

群の SubdirectProduct が作る coherent configuration の 計算

Computation of Coherent Configurations formed by SubdirectProducts of Groups

宮本泉*

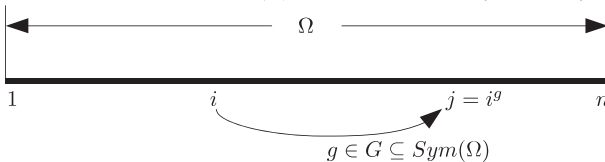
IZUMI MIYAMOTO

1 はじめに

置換群 G とその自己同型 σ による像 G^σ との SubdirectProduct が作る coherent configuration を計算して考察する。昨年度の本研究集会では、可移群のデータを使って、次数 16 までの場合に計算実験を行った。今回は、可移群が分類済の次数 30 まで場合と、可移群より次数が大きいデータがある primitive 群について次数 380 まで計算実験を行った。実験には GAP システムを使用しているが、可移群の場合で、次数は大きくないのに、群の自己同型群の計算が困難な場合が出てきて、Magma システムも利用する必要がある。置換群が作る coherent configuration としては、可移でない群から作られるものを考えることになるが、一連の本実験で、上述の方法で自明でない非可移な群が構成できることが分かった。また、今回、構成した coherent configuration の fusion スキームとして群からは構成されないものも見つかった。

2 置換群 permutation group

置換群 G : symmetric group $\text{Sym}(\Omega)$ の subgroup, $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$

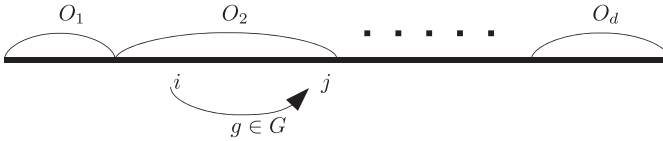


2.1 Orbit

【定義】 $\Omega \supseteq \{i^g | g \in G\}$: 点 i を含む G の orbit

O_1, O_2, \dots, O_d : orbit 全体, $\Omega = O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_d$ (disjoint union)

*imiyamoto1@gmail.com



【定義】 G : 可移 (transitive) $\iff \Omega = O_1$

3 coherent configuration $(\Omega, \{O_i\}_{i=0,1,2,\dots,d})$

G の Ω^2 への作用を $\Omega^2 \ni [i, j]^g = [i^g, j^g]$ で定め、 G の Ω^2 への作用の orbit の全体を O_i ($i = 1, 2, \dots, d$) とする。

【例】 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $G = \text{TransitiveGroup}(6, 6)$ (GAP の data より)

$O_1 = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [5, 5], [6, 6]\},$	}	$\Omega \times \Omega$ 上の orbit 4 個
$O_2 = \{[1, 2], [2, 1], [3, 4], [4, 3], [5, 6], [6, 5]\},$		
$O_3 = \{[1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], \dots, [6, 1], [6, 2]\},$		
$O_4 = {}^t O_2 = \{[3, 1], [4, 1], [3, 2], \dots, [1, 6], [2, 6]\}$		

行列表示 :

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = I, & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\
 & & & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\
 A_3 = & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} & & \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\
 & & & & & & & = {}^t A_3
 \end{matrix}$$

【定義】 coherent configuration $(\Omega, \{A_i\}_{i=1,2,\dots,d})$ (combinatorial property)[4]

- $A_i (i = 1, 2, \dots, d)$ は、0, 1 matrix
- $A_1 + A_2 + \dots + A_d = J$ (all 1 matrix)
- $I = A_1 + A_2 + \dots + A_r$
- ${}^t A_i = A_j$ for some j
- $A_i A_j = \sum_{k=1}^d p_{i,j}^k A_k$ (A_i 達の生成する algebra の basis)

【定義】 association scheme

$A_1 = I$ のとき、とくに、association scheme という。(前の例は、association scheme になっている。) G が transitive $\iff G$ が作る coherent configuration は association scheme.

