

Cartan projections of abelian horospherical subgroups and proper actions on homogeneous spaces

京都大学 大学院理学研究科 数学教室 森田 陽介 *

Yosuke Morita

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

Abstract

G が線型簡約 Lie 群, H が G の閉部分群のとき, 等質空間 G/H 上の作用がいつ固有になるかを, Cartan 射影による H の像を用いて記述できることが知られている. 像の計算は一般には困難であるが, H が可換な horospherical 部分群 (放物型部分群の冪単部分) のときには, H の Cartan 射影による像が, 対応する対称部分群の Cartan 射影と一致することがわかる. この事実を利用すると, いくつかの簡約型等質空間 ($SL(p+q, \mathbb{R})/SO_0(p, q)$ など) がコンパクト商を持たないことを証明できる.

1 はじめに

G/H を等質空間, Γ を G/H の離散部分群とする (簡単のため, G は G/H に効果的に作用することを仮定する). 商空間 $\Gamma \backslash G/H$ が多様体になるためには, Γ の G/H への作用が固有かつ自由であることが必要かつ十分であることが知られており, このとき多様体 $\Gamma \backslash G/H$ を **Clifford–Klein 形** という. なお, 作用が固有だが自由でない場合には, $\Gamma \backslash G/H$ は orbifold になる. 一方で作用が固有でない, $\Gamma \backslash G/H$ は Hausdorff 性を満たさず, 非常に素性の悪い位相空間になる.

H がコンパクト部分群の場合 (言い換えれば, G/H に不変な Riemann 計量が定まる場合) には, 任意の G の離散部分群 Γ が G/H に固有に作用する. 一方, H が非コンパクトな場合 (G/H に不変な Riemann 計量が定まらない場合), Γ の G/H への作用は固有とは限らないため, Clifford–Klein 形を理解することはより難しくなる. 1980 年代後半の小林俊行氏の研究 [2] 以降, H が非コンパクトな状況での Clifford–Klein 形の研究は様々な分野の数学者 (Lie 群の表現論, 等質力学系, 剛性理論, 微分幾何, トポロジー, ...) の興味を集めてきたが, 現在でも未解明な問題が多く残されている.

Clifford–Klein 形の大域的なトポロジーに関する最も基本的な問いの 1 つとして, 「与えられた等質空間 G/H がコンパクトな Clifford–Klein 形を持つか否かを判定せよ」という問

* E-mail address: yosuke.m@math.kyoto-u.ac.jp

題がある。これまで多くの研究者によってこの問題の研究が進められてきたが、半単純対称空間の場合に限っても、この問いに対する完全な解答は未だ遙か彼方にある（と筆者には思われる）。

本稿の主結果は次の定理である：

定理 1.1 (M.) G/H を半単純対称空間、 G/L を G/H の associated 対称空間とする。もし L が G の Levi 部分群で、 $L \neq G$ ならば、 G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない。

定理 1.1 中にあらわれる用語の定義を思い出しておく：

- 等質空間 G/H が対称空間であるとは、ある G 上の対合 σ が存在して、 H が $G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ の開部分群になっていることをいう。
- 対称空間 G/H が半単純であるとは、 G が線型半単純 Lie 群であることをいう。
- G/H が対合 σ から定まる半単純対称空間のとき、 σ と可換な Cartan 対合 θ が、 H の元による共役を除いてただ 1 つ存在することが知られている。このとき $\sigma\theta$ から定まる半単純対称空間 G/L を、 G/H の **associated** 対称空間という。

筆者の過去の論文 [6] では、Lie 環の相対コホモロジーと Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジーを比較する手法を用いて、定理 1.1 の証明を与えた。ここでは小林 [3] の手法に基づく別証明を与える。2つの手法は、筆者の理解する限りでは全く異なるものであり、なぜ同じ結果が得られるのかは不明である。

次の表は、定理 1.1 が適用可能な (G, H, L) の三つ組を、 G が単純 Lie 群の場合に Lie 環のレベルで分類したものである：

\mathfrak{g}	\mathfrak{h}	\mathfrak{l}	条件
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p, q)$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p, q)$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(p, q)$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{su}(n, n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{so}(n+2, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(n, 2)$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}(p+1, q+1)$	$\mathfrak{so}(p, 1) \oplus \mathfrak{so}(1, q)$	$\mathfrak{so}(p, q) \oplus \mathbb{R}$	$p, q \geq 0,$ $(p, q) \neq (0, 0), (1, 1)$
$\mathfrak{so}(n, n)$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}^*(4n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 2$

