等質開凸錐の基本相対不変式の明示公式の代数的証明

名古屋大学 多元数理科学研究科　中島 秀斗*
Hideto Nakashima
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract

等質開凸錐の基本相対不変式の明示的公式は，2014 年に筆者によって与えられた．その証明は Graczyk–Ishi (2014) によって与えられた等質開凸錐の自己共役表現に付随する 2 次形式の像の構造論に依拠しているが，そこでは等質開凸錐上の Riesz 超関数の精緻な解析が用いられている．本稿では，その 2 次形式の像の構造を純代数的な手法により決定できることを報告したい．

序文.

実ベクトル空間 V の中の直線を含まない開凸錐 Ω に対し，線型自己同型群 $G(\Omega) := \{g \in GL(V);\ g\Omega = \Omega\}$ が Ω に推移的に作用するとき，Ω は等質であるという．等質開凸錐は，等質凸領域の重要なクラスの一つであり，また複素有界等質領域の研究においても重要な役割を果たす (cf. Piatetski-Shapiro [7])．Vinberg [8] による等質開凸錐の一般論により，$G(\Omega)$ の分裂可解 Lie 部分群 H で Ω に単純推移的に作用するものが存在する．Ishi [3] により，H に関して相対不変な既約多項式関数はちょうど Ω の階数 r の個数だけ存在し，それらを $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ と表せば，任意の H-相対不変多項式はこれらの冪積で表すことができて，さらに Ω はそれらの正値集合として

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}$$

と記述できる．この意味で $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ を Ω の基本相対不変式と呼ぶ．基本相対不変式は，Vinberg 多項式の系列 $D_1(x), \dots, D_r(x)$ (cf. 式 (1.5), Vinberg [8]) から既約因子を順次取り出すことによって得られるということが Ishi [3] により示されており，その後 Nakashima [5] において，以下のように閉じた式として与える公式が与えられた:

$$\Delta_1(x) = D_1(x), \quad \Delta_j(x) = \frac{D_j(x)}{\prod_{i<j} D_i(x)^{-\sigma_{ji}+\sigma_{j,i+1}+\cdots+\sigma_{jj}}} \quad (j = 2, \dots, r).$$

* 日本学術振興会特別研究員 (PD); h-nakashima@math.nagoya-u.ac.jp
本研究は JSPS 科研費 (18J00379) の助成を受けたものである．

ただし，$\sigma = (\sigma_{jk})_{1 \le j,k \le r}$ は [3, Theorem 2.2 (2)] および [5] において導入された Ω の multiplier matrix と呼ばれるものである (式 (1.4) 参照)．その証明において鍵となったのは, Graczyk–Ishi [1] において示された, ベクトル空間 E 上の Ω-positive かつ homogeneous な 2 次写像 $Q\colon E \to V$ の像に関する次の性質である:

$$Q[E] = \overline{\rho(H)c_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \qquad (c_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_1 c_1 + \cdots + \varepsilon_r c_r;\ \boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^r). \tag{1}$$

ただし，ρ は H の V への作用を表し，$c_1, \ldots, c_r \in V$ は，Ω に付随するクランにおける原始冪等元の完全直交系である (式 (1.1) 参照)．また集合 X に対して，その閉包を $\overline{X}$ と表している．実は原論文 [1] では，より広範なクラス (virtual quadratic maps) に対して考察を行っており，等質開凸錐上の Riesz 超関数の精緻な解析を用いることによって，そのような場合に対しても証明が成立する形で示されている．翻って我々の設定においては，通常の意味での 2 次写像についての結果で十分であるので，[1] でなされたような解析的な議論を経由せず，代数的な議論のみを用いてより初等的に導出できて然るべきではないかということが懸案事項となっていた．本稿では，Ω-positive かつ homogeneous な 2 次写像に対して式 (1) を純代数的な手法で示すことによりその問題を解決し，さらに等質開凸錐の multiplier matrix を計算するアルゴリズム (定理 1.1) の幾何学的な意味の説明を与える．

