で表す．これは，点 p でのテイラー展開での最小次数の多項式が $f_{p,min}$ であることと同じである．

ここでの記号と定義は [1] に従っている．

定義 1 代数多様体を $V\subset k^n$ とし，$p=(p_1,\ldots,p_n)\in V$ とする．点 p における V の **tangent cone**(接錐) を $C_p(V)$ で表し，

$$C_p(V)=\mathbb{V}(f_{p,min}|f\in\mathbb{I}(V))$$

で定義する．ただし，$\mathbb{I}(V)=\{f\in k[x]|f(x)=0,x\in V\}$，$\mathbb{V}(f_1,\ldots,f_s)=\{x\in k^n|f_1(x)=\cdots=f_s(x)=0\}$ である．

Tangent Cone については [18] において詳しく述べられているので，ここでは深入りしない．

次の定理は，原点 O における V の Tangent Cone の計算法を与えている．新たな変数 x_0 を用いてイデアル $I\subset\mathbb{C}[x]$ を斉次化したイデアル $I^h\subset\mathbb{C}[x_0,x]$ を考える．

定理 2 $I\subset\mathbb{C}[x]$ をイデアルとし，$V=\mathbb{V}(I)$，$O\in V$ とする．$x_0\gg x$ となる項順序を $\succ$ とする．集合 $\{g_1,\ldots,g_s\}$ を $\prec$ に関するイデアル I^h のグレブナー基底とし，$\varepsilon(g_i)$ を非斉次化とする．このとき，

$$C_O(V)=\mathbb{V}(\varepsilon(g_1)_{0,min},\ldots,\varepsilon(g_s)_{0,min})$$

となる．

定義 3 アフィン多様体 V に属する点を p とする．V の p における次元を，p を含む V の既約成分の次元の最大値と定め，$\dim_p(V)$ で表す．

Tangent Cone と次元について次の H. Whitney の定理 [17] がある．

定理 4 (H. Whitney [17]) $p\in V\subset k^n$ とする．このとき，$\dim_p(V)=\dim(C_p(V))$ となる．

以後，k を $\mathbb{C}$ とし，点 p を $\mathbb{C}^n$ の原点 O とする．

本稿の目的は，$\dim_O(V)=0$ もしくは $\dim_O(V)\neq 0$ を判定するアルゴリズムを与えることである．定理 2 より，tangent cone を定義するイデアルの生成元はグレブナー基底を計算することにより計算可能である．また，代数多様体の次元は，定理 4 を用いることにより，グレブナー基底が得られれば簡単に求めることができる．

次に，パラメータ付きイデアルから定義される代数多様体 V の原点 O での次元を考える．このとき一般に，原点 O での次元は，パラメータの値に依存するため，通常のグレブナー基底計算のみで局所次元を求めることは困難である．以下に示すように，包括的グレブナー基底系を用いることで，この問題に対処することが可能となる．包括的グレブナー基底系計算アルゴルズムは [5, 10, 16] により紹介されており，計算機代数システムにも実装されている．

次が，パラメータ付きイデアルから定義された多様体の次元判定アルゴリズムの概要である．

<u>アルゴリズム 1</u>

入力：$I \subset k[x]$ パラメータ $t = (t_1, \ldots, t_m)$ を持つイデアル，$O \in V = \mathbb{V}(I)$.

出力：各パラメータ空間での $\dim_O(V)$.

1. I^h の $x_0 \gg x$ に関する項順序で包括的グレブナー基底系 $\mathcal{G}$ を計算する．そして $\mathcal{G}$ を非斉次化したものを $\mathcal{G}'$ とする．
2. $\mathcal{G}'$ の各セグメント毎の tangent cone を求める．
3. 各セグメント毎の tangent cone の次元から，V の原点 O での次元を決定する．