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{sp}(n, n)$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	—
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sp}(2, 2)$	$\mathfrak{so}(5, 5) \oplus \mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{f}_4(-20)$	$\mathfrak{so}(9, 1) \oplus \mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{7, \mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}$	—
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{H})$	$\mathfrak{e}_{6(6)} \oplus \mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R}$	—

表 1: 定理 1.1 が適用可能な例

謝辞 この研究は、科研費 14J08233, 17H06784, 19K14529, 数物フロンティア・リーディング大学院、および京都大学若手研究者スタートアップ研究費の助成を受けて行われた。

2 準備

小林 [3] は、コンパクト Clifford–Klein 形が存在するための必要条件を、Cartan 射影とコホモロジー次元を用いて与えた。本節ではこの結果を簡単におさらいする。

2.1 等質空間上の固有な作用

この項の内容は基本的に小林 [4, §2] による (小林 [2], Benoist [1] も見よ)。

定義 2.1 G を局所コンパクト群, H, L を G の閉部分集合とする。

(1) $H \prec L$ とは、ある G のコンパクト部分集合 C をとると $H \subset CLC^{-1}$ が成り立つことをいう。

(2) $H \pitchfork L$ とは、任意の G のコンパクト部分集合 C に対し $CHC^{-1} \cap L$ がコンパクトであることをいう。

次の命題は位相空間論の初等的な議論からすぐに従う：

命題 2.2 G を局所コンパクト群, H, L を G の閉部分集合とする。

(1) H, L が G の閉部分群のとき, $H \pitchfork L$ は L が G/H に固有に作用することと同値。

(2) $H \pitchfork L$ のとき, $H' \prec H$ を満たす任意の G の閉部分集合 H' について $H' \pitchfork L$ 。

系 2.3 G を局所コンパクト群, H, H', L を G の閉部分群とする。 L が G/H に固有に作

用し, $H' \curvearrowright H$ が成り立つならば, L は G/H' にも固有に作用する.

G が線型簡約 Lie 群の場合には, 命題 2.2 を Cartan 射影の言葉で更に言い換えることができる. 以下, G が線型簡約 Lie 群のとき, 次のように約束する:

- G の Cartan 対合 θ を固定し, θ の定める Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, 極大コンパクト部分群を K とする. G/H が半単純対称空間のときには, θ は H を定める対合 σ と可換になるように取る.
- \mathfrak{p} の極大分裂可換部分空間 \mathfrak{a} を固定し, Σ を \mathfrak{g} の \mathfrak{a} に関する制限ルート系とする.
- Σ の Weyl 群を W とおき, $\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}/W$ を定める (正ルートと負ルートへの分解を固定すれば, \mathfrak{a}^+ は正 Weyl chamber と同一視できる).
- 線型簡約 Lie 群 G の **Cartan 射影** $\mu: G \rightarrow \mathfrak{a}^+$ を次で定義する: $g \in G$ が $g = k \exp(a)k'$ ($k, k' \in K, a \in \mathfrak{a}$) とかけるとき, $\mu(g) = a \bmod W$ と定める. KAK -分解より, μ は well-defined である.

K はコンパクトだから, 系 2.3 から次がただちに従う:

系 2.4 G を線型簡約 Lie 群, H, H', L を G の閉部分群とする. L が G/H に固有に作用し, $\mu(H') \subset \mu(H)$ が成り立つならば, L は G/H' にも固有に作用する.

G が線型簡約 Lie 群のときには, 実はもっと精密な結果が知られている:

事実 2.5 (Benoist–小林の固有性判定法; Benoist [1, Cor. 5.2], 小林 [4, Cor. 1.2]) G を線型簡約 Lie 群, H, L を G の閉部分群とする. $\mu(H)$ の \mathfrak{a}^+ における r -閉近傍を $\overline{B}(r, \mu(H))$ と書くことにする. このとき L が G/H に固有に作用するためには, 任意の $r > 0$ に対し, $\overline{B}(r, \mu(H)) \cap \mu(L)$ がコンパクトになることが必要かつ十分である.

本稿で行う議論の範囲では, Benoist–小林の固有性判定法は必要なく, 系 2.4 のみで十分である.

2.2 実コホモロジー次元

この項の内容は基本的に小林 [2, §5] による. 簡約型でない等質空間の場合は Oh–Witte [7, §3], M. [6, §2] に説明がある.