1 等質開凸錐

V を有限次元実ベクトル空間とし，$\Omega \subset V$ を直線を含まない開凸錐とする．$GL(V)$ の部分群で Ω を不変にするものを $G(\Omega)$ で表す．このとき $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群となり，したがって線型 Lie 群となる．ここで，$G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用しているとき，Ω は等質であるという．本稿では開凸錐は常に等質であると仮定する．Vinberg [8] にあるように，$G(\Omega)$ の分裂可解な Lie 部分群 H で，Ω に単純推移的に作用するものが存在する．H の Ω (そして V) への作用を ρ で表す．さて，Ω の一点 x_0 を固定して，その軌道写像 $H \ni h \mapsto \rho(h)x_0 \in \Omega$ を考えると，単純推移性よりこれは微分同相写像になる．すると，H の単位元におけるこの軌道写像の微分は，H の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ から V への線型同型写像 $\mathfrak{h} \ni X \mapsto Xx_0 \in V$ を与える．そこで，その逆写像を $L\colon V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ で表し，さらに V に積 $\triangle$ を $x \triangle y := L_x y$ $(x, y \in V)$ で定義すると，この積は双線型になり，さらに

1. 任意の $x, y \in V$ に対して $[L_x, L_y] = L_{x \triangle y - y \triangle x}$ (left symmetry)
2. ある $s \in V^*$ が存在して $s(x \triangle y)$ が V の内積を定める (compactness)
3. L_x の固有値はすべて実数である (normality)
4. $(V, \triangle)$ は単位元 e_0 を持つ (unital)

という 4 つの性質を満たしている．

条件 1–3 を満たす代数を，本稿ではクランと呼ぶ[*1]．一般に，クランは非可換かつ非結合的である．Vinberg [8] にあるように，等質凸領域とクランは同型を除いて 1 対 1 に対応しており，さらに等質凸領域が錐になることとクランが条件 4 を満たすこと，すなわち単位元を持つことが対応している．さて，Ω の階数を r とするとき，互いに直交する r 個の原始冪等元の完全直交系 $c_1,\dots,c_r\in V$ が存在し，それに付随してクラン V は

$$V=\bigoplus_{1\le j\le k\le r}V_{kj} \tag{1.1}$$

と直和分解される．ただし，V_{jj} $(j=1,\dots,r)$ および V_{kj} $(1\le j<k\le r)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} V_{jj}=\mathbb{R}c_j \\ V_{kj}=\left\{x\in V;\ L_{c_i}x=\dfrac{\delta_{ij}+\delta_{ik}}{2}x \text{ and } x\triangle c_i=\delta_{ij}x \quad (i=1,\dots,r)\right\} \end{cases}$$

である．この分解をクラン V の正規分解という．正規分解に則して，次の乗法則

$$V_{ji}\triangle V_{lk}=\{0\}\quad (i\le j \text{ and } l\le k),\qquad V_{kj}\triangle V_{ji}\subset V_{ki}\quad (i\le j\le k),$$
$$V_{ji}\triangle V_{ki}\subset V_{jk} \text{ or } V_{kj}\quad (\text{according to } j\le k \text{ or } k\le j, \text{ where } i\le j \text{ and } i\le k)$$

が成立する．また，$c_1,\dots,c_r$ の和は V の単位元，すなわち $e_0=c_1+\cdots+c_r$ となる．V の内積としては，条件 2 を満たす $s_0\in V^*$ を一つ固定して

$$\langle x|y\rangle := s_0(x\triangle y)\quad (x,y\in V) \tag{1.2}$$

としておく．各ウェイト空間 V_{kj} $(1\le j\le k\le r)$ はこの内積に関して直交している．また，与えられた $h\in H$ は，正規分解 (1.1) を利用すれば，正の実数 h_j $(j=1,\dots,r)$ および $v_{kj}\in V_{kj}$ $(1\le j<k\le r)$ を用いて

$$\begin{aligned} &h=(\exp T_1)(\exp L_1)(\exp T_2)\cdots(\exp L_{r-1})(\exp T_r) \\ &\quad T_i:=(2\log h_i)L_{c_i},\quad L_j:=\sum_{k>j}L_{v_{kj}}\quad (1\le i\le r,\ 1\le j\le r-1) \end{aligned} \tag{1.3}$$

と一意的に表される．本稿では H にはこの座標を入れておく．

等質開凸錐 Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは，H のある指標 χ が存在して

$$f(\rho(h)x)=\chi(h)f(x)\quad (h\in H,\ x\in\Omega)$$

が成り立つことをいう．H は分裂可解であるので，上の座標 (1.3) を用いると，H の指標 χ はある実数の組 $\underline{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_r)\in\mathbb{R}^r$ を使って

$$\chi(h)=(h_1)^{2\nu_1}\cdots(h_r)^{2\nu_r}\quad (h\in H)$$

[*1] Vinberg [8] において，コンパクトな正規左対称代数 (Compact Normal Left symmetric Algebra) の頭文字を採って，clan と名付けられた．その他，Vinberg 代数や Vinberg–Koszul 代数と呼ばれることもあり，筆者の近年の論文 [6] などでは Vinberg 代数と呼んでいた．