【定義】 $CC(G)$ 、 $AS(G)$ で、置換群 G の作る coherent configuration と association scheme をそれぞれ表す。

【定義】 fusion scheme

【Example】 A_1, A_2, A_3, A_4 前例と同じ。

$A_1, A_2, A_3 + A_4$ は、association scheme となる。このようにしてできる coherent configuration を fusion scheme という。

【定義】 AutomorphismGroup

群 G 、coherent configuration $CC = (\Omega, A_i)$ に対して、以下の記号を定める。

$Aut(G)$: G の自己同型群 automorphism group

$Aut(CC) = \{P: \text{permutation matrix} | P^{-1}A_iP = A_i \text{ for all } i\}$: CC の自己同型群

【定義】 relation matrix

A_i たちを、次のようにまとめた行列 $1A_1 + 2A_2 + \dots + dA_d$ を relation matrix という。

【前例の relation matrix】

$$1A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

【前例の fusion scheme の relation matrix】

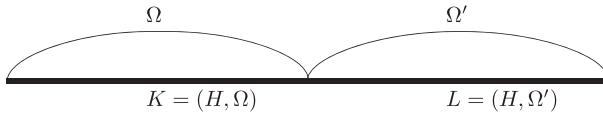
$$1A_1 + 2A_2 + 3(A_3 + A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4 SubdirectProduct

【定義】 H は、direct product $K \times L = \{(k, \ell) | k \in K, \ell \in L\}$ の SubdirectProduct の一つ \iff K は Ω 上の、そして、 L は Ω' 上の置換群とする。 ($\Omega \cap \Omega' = \emptyset$)

subgroup $H \subseteq K \times L$ は、

H の Ω 上への action = K 、かつ、 H の Ω' 上への action = L



GAP のコマンド SubdirectProducts は、上の条件を満たすようなすべての群 H を計算する。

【Example】 $G = K = L$ のとき

$SubdirectProducts(G, G) = \{G \times G, \{(g, g) | g \in G\}, \dots\}$

本発表では、適当な $\sigma \in Aut(G)$ に対する SubdirectProduct

$$\{(g, g^\sigma) | g \in G\}$$

を考察している。したがって、とくに、 $\{(g, g^\sigma) | g \in G\} \cong G$ となる。

下に、昨年度の発表でも述べた本研究のモチベーションとなった例を、簡単に示す。

$\text{Sym}(7)$ と $G = \text{TransitiveGroup}(7, 5)$ on $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ では、 $\text{AS}(\text{Sym}(7)) = \text{AS}(G)$ となり、 A_1, A_2 からなる。

$$1A_1 + 2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Aut}(\text{AS}) = \text{Sym}(7)$ となるので、 $\text{TransitiveGroup}(7, 5)$ はとらえられない。一般に、異なる群 $G_1 \neq G_2$ でも、それらの作る coherent configuration は $\text{CC}(G_1) = \text{CC}(G_2)$ と一致する例は、多く存在する。

$G = \text{TransitiveGroup}(7, 5)$ では、SubdirectProduct $H = \{(g, g^\sigma) | g \in G\}$ で、 $\text{Aut}(\text{CC}(H)) \cong G$ とできる。ここで、 $\sigma \in \text{Aut}(G)$ で、 $\text{CC}(H)$ は、 A_1, A_2, \dots, A_8 からできていて、次のようになる。

$$1A_1 + 2A_2 + \dots + 8A_8 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7' \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 7 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

5 実験の手順

計算実験には、主に、GAP-システム [2] を使用した。 G : GAP-システムのデータにある置換群として、 G と同型な orbit 2 個をもつ置換群 $H = \{(g, g^\sigma) | g \in G\}$ を構成するため AutomorphismGroup(G) を計算する。それに関連して、昨年度に引き続き、下の計算も使用した。

InnerAutomorphismsAutomorphismGroup :

AutomorphismGroup のなかで、自明な coherent configuration を与えることが分かっている部分群

RightTransversal :

AutomorphismGroup のなかで、自明でない coherent configuration を与える可能性のあるものの代表 (IsConjugatorIsomorphism で、自明かどうかを判別できる)

SubdirectProduct(G, G, id, σ) :

id は恒等写像、 $\sigma \in \text{RightTransversal}$ で orbit 2 個の群 H を構成

$CC(H)$ の relation matrix 計算、 $\text{Aut}(CC(H))$ の計算は、発表者が association scheme の計算のときに作成したプログラム [3] を使用した。

5.1 本年度の計算実験について

AutomorphismGroup の計算：

$|\Omega| \geq 20$ では、GAP の AutomorphismGroup 計算に困難な場合がでてくる。

Magma[1] も使用して、AutomorphismGroup 計算を行った。

Magma は、AutomorphismGroup のデータベースを作って利用している。

GAP は、例えば、 $\text{Aut}(\text{Sym}(n)) = \text{Sym}(n)$ ($n \neq 6$) と知られているが、これを使わないで、直接計算をしているらしく、この場合では小さい n で、すぐに計算が困難になる。

RightTransversal の計算：

発表では時間の都合で省略したことであるが、RightTransversal で現れる coset の個数が非常に少なくても、計算が終わらない場合が出てくる。そこで、IsConjugatorIsomorphism を判定条件とする coset enumeration を実行するプログラムを作成して利用した。coset の個数が 100 位までは、困難なく計算できる。