離散群 Γ の実コホモロジー次元 $\text{cd}_{\mathbb{R}} \Gamma \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は,

$$\text{cd}_{\mathbb{R}} \Gamma = \sup \{ p \in \mathbb{N} \mid H^p(\Gamma; V) \neq 0 \text{ なる } \mathbb{R}\Gamma\text{-加群 } V \text{ が存在する} \}$$

で定義されるのであった. G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有に作用するとき, Γ の実コホモロジー次元には制約がかかることを見よう.

事実 2.6 (Cartan–Malcev–Iwasawa–Mostow) G が連結成分有限個の Lie 群ならば, G の極大コンパクト部分群 K が共役を除いて一意に存在し, G/K は Euclid 空間に微分同相になる.

注意 2.7 G が線型簡約 Lie 群ならば, 事実 2.6 は Cartan 分解から直ちに従う.

連結成分有限個の Lie 群 G に対して, $d(G) = \dim G - \dim K$ (ただし K は G の極大コンパクト部分群) とおく. $d(G)$ は G の非コンパクト次元と呼ばれる.

命題 2.8 G を連結 Lie 群, H を G の連結閉部分群とし, Γ を torsion-free な G の離散部分群とする.

- (1) もし Γ が G/H に固有に作用するならば, $\text{cd}_{\mathbb{R}} \Gamma \leq d(G) - d(H)$ が成り立つ.
- (2) (1) において等号が成立するためには, $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクトであることが必要かつ十分である.

命題 2.8 は, 2 つのファイバー束

$$\Gamma \backslash G/H \leftarrow \Gamma \backslash G/K \cap H \rightarrow \Gamma \backslash G/K$$

(ただし K は G の極大コンパクト部分群で, $K \cap H$ が H の極大コンパクト部分群になるものとする) を考えて, Leray–Serre スペクトル系列を用いると証明できる.

2.3 コンパクト Clifford–Klein 形が存在するための必要条件

定理 2.9 G を線型簡約 Lie 群, H を G の連結閉部分群とする. 次の (1), (2) のどちらかを満たす G の連結閉部分群 H' が存在するとする:

- (1) $H' \prec H$, $d(H') > d(H)$.
- (2) $H' \prec H$, $d(H') = d(H)$ かつ G/H' はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

このとき, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

証明 (1) と (2) の証明はほぼ同じなので, ここでは (2) の証明のみ説明する.

コンパクトな Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が存在したとする. G は連結と仮定してよい. さらに Selberg の補題より, Γ は torsion-free と仮定しても一般性を失わない. よって命題 2.8 より, $\text{cd}_{\mathbb{R}} \Gamma = d(G) - d(H)$ が成り立つ. 一方, Γ は G/H に固有に作用し, $H' \prec H$ だから, Γ は G/H' に固有に作用する (系 2.4). 仮定より $\Gamma \backslash G/H'$ は非コンパクトなので, 再び命題 2.8 より, $\text{cd}_{\mathbb{R}} \Gamma < d(G) - d(H')$. これは $d(H') = d(H)$ という仮定に反する. \square

注意 2.10 G が簡約とは限らない一般の線型 Lie 群の場合も, $\mu(H') \subset \mu(H)$ という条件を $H' \prec H$ に置き換えれば, 全く同様に証明ができる.

3 定理 1.1 の証明

定理 2.9 (2) より, 定理 1.1 を証明するためには次の命題が成り立つことを確かめればよい:

命題 3.1 G/H を半単純対称空間, G/L を G/H の associated 対称空間とする. L が G の非自明な Levi 部分群 であると仮定し, U を L に対応する horospherical 部分群 (放物型部分群の冪単部分) とする. このとき以下が成り立つ:

- (1) $\mu(U) = \mu(H)$.
- (2) $d(U) = d(H)$.
- (3) G/U はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

証明 簡単のため, 以下では $G = \mathrm{SL}(p+q, \mathbb{R})$, $H = \mathrm{SO}_0(p, q)$, $L = \mathrm{S}(\mathrm{GL}_0(p, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_0(q, \mathbb{R}))$ ($p, q \geq 1$) のときに限って議論する. このとき $K = \mathrm{SO}(p+q)$, また L に対応する horospherical 部分群 U は

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{M}(p, q; \mathbb{R}) \right\}$$

である.

まず, (2) は $d(U) = d(H) = pq$ であるからよい.