と書ける．この $\underline{\nu}$ を指標 χ (および相対不変関数 f) の multiplier と呼ぶ．さて，Ishi [3] にあるように，相対不変な多項式の中で既約なものはちょうど階数の個数 r だけ存在しており，本稿ではそれらを $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ $(x\in V)$ と表す．ただし，$\Delta_j(e_0)=1$ $(j=1,\dots,r)$ のように正規化しておく．基本相対不変式 Δ_j の multiplier を $\underline{\sigma}_j=(\sigma_{j1},\dots,\sigma_{jr})$ としたとき，それらを並べて得られる正方行列

$$\sigma := (\sigma_{jk})_{1\le j,k\le r} \tag{1.4}$$

を等質開凸錐 Ω の multiplier matrix と呼ぶ．多項式関数の multiplier は非負整数であるので，Ishi [3] にある基本相対不変式の構成法を踏まえれば，multiplier matrix σ は対角成分が 1 で各成分が非負整数の下三角行列になることがわかる．

定理 1.1（Nakashima [5]） 等質開凸錐 Ω の multiplier matrix σ は以下のアルゴリズムによって計算される．簡単のため $d_{kj}:=\dim V_{kj}$ $(1\le j<k\le r)$ とおき，$i=1,\dots,r-1$ に対して，$\boldsymbol{d}_i := {}^t(0,\dots,0,d_{i+1,i},\dots,d_{ri})\in\mathbb{R}^r$ とする．このとき，各 i 列ごとに $\boldsymbol{l}_i^{(j)}={}^t(l_{1i}^{(j)},\dots,l_{ri}^{(j)})\in\mathbb{R}^r$ $(j=i,\dots,r-1)$ を，まず $\boldsymbol{l}^{(i)}:=\boldsymbol{d}_i$ とし，$k=i+1,\dots,r-1$ に対しては

$$\boldsymbol{l}_i^{(k)}=\begin{cases}\boldsymbol{l}_i^{(k-1)}-\boldsymbol{d}_k & (l_{k-1,i}^{(k-1)}>0),\\ \boldsymbol{l}_i^{(k-1)} & (l_{k-1,i}^{(k-1)}=0)\end{cases}$$

のように帰納的に定義する．さらに，$\boldsymbol{\varepsilon}^{[i]}={}^t(\varepsilon_{i+1,i},\dots,\varepsilon_{ri})\in\{0,1\}^{r-i}$ を

$$\varepsilon_{ji}=\begin{cases}1 & (\text{if } l_{ji}^{(r-1)}>0),\\ 0 & (\text{if } l_{ji}^{(r-1)}=0)\end{cases}\qquad (j=i+1,\dots,r)$$

により定義すれば，σ は次のように計算できる:

$$\sigma=\mathcal{E}_{r-1}\mathcal{E}_{r-2}\cdots\mathcal{E}_1,\quad \mathcal{E}_i=\begin{pmatrix}I_{i-1}&0&0\\0&1&0\\0&\boldsymbol{\varepsilon}^{[i]}&I_{r-i}\end{pmatrix}\quad (i=1,\dots,r-1).$$

この定理の応用として，基本相対不変式の明示的公式が得られる．そのために Vinberg 多項式 $D_1(x),\dots,D_r(x)$ を導入する．V のノルムを $\|x\|^2=\langle x\,|\,x\rangle$ とし，与えられた $x\in V$ に対して

$$x^{(j)} := \sum_{k=j}^{r} x_{kk}^{(j)}c_k+\sum_{l>k\ge j}X_{lk}^{(j)}\quad (j=1,\dots,r)$$

を帰納的に以下のように定義する: まず $x^{(1)}:=x$ とし，次に $i=1,\dots,r-1$ に対して

$$\begin{cases} x_{kk}^{(i+1)} := x_{ii}^{(i)}x_{kk}^{(i)}-s_0(c_k)^{-1}\|X_{ki}^{(i)}\|^2 & (i<k\le r),\\ X_{lk}^{(i+1)} := x_{ii}^{(i)}X_{lk}^{(i)}-X_{li}^{(i)}\triangle X_{ki}^{(i)} & (i<k<l\le r)\end{cases}$$