例 5 パラメータ t を含む多項式 $f = x^3 + tx^2y^4 + y^{12} \in \mathbb{C}[x, y]$ を考える．このとき，$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2ty^4$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4tx^2y^3 + 12y^{11}$ とし，$V = \mathbb{V}(f_1, f_2)$ を考える．まず，*tangent cone* $C_0(V)$ を求める．$I = \langle f_1, f_2\rangle$ の斉次化イデアル $I^h = \langle 3x^2x_0^2 + 2ty^4, 4tx^2y^3x_0^6 + 12y^{11}\rangle$ の全次数辞書式項順序 $(x_0 \gg x > y)$ の包括的グレブナー基底系を計算する．このとき，我々のプログラムは次を出力する．

```
[183] L=[3*x^2*x0^3+2*t*y^4*x,4*t*y^3*x^2*x0^6+12*y^11];
[3*x0^3*x^2+2*t*y^4*x,4*t*x0^6*y^3*x^2+12*y^11]
[184] kcgs(L,[t],[x0,x,y],1);
[[t],[4*t^3+27]]
[x0^3*x^2,y^11]

[[4*t^3+27],[1]]
[3*x0^3*x^2+2*t*y^4*x,3*x0^3*y^7*x+2*t*y^11]

[[0],[4*t^4+27*t]]
[3*x0^3*x^2+2*t*y^4*x,2*x0^3*t^2*y^7*x-9*y^11,(4*t^3+27)*y^11*x,(4*t^3+27)*y^15]
```

非斉次化し最小次数の項を取ることにより，次の *tangent cone* が得られる．

$$\begin{cases} \mathbb{V}(t) \text{ のとき，} & C_0(V) = \mathbb{V}(y^{11}, x^2), \\ \mathbb{V}(4t^3+27) \text{ のとき，} & C_0(V) = \mathbb{V}(xy^7, x^2), \\ \mathbb{C}\backslash\mathbb{V}((4t^3+27)t) \text{ のとき，} & C_0(V) = \mathbb{V}(y^{15}, xy^{11}, xy^7, x^2) \end{cases}$$

各セグメント *(*または *strata)* 毎に *tangent cone* の次元を判定すると，原点 O での多様体の次元として次が得られる．

$$\begin{cases} \mathbb{V}(t) \text{ のとき，} & C_0(V) \text{ は次元 } \mathit{0} \text{ より}, \dim_O(V) = 0, \\ \mathbb{V}(4t^3+27) \text{ のとき，} & C_0(V) \text{ は次元 } \mathit{1} \text{ より}, \dim_O(V) = 1, \\ \mathbb{C}\backslash\mathbb{V}((4t^3+27)t) \text{ のとき，} & C_0(V) \text{ は次元 } \mathit{0} \text{ より}, \dim_O(V) = 0. \end{cases}$$

したがって，ゼロ次元となる条件は $4t^3 + 27 \neq 0$ である．すなわち，$4t^3 + 27 \neq 0$ のとき，超曲面 $f = 0$ は孤立特異点を持つ．

3　イデアル商を用いたゼロ次元判定

ここでは，多項式環 $\mathbb{C}[x]$ でのイデアル商を用いたゼロ次元性判定アルゴリズムについて述べる．

多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアルを I, J とする．イデアル J による I のイデアル商とは $I : J = \{f \in \mathbb{C}[x] | fg \in I,\ \forall g \in J\}$ である．また，J に関する I の飽和イデアル（saturation）とは

$$I : J^{\infty} = \{f \in \mathbb{C}[x] | fJ^r \subset I \text{ for some } r > 0\}.$$

である．

次は，本稿で紹介するゼロ次元性判定アルゴリズムの根幹をなす結果である．

定理 6 多項式の集合を $F \subset \mathbb{C}[x]$ とし，$\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$，$O \in \mathbb{V}(F)$ とする．飽和イデアル $\langle F \rangle : \mathfrak{m}^{\infty}$ の基底を $G \subset \mathbb{C}[x]$ とするとき，

$$\dim_O(\mathbb{V}(F)) = 0 \iff \exists g \in G \ s.t.\ g(O) \neq 0$$

となる．

この定理より，多様体 $\mathbb{V}(F)$ のゼロ次元性判定は，飽和イデアルを多項式環で計算することにより可能であることがわかる．

例 7 $f = x^2z + yz^2 + y^7 + x^3y + x^2y^3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ とし，$V = \mathbb{V}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ の原点 O での次元がゼロかどうかを判定する．