6 実験結果

G を GAP-システムのデータにある群とする。

$$H = \{(g, g^\sigma) | g \in G\} \quad (\sigma \in \text{Aut}(G))$$

H の orbit から coherent configuration $CC(H)$ を relation matrix として求め、 $\text{Aut}(CC(H))$ を計算して、元の群 G と比較することを行った。

$G \subsetneq \text{Aut}(AS(G))$ となるが、その中で特に、 $\text{Aut}(CC(H)) \cong G$ となる場合を探してみた。

6.1 TransitiveGroup のデータを使った場合

$$G = \text{TransitiveGroup}(n, k), \quad n = |\Omega|$$

TransitiveGroup の個数

$ \Omega $	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
個数	10	983	8	1117	164	59	7	25000	211	96	2392	1854	8	5712

自己同型群として得られる群の個数

AS	5	93	6	95	32	16	4	669	32	24	122	124	6	228
(as)	·	95	7	·	·	·	22	750	45	34	502	185	26	243
CC	0	35	0	23	6	3	0	469	6	4	65	≥ 42	0	39

AS : $\text{Aut}(AS(G)) = G$ となる G の個数

CC : $\text{Aut}(CC(H)) \cong G$ かつ $\text{Aut}(AS(G)) \neq G$ となる G の個数

(as) : association scheme の個数 [3]

6.2 PrimitiveGroup を使った実験 : orbit の個数が少ない場合

$G = \text{PrimitiveGroup}(n, k)$ を使って、 n が、少し、大きい場合を実験した。 $\Omega \times \Omega$ 上 orbit 2 個、 $\Omega \times \Omega'$ 上 orbit 2 個が、orbit 数が最小の自明でない場合となる。この場合は、symmetric design となり、群から作られるものは分類 [6] が知られている。(← 有限単純群の分類の応用) $\text{AS}(G)$ は自明な association scheme となる。

$\Omega \times \Omega$ 上 orbit 3 個、 $\Omega \times \Omega'$ 上 orbit 2 個 : strongly regular design と呼ばれている。

一般の、群の関与は無しの場合で、研究結果 [5] がある。

得られた実例をいくつか示す。 $\text{AS}(G)$ は Ω^2 上の strongly regular graph になる。作られた coherent configuration CC は、どの例も、 $\text{Aut}(\text{CC}) \cong G \subsetneq \text{Aut}(\text{AS}(G))$ となり、design と graph では、自己同型群が異なる。

G	$ \Omega $ (次数)	$ \text{Aut}(\text{CC}) $	$\text{Aut}(\text{AS}(G))$	$ \text{Aut}(\text{AS}(G)) : G $
$G(2, 3)$	351	4245696	$PSO(7, 3)$	2160
$\text{Alt}(9)$	120	181440	$PSO^+(8, 2)$	1920
$O^+(8, 2)$	135	174182400	$PSO^+(8, 2)$	2

7 群から作られない例の構成 : fusion scheme

[Example] $G = \text{PrimitiveGroup}(360, 16) \cong \text{Alt}(6)^2.2^3$
 G の $\Omega \times \Omega$ 上の orbit の個数 5 個、 $\text{Aut}(\text{AS}(G)) \cong G$
 SubdirectProduct のうちの 2 個、 H および K とする。

- $H = \{(g, g^\sigma) | g \in G\} \cong G$ 、 $\Omega \times \Omega'$ 上 orbit 数 3 個
- $K = \{(g, g^{\sigma'}) | g \in G\} \cong G$ 、 $\Omega \times \Omega'$ 上 orbit 数 2 個

本発表の coherent configuration の行列表示について

$$\begin{matrix}
 & 1 & \cdots & n & 1' & \cdots & n' \\
 \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ 1' \\ \vdots \\ n' \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \\
 & \Omega^2 & & & \Omega \times \Omega' & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 \Omega' \times \Omega & & & & \Omega'^2 & \\
 & & & & &
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

$\text{Aut}(\text{CC})$ の action :
 $\Omega^2 = \Omega'^2$
 $\Omega' \times \Omega = {}^t(\Omega \times \Omega')$