とするとき，

$$D_i(x):=x_{ii}^{(i)}\quad (i=1,\dots,r) \tag{1.5}$$

とすれば各 $D_i(x)$ は H-相対不変な多項式となる．この多項式 $D_i(x)$ を，本稿では Vinberg 多項式と呼ぶ (cf. Vinberg [8])．この多項式は，与えられた $x \in \Omega$ に対して，方程式 $x = \rho(h)e_0$ を満たす $h \in H$ を求める際に現れるものである．実際, Vinberg [8, Chapter III, Section 3] にあるように，この方程式を満たす $h \in H$ の対角成分 $h_1, \ldots, h_r$ は

$$h_1^2 = D_1(x), \quad h_j^2 = D_1(x)^{-1} \cdots D_{j-1}(x)^{-1} D_j(x) \quad (j = 2, \ldots, r)$$

と計算される．したがって，次の定理を得る．

定理 1.2（Nakashima [5]）　等質開凸錐 Ω の基本相対不変式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ は，Ω の multiplier matrix $\sigma = (\sigma_{jk})_{1 \leq j,k \leq r}$ と Vinberg 多項式 $D_1(x), \ldots, D_r(x)$ を用いて，次で与えられる．

$$\Delta_1(x) = D_1(x), \quad \Delta_j(x) = \frac{D_j(x)}{\prod_{i<j} D_i(x)^{-\sigma_{ji}+\sigma_{j,i+1}+\cdots+\sigma_{jj}}} \quad (j = 2, \ldots, r).$$

2　Ω-positive かつ homogeneous な 2 次写像

この節では定理 1.1 の [5] における証明の概略を述べる．その鍵になった定理を記述するために，いくつか用語を定義する．$\Omega \subset V$ を等質開凸錐とし，E を有限次元の実ベクトル空間とする．このとき，E 上の 2 次写像 $Q\colon E \to V$ が Ω-positive であるとは任意のベクトル $\xi \in E$ に対して $Q[\xi] \in \overline{\Omega}$ かつ $Q[\xi] = 0$ ならば $\xi = 0$ となることをいう．また，任意の $h \in H$ に対してある $g_h \in GL(E)$ が存在して

$$\rho(h)\bigl(Q[\xi]\bigr) = Q[g_h \xi] \quad (\forall \xi \in E)$$

を満たすとき，Q は homogeneous であるという．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2.1（Graczyk–Ishi [1]）　Ω を階数 r の等質開凸錐とする．有限次元実ベクトル空間 E 上の Ω-positive かつ homogeneous な 2 次写像に対して，ある $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ が存在して，$Q[E]$ は $c_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \varepsilon_1 c_1 + \cdots + c_r \varepsilon_r \in \overline{\Omega}$ を通る H-軌道の閉包として書ける．すなわち，

$$Q[E] = \overline{\rho(H)c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}.$$

注意 2.2　Graczyk–Ishi [1] は等質開凸錐 Ω 上の Wishart 分布について研究しており，特に Ω-positive かつ homogeneous な 2 次写像に付随する Wishart 分布は Gindikin–Riesz 超関数を用いて表せることを，Laplace 変換の性質を用いて導いている．また，正値の Gindikin–Riesz 超関数 $\mathcal{R}_{\underline{s}}$ ($\underline{s} \in \mathbb{C}^r$) の台は，Ishi [2] により求められており，それが $\overline{\rho(H)c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ ($\exists \boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^r$) である．上の定理 2.1 は，この 2 つの事実を合わせたものである．なお，Ishi [2] の結果は，$\mathcal{R}_{\underline{s}}$ が正値となる集合 Ξ (Gindikin–Wallach 集合と呼ばれる) に対して

有効であり，特に Ξ は連続濃度を持っている．これより Laplace 変換を通して定義される virtual quadratic maps に対しても，定理 2.1 が成り立つことがわかる．また，定理 1.1 のアルゴリズムは，Ishi [2] で与えられた $\mathcal{R}_{\underline{s}}$ の台を求めるアルゴリズムを繰り返し用いた形になっている．

以下，[5] における定理 1.1 の証明の概略を述べる．まず，正規分解 (1.1) を利用して $V^{[1]}=\bigoplus_{k=2}^{r}V_{k1}$ および $V'=\bigoplus_{2\le j\le k\le r}V_{kj}$ とおき，V を

$$V=\mathbb{R}c_1\oplus V^{[1]}\oplus V'=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{R}c_1 & V^{[1]}\\ \hline V^{[1]} & V'\end{array}\right)$$