飽和イデアル $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle : \langle x, y, z \rangle^{\infty}$ の基底を求めると，この飽和イデアルのグレブナー基底は $\{1\}$ となる．よって，定理 *6* より，$\dim_O(V) = 0$ となることがわかる．

次に，パラメータ付きイデアルから定義される代数多様体 V の原点 O でのゼロ次元性判定法を考える．パラメータ付きイデアルのイデアル商は論文 [6, 11] により述べられている．我々のプログラムは，[3, 6] に書かれている方法を拡張し，加群での包括的グレブナー基底 [9] を利用し，イデアル商の基底を計算するように実装している．

パラメータ付きイデアル商が計算できることより，パラメータ付き飽和イデアルは計算可能である．

次は，パラメータ付きイデアルから定義された多様体のゼロ次元性判定アルゴリズムである．

<u>アルゴリズム 2</u>

入力： $F \subset \mathbb{C}[x]$: パラメータ $t = (t_1, \ldots, t_m)$ を持つ多項式集合，$O \in V = \mathbb{V}(F)$.

出力 : $\mathbb{A}$: $\dim_O(V) = 0$ となる stratum (パラメータの条件).

BEGIN

$\mathbb{A} \leftarrow \emptyset$;

$\mathcal{G} \leftarrow$ 飽和イデアル $\langle F \rangle : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle^{\infty}$ の包括的グレブナー基底系を計算;

while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**

　Select $(\mathbb{A}', G')$ from $\mathcal{G}$;　$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \backslash \{(\mathbb{A}', G')\}$;　　　/*$\mathbb{A}' \in \mathbb{C}^m, G' \subset \mathbb{C}[x]$ */

　if $\exists g \in G'$ s.t. $g(O) \neq 0$ **then**

　　$\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$;

　end-if

end-while

return $\mathbb{A}$;

END

例 8 パラメータ t を含む多項式を $f = x^6 + tx^4y^8 + y^{24} \in \mathbb{C}[x, y]$ とし，$V = \mathbb{V}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ を考える．まず，飽和イデアル $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : \langle x, y \rangle^\infty$ の包括的グレブナー基底系を計算する．ここでの項順序は全次数辞書式項順序 $(x > y)$ とする．このとき，我々のプログラムは次の包括的グレブナー基底系を出力する．

```
[527] F=x^6+t*x^4*y^8+y^24;
x^6+a*y^8*x^4+y^24
[528] para_sat_module([diff(F,x),diff(F,y)],[x,y],[t],[x,y],1);
[[t],[1]],
[-1],

[[4*t^3+27],[1]],
[2*t^2*x^2-9*y^8],

[[0],[4*t^4+27*t]],
[-4*t^6-27*t^3]
```

この出力の意味は次である．

$$\begin{cases} \mathbb{V}(t) \text{ のとき，} & \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : \langle x, y \rangle^\infty \text{のグレブナー基底は } \{1\}, \\ \mathbb{V}(4t^3 + 27) \text{ のとき，} & \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : \langle x, y \rangle^\infty \text{のグレブナー基底は } \{2t^2x^2 - 9y^8\}, \\ \mathbb{C}\backslash\mathbb{V}((4t^3 + 27)t) \text{ のとき，} & \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : \langle x, y \rangle^\infty \text{のグレブナー基底は } \{-4t^6 - 27t^3\}. \end{cases}$$

この結果より，パラメータ t が $\mathbb{V}(t) \cup \big(\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}((4t^3 + 27)t)\big) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(4t^3 + 27)$ に属するとき，定数項が存在するので $\dim_O(V) = 0$ となる．

次の補題は, 飽和イデアル計算の効率化を図る上で有用である．

補題 9 多項式の集合を $F \subset \mathbb{C}[x]$ とし，$\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ とする．任意の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ において，

$$\Big(\langle F \rangle : \langle x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \rangle\Big) : \mathfrak{m}^\infty = \langle F \rangle : \mathfrak{m}^\infty$$