(3) は [5, Ex. 7.1] においてコホモロジー的手法を用いて証明したが, その後, 北川宜稔氏によりもっと易しい証明が発見されたので, ここではそれを紹介する. G と U はどちらもユニモジュラーな Lie 群なので, G/U 上には G -不変な体積形式が存在する. これを 1 つ固定して Ω とおく. $\Gamma \backslash G/U$ が Clifford–Klein 形するとき, Ω から誘導される $\Gamma \backslash G/U$ 上の体積形式を Ω_Γ とおき, $\Gamma \backslash G/U$ の Ω_Γ に関する体積を $\mathrm{vol}(\Gamma \backslash G/U)$ と書くことにする. さて,

$$a_t = \begin{pmatrix} t^{-q} I_p & 0 \\ 0 & t^p I_q \end{pmatrix} \in G \quad (t > 0)$$

とおくと, $a_t \in N_G(U)$ であるから

$$\varphi_t: \Gamma \backslash G/U \rightarrow \Gamma \backslash G/U, \quad \Gamma gU \mapsto \Gamma g a_t U$$

は well-defined な微分同相写像. Lie 環のレヴェルでの計算により $\varphi_t^* \Omega_\Gamma = t^{pq(p+q)} \Omega_\Gamma$ がわかる. 積分の変数変換公式より,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G/U) &= \int_{\Gamma \backslash G/U} \Omega_\Gamma = \int_{\Gamma \backslash G/U} \varphi_t^* \Omega_\Gamma = t^{pq(p+q)} \int_{\Gamma \backslash G/U} \Omega_\Gamma \\ &= t^{pq(p+q)} \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G/U) \end{aligned}$$

となる。もし $\Gamma \backslash G/U$ がコンパクトなら、 $0 < \text{vol}(\Gamma \backslash G/U) < \infty$ であるから、矛盾である。

(1) は小林 [4, Ex. 6.5] によって $(G/H = \text{SL}(p+q, \mathbb{R})/\text{SO}_0(p, q))$ の場合には示されたが、一応ここでも証明を与えることにする。まず $p \leq q$ と仮定しても一般性を失わない。

$$i: \underbrace{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R})}_p \rightarrow \text{SL}(p+q, \mathbb{R}),$$

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \text{diag}(a_1, \dots, a_p) & \text{diag}(b_1, \dots, b_p) & 0 \\ \text{diag}(c_1, \dots, c_p) & \text{diag}(d_1, \dots, d_p) & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-p} \end{pmatrix} \right)$$

という埋め込みを考える。 $i(\text{SO}_0(1, 1) \times \cdots \times \text{SO}_0(1, 1))$ は H の極大分裂可換部分群であるから、 H に対する KAK -分解より

$$\mu(H) = \mu(i(\text{SO}_0(1, 1) \times \cdots \times \text{SO}_0(1, 1)))$$

である。一方、 $i(\text{SO}_0(1, 1) \times \cdots \times \text{SO}_0(1, 1))$ は $i(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ の極大分裂可換部分群でもあるから、 $i(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ に対する KAK -分解より

$$\mu(i(\text{SO}_0(1, 1) \times \cdots \times \text{SO}_0(1, 1))) = \mu(i(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R})))$$

である。一方、

$$U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}, \quad U' = i(U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \times \cdots \times U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})})$$

とおくと、 $K \cap H$ の U への共役による作用が、 $K \cap H$ の $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ への随伴作用と自然に同一視できることから

$$\mu(U) = \mu(U')$$

がわかる。 U' は $i(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ の極大冪単部分群であるから、

$$\mu(U') = \mu(i(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R})))$$

である。以上で $\mu(U) = \mu(H)$ が証明できた。 □

注意 3.2 一般の場合には、次のように証明を修正すればよい:

- (3) の証明では、 L の中心の双曲的な元を a_t とおく。
- (1) の証明では、互いに強直交する U のルートの極大な族を取ってきて、そこから埋め込み $i: \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow G$ を作る。

参考文献

- [1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), 315–347.

- [2] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.
- [3] ———, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.
- [4] ———, Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163,
- [5] Y. Morita, Homogeneous spaces of nonreductive type that do not model any compact manifold, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **53** (2017), 287–298.
- [6] ———, A cohomological obstruction to the existence of Clifford–Klein forms, *Selecta Math. (N.S.)* **23** (2017), 1931–1953.
- [7] H. Oh and D. Witte, Compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of $\mathrm{SO}(2, n)$, *Geom. Dedicata* **89** (2002), 25–57.
- [8] N. Tholozan, Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms, preprint, arXiv:1511.09448v2.