と 3 つの部分空間に分解する．また，V の元 v を

$$v=\lambda c_1+\xi+x\quad(\lambda\in\mathbb{R},\ \xi\in V^{[1]},\ x\in V')\tag{2.1}$$

のように表す．この分解に関して，V の積 $\triangle$ を V' に制限したものも同じ記号 $\triangle$ で表すことにすれば，$(V',\triangle)$ もまたクランの性質を満たしており，したがって V の部分クランとなっている．これより特に，V' に対応する等質開凸錐 Ω' が存在し，さらに Ω' に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 H' も存在する．実は，H' の元 h' は，H の座標 (1.3) において，$\mathbb{R}c_1$ と $V^{[1]}$ に関するものを取り去った形で書ける．すなわち，正の実数 h_j $(j=2,\dots,r)$ および $v_{kj}\in V_{kj}$ $(2\le j<k\le r)$ を用いて，

$$h'=(\exp T_2)(\exp L_2)(\exp T_3)\cdots(\exp L_{r-1})(\exp T_r)$$

のように表示できる．ただし，$T_j:=(2\log h_j)L_{c_j}$ および $L_j:=\sum_{k>j}L_{v_{kj}}$ である．また，$Q[\xi]:=\xi\triangle\xi$ とすれば，Q は Ω'-positive かつ homogeneous な 2 次写像になる．

等質開凸錐の基本相対不変式は，対応するクランの右乗法作用素の行列式の既約因子としてすべて現れるという事実 (cf. Ishi–Nomura [4]) を用いれば，Ω の基本相対不変式 $\Delta_1(v),\dots,\Delta_r(v)$ は，Ω' の基本相対不変式 $\Delta'_2(x),\dots,\Delta'_r(x)$ を用いて

$$\Delta_1(v)=\lambda,\quad \Delta_j(v)=\lambda^{-\alpha_j}\Delta'_j(\lambda x-\tfrac{1}{2}Q[\xi])\quad(j=2,\dots,r)$$

というように，ある非負整数 α_j $(j=2,\dots,r)$ を用いて記述できる．この α_j を決定する必要があるが，ここで定理 2.1 を用いれば，$Q[\xi]=\rho(h)c'_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ $(c'_{\boldsymbol{\varepsilon}}=\varepsilon_2c_2+\cdots+\varepsilon_rc_r)$ として良いことが分かり，それを用いて

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=\sigma'\begin{pmatrix}1-\varepsilon_2\\ \vdots\\ 1-\varepsilon_r\end{pmatrix}\qquad(\sigma'\text{ は }\Omega'\text{ の multiplier matrix})$$

とおいたときに $\lambda^{-\alpha_j}\Delta'_j(\lambda x-\frac{1}{2}Q[\xi])$ が既約な多項式になることを帰納法により示す，というのが定理 1.1 の証明の大まかな流れである．

3 定理 1.1 の代数的証明

これまで通り Ω を階数 r の等質開凸錐とし，$Q\colon E \to V$ を有限次元実ベクトル空間 E 上の Ω-positive かつ homogeneous な 2 次写像とする．E の内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$ とするとき，Q に付随して線型写像 $\varphi\colon V \to \mathrm{Sym}(E)$ を

$$\langle \varphi(x)\xi \,|\, \xi \rangle_E = \langle x \,|\, Q[\xi] \rangle \quad (x \in V,\ \xi \in E)$$

により定義する．この φ を用いて

$$E_i := \varphi(c_i)E \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{3.1}$$

と定義する．なお，φ はクラン $(V, \triangle)$ の双対クラン $(V, \triangledown)$ の自己共役表現になっており，従って c_i の冪等性より $\varphi(c_i)$ は射影作用素になる．また，$\varphi(x)$ の「下三角部分」$\underline{\varphi}(x)$ を

$$\underline{\varphi}(x) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} x_{jj}\varphi(c_j) + \sum_{1\le j<k\le r} \varphi(c_k)\varphi(x_{kj})\varphi(c_j) \qquad \left(x = \sum_{j=1}^{r} x_{jj}c_j + \sum_{1\le j<k\le r} x_{kj}\right)$$

とする．さらに，極化することにより，Q を E から V への双線型写像に持ち上げる:

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\big(Q[\xi_1 + \xi_2] - Q[\xi_1] - Q[\xi_2]\big) \quad (\xi_1, \xi_2 \in E).$$