$\text{CC}(H)$ について : $\text{Aut}(\text{CC}(H)) = H \cong G$

- H の $(\Omega \cup \Omega')^2$ 上の orbit 数は $(5 + 3) \times 2 = 16$ 個
- $\text{CC}(H)$ は、 A_1, A_2, \dots, A_{16} からなる。
- A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 の entry $1 \subset \Omega^2$ 、これらが $\text{AS}(G)$ を構成している。
- 同様に、 $A_2, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16} \subset \Omega'^2$ 、これらも $\text{AS}(G)$ になる。
- $A_7, A_9, A_{11} \subset \Omega \times \Omega'$ 、 ${}^t A_7 = A_8, {}^t A_9 = A_{10}, {}^t A_{11} = A_{12} \subset \Omega' \times \Omega$

$\text{CC}(K)$ について : $\text{Aut}(\text{CC}(K)) = K \cong G$

- K の $(\Omega \cup \Omega')^2$ 上の orbit 数は $(5 + 2) \times 2 = 14$ 個

$H \cong K \cong G$ であるが、permutation group としては、 $H \not\cong K$

【fusion scheme の構成】

$CC(H)$ から、 $A_1, A_2, \dots, A_6, A_7 + A_9, A_8 + A_{10}, A_{11}, \dots, A_{16}$ は coherent configuration となる。 CC' とおく。 $\text{Aut}(CC') = H$ 、したがって、特に、 CC' は群からは作られない。

これら 14 個の行列の entry1 の個数は、 $CC(K)$ の行列と一致している。

$CC_1 : CC(H)$ において、

$A_1, A_2, A_3 + A_4, A_5, A_6, A_7 + A_9, A_8 + A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13} + A_{14}, A_{15}, A_{16}$ も coherent configuration となる。これを CC_1 とする。 $\text{Aut}(CC_1) = H$ 。

$CC_2 : CC(K)$ は、 $A'_1, A'_2, \dots, A'_{14}$ からなるとして、

$A'_1, A'_2, A'_3 + A'_4, A'_5, A'_6, A'_7, \dots, A'_{10}, A'_{11} + A'_{12}, A'_{13}, A'_{14}$ は coherent configuration となる。これを CC_2 とする。 $\text{Aut}(CC_2) = K$ 。

$\implies CC_1, CC_2$ は群からは作られない。

$\text{Aut}(CC_1) = H \not\cong K = \text{Aut}(CC_2)$ より、 $CC_1 \not\cong CC_2$

CC_1, CC_2 の 12 個の行列は、それぞれ、entry1 の個数が一致する。

【Remark】

$AS(G)$ の行列は、上の記号で、 A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 になるが、 $A_1, A_3 + A_4, A_5, A_6$ は、association scheme の fusion scheme になっている。

【Example】 $G = \text{PrimitiveGroup}(369, 3) \cong \text{PSigmaL}(2, 81)$ 同様の例。 G は Ω^2 上、orbit5 個

$H = \{(g, g^\sigma) | g \in G\}$ は $\Omega \times \Omega'$ 上、orbit3 個

fusion scheme で、 Ω^2 と Ω'^2 において、 $AS(\Omega^2) \not\cong AS(\Omega'^2)$ となるものもある。

fusion scheme を作っても、それが別の群の作る association scheme や coherent configuration となる場合は多くある。ある群の部分群が作る scheme の fusion scheme が、全体の群の作る scheme になる場合などである。

【Example】 $G = \text{PrimitiveGroup}(364, 5) \cong G(2, 3)$

$\text{Aut}(AS(G)) = G(2, 3)$

$AS(G)$ の行列、 A_1, A_2, A_3, A_4 。(各行列の 1 の個数 [364, 39312, 88452, 4368])

fusion scheme $A_1, A_2 + A_4, A_3$ 。(AS で表す)

$\text{Aut}(AS) = \text{PrimitiveGroup}(364, 4) \cong \text{PSO}(7, 3)$ 、この群の作る AS になる。

特に、 $G(2, 3)$ は $\text{PSO}(7, 3)$ の subgroup となる。

【Example】 $G = \text{TransitiveGroup}(6, 6)$

最初の例で示した fusion scheme は $\text{TransitiveGroup}(6, 11)$ の作る AS になる。

参 考 文 献

- [1] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language, J. Symbolic Comput., 24 (1997), 235-265.
- [2] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10; 2018. (<https://www.gap-system.org>)
- [3] A. Hanaki and I. Miyamoto, Classification of association schemes with small vertices, published at WWW (1999~): <http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/as>.

- [4] D. G. Higman, Coherent Algebras, *Linear Algebra and its Applications* **93** (1987) 209-239.
- [5] D. G. Hingam, Strongly Regular Designs and Coherent Configurations of Type $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{smallmatrix} \right]$, *Europ. J. Combinatorics* **9** (1988) 411-422
- [6] W. M. Kantor, Classification of 2-Transitive Symmetric Designs, *Graphs and Combinatorics* **1** (1985) 165-166.