となる．

本稿では，補題 9 の $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を，次のように選択する．

『F での変数 x_i の最大次数を α_i とする．』$(1 \leq i \leq n)$

補題 9 を用いることで，アルゴリズム 2 を改良したものが次である．特に，原点での特異点の重複度が大きい場合には，このテクニックは有効に働く．

<u>アルゴリズム **3**</u>
入力： $F \subset \mathbb{C}[x]$ パラメータ $t = (t_1, \ldots, t_m)$ を持つ多項式集合，$O \in V = \mathbb{V}(F)$.
出力：$\mathbb{A}$: $\dim_O(V) = 0$ となる stratum (パラメータの条件).
BEGIN
$\mathbb{A} \leftarrow \emptyset$;
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leftarrow F$ での変数 x_i の最大次数を α_i とする $(1 \leq i \leq n)$;
$\mathcal{G} \leftarrow$ イデアル商 $I : \langle x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \rangle$ の包括的グレブナー基底系を計算;
while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**

Select $(\mathbb{A}', G')$ from $\mathcal{G}$; $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \backslash \{(\mathbb{A}', G')\}$;
$\mathcal{G}' \leftarrow$ 飽和イデアル $\langle G \rangle : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle^\infty$ の包括的グレブナー基底系を $\mathbb{A}'$ 上で計算;
while $\mathcal{G}' \neq \emptyset$ **do**
Select $(\mathbb{A}'', G'')$ from $\mathcal{G}'$; $\mathcal{G}' \leftarrow \mathcal{G}' \backslash \{(\mathbb{A}'', G'')\}$;
if $\exists g \in G'$ s.t. $g(O) \neq 0$ **then**
$\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{A} \cup \mathbb{A}''$;
end-if
end-while
end-while
return $\mathbb{A}$;
END

本稿で紹介したすべてのアルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir [15] に実装したので，実装の比較を次で与える．使用した計算機は [OS: windows 10, CPU: intel Core i9-7900, 3.30GHz, RAM; 120GB] であり， 表 1 は CPU 秒を与えており，>3h は出力に 3 時間以上を要することを意味している．

ベンチマークで使用した多項式は次であり，x, y, z は変数，a, b はパラメータを表し，用いた項順序は全次数逆辞書式項順序 (x, y, z) である．

$$
\begin{aligned}
f_1 &= x^6 + ax^4y^8 + y^{24} + y^{25} \\
f_2 &= x^3 + xz^2 + axy^3 + y^3z + xy^4 \\
f_3 &= x^3y + ay^{15} + bxy^{11} + xy^{12} \\
f_4 &= x^4y + y^8 + axy^8 + bx^2y^4 \\
f_5 &= x^3y + ay^4 + y^3 + y^8x + by^6 \\
f_6 &= x^{10} + x^5y^3 + ay^6 + 3y^{14} + bx^{10}y^5 + xy^{14} \\
f_7 &= x^5 + yz^4 + y^3 + ax^5y + bx^2y^7 + z^4 \\
f_8 &= x^6 + yz^7 + ax^3y^4 + y^{10} + x^2y^5z^4
\end{aligned}
$$

表 1: ベンチマークテスト

	F	アルゴリズム 1 (Tangent cone)	アルゴリズム 3 (Saturation)
1	$\{f_1, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}\}$	0.0156	0.03125
2	$\{f_2, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}\}$	0.0156	0.0625
3	$\{f_3, \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial y}\}$	1.375	0.0625
4	$\{f_4, \frac{\partial f_4}{\partial x}, \frac{\partial f_4}{\partial y}\}$	27.94	0.75
5	$\{\frac{\partial f_5}{\partial x}, \frac{\partial f_5}{\partial y}\}$	>3h	0.03125
6	$\{\frac{\partial f_6}{\partial x}, \frac{\partial f_6}{\partial y}\}$	>3h	1.031
7	$\{f_7, \frac{\partial f_7}{\partial x}, \frac{\partial f_7}{\partial y}, \frac{\partial f_7}{\partial z}\}$	> 3h	1.391
8	$\{f_8, \frac{\partial f_8}{\partial x}, \frac{\partial f_8}{\partial y}, \frac{\partial f_8}{\partial z}\}$	> 3h	6.188

表 1 より，tangnet cone を用いた方法より，飽和イデアルを用いた方法が効率が良いことがわかる．

多様体 $\mathbb{V}(F)$ が既約成分 $V_0 = \{O\}$ を含むとする．また，イデアル $\langle F \rangle$ の準素イデアル分解を $\langle F \rangle = Q_0 \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_\nu$ とし，$Q_0, Q_1, \ldots, Q_\nu$ を異なる準素イデアル，$\mathbb{V}(Q_0) = \{O\}$ とする．アルゴリズム 1 は，Q_0 を計算し尚且つ，その多様体の次元を計算している．逆に，アルゴリズム 2 は $Q_1 \cap \cdots \cap Q_\nu$ を計算している．Q_0 の構造が複雑であれば，アルゴリズム 2 の計算量はアルゴリズム 1 より小さいと期待される．

謝辞

この研究は日本学術振興会科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 18K03214，18K03320 の助成を受けております．

参 考 文 献

[1] Cox, D., Little, J. and O'Shea, D.: Ideals, varieties, and algorithms (2nd edition). Springer, (1997)

[2] De Jong, T. and Pfister, G.: Local Analytic Geometry, Vieweg, (2000)

[3] Greuel, G.-M. and Pfister, G.: A Singular Introduction to Commutative Algebra (2nd Edition), Springer, (2008)

[4] Greuel, G.-M., Lossen, C. and Shustin, E.: Introduction to Singularities and Deformations, Springer, (2007)

[5] Kapur, D., Sun, D. and Wang, D.: An efficient algorithm for computing a comprehensive Gröbner system of a parametric polynomial systems. Journal of symbolic computation, Vol **49**, pp. 27–44, (2013)

[6] Kapur, D., Lu, D., Monagan, M., Sun, Y. and Wang, D.: An efficient algorithm for computing parametric multivariate polynomial GCD. In: Proc. ISSAC 2018, pp. 239–246. ACM (2018)

[7] Lojasiewicz, S.: Introduction to Complex Analytic Geometry, Birkhäuser, (1991)

[8] Mora, T.: An algorithm to compute the equations to tangent cones. LNCS, Vol. **144**, pp. 158–165, Springer (1982).

[9] Nabeshima, K.: On the computation of parametric Gröbner bases for modules and syzygies. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. **27**, 217–238, (2010)

[10] Nabeshima, K.: Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems. In: Proc. CASC 2012, LNCS, Vol. **7442**, pp. 248–259, Springer (2012).

[11] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Computing logarithmic vector fields associated with parametric semi-quasihomogeneous hypersurface isolated singularities, In: Proc. ISSAC 2015, pp. 291–298. ACM (2015)

[12] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, Journal of Symbolic Computation, **82**, pp. 91–122, (2017)

[13] Nabeshima, K., Ohara, K. and Tajima, S.: Comprehensive Gröbner systems in PBW algebras, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules. Journal of symbolic computation, Vol **89**, pp. 146–170, (2018)

[14] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Computation methods of logarithmic vector fields associated with semi-weighted homogeneous isolated hypersurface singularities. Tsukuba Journal of Mathematics, Vol **42**, No.2, pp.191–231, (2018)

[15] Noro, M., Takeshima, T.: Risa/Asir - A computer algebra system. In: Proc. ISSAC 1992, pp. 387–396. ACM (1992) `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

[16] Weispfenning, V.: Comprehensive Gröbner bases. Journal of symbolic computation, Vol **14**, pp. 1–29, (1992)

[17] Whitney, H.: Tangents to an analytic variety. Annals of mathematics, Vol. **81**, pp. 496–549 (1965)

[18] Whitney, H.: Complex Analytic Varieties. Addison-Wesley, (1972)