このとき，$W := E \oplus V$ に

$$(\xi_1 + x_1) \triangle (\xi_2 + x_2) = \underline{\varphi}(x_1)\xi_2 + (Q(\xi_1, \xi_2) + x_1 \triangle x_2) \quad (\xi_1, \xi_2 \in E,\ x_1, x_2 \in V)$$

により積 $\triangle$ を定義する．ここで右辺の $\triangle$ は V のクラン積である．すると，$(W, \triangle)$ は (単位元を持たない) クランになる．また W の内積は，E の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$ を用いて

$$\langle \xi_1 + x_1 \,|\, \xi_2 + x_2 \rangle_W := 2\langle \xi_1 \,|\, \xi_2 \rangle_E + \langle x_1 \,|\, x_2 \rangle \quad (\xi_1, \xi_2 \in E,\ x_1, x_2 \in V) \tag{3.2}$$

により定義し，この内積から定義される W のノルムを $\|\cdot\|_W$ で表す．E の元 ξ に対しては $\|\xi\|_W^2 = 2\|\xi\|_E^2$ となることに注意．

次に，V を式 (2.1) により 3 つの部分空間に分解し，また式 (3.1) を利用して E を

$$E = E_1 \oplus E' = \left(\begin{array}{c} E_1 \\ \hline \\ E' \\ \\ \end{array}\right) \qquad (E' := \bigoplus_{k=2}^{r} E_k)$$

のように 2 つの部分空間に分解する．この分解を踏まえれば，W は直感的には

$$W = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & E_1 & E' \\ \hline E_1 & \mathbb{R}c_1 & V^{[1]} \\ \hline & & \\ E' & V^{[1]} & V' \\ & & \end{array}\right)$$

のように分解されることになる．これらの空間のうち，以降用いることになる 3 つの空間 E_1, E' および $V^{[1]}$ に関する乗法則を，補題としてまとめておく．

補題 3.1　(1) E_1, E', $V^{[1]}$ に関して，次の乗法則が成り立つ．

		right		
		E_1	E'	$V^{[1]}$
left	E_1	$\mathbb{R}c_1$	$V^{[1]}$	0
	E'	$V^{[1]}$	V'	0
	$V^{[1]}$	E'	0	V'

(2) 積 $\triangle$ は E に制限すれば可換である．すなわち，$\xi \triangle \eta = \eta \triangle \xi \quad (\xi, \eta \in E)$.

定理 1.1 における ε を計算する際のアルゴリズムを思い出すと，

$$\begin{aligned} \dim E_1 > 0 \quad &\Rightarrow \quad E' \text{ の次元情報から } V^{[1]} \text{ の次元情報を引き去る，} \\ \dim E_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{何もしない，} \end{aligned}$$

というものであった．そこから，$\dim E_1 > 0$ のときには E' の中には $V^{[1]}$ のコピーに相当するものがあって，それが E の Q による像を記述する際に役割を果たしているという構図が見えてくる．そして，それを実現するのが次の 2 つの写像である．

定義 3.2　非零ベクトル $\xi \in E_1$ を一つ取り，固定しておく．この ξ に対して，2 つの線型写像 r_ξ および r_ξ^* を，W におけるクラン積 $\triangle$ を用いて以下で定義する:

$$r_\xi \colon \begin{array}{ccc} V^{[1]} & \longrightarrow & E' \\ \Cup & & \Cup \\ v & \longmapsto & v \triangle \xi \end{array}, \qquad r_\xi^* \colon \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & V^{[1]} \\ \Cup & & \Cup \\ a & \longmapsto & a \triangle \xi \end{array}$$

すなわち，W における右乗法作用素 R_ξ をそれぞれ $V^{[1]}$ および E' に制限したものである．

補題 3.3　$E' = \operatorname{Image} r_\xi \oplus \operatorname{Ker} r_\xi^*$ (直和).

証明　(i) 合成写像 $r_\xi^* \circ r_\xi \colon V^{[1]} \to V^{[1]}$ はスカラー写像である: 実際，クラン積の左対称性により

$$r_\xi^* \circ r_\xi(v) = (v \triangle \xi) \triangle \xi = (\xi \triangle v) \triangle \xi + v \triangle (\xi \triangle \xi) - \xi \triangle (v \triangle \xi)$$

であるが，補題 3.1 の (1) および (2) によって $\xi \triangle (v \triangle \xi) = (v \triangle \xi) \triangle \xi$ および $\xi \triangle v = 0$ であるので，$\xi \triangle \xi = \|\xi\|_W^2 c_1$ かつ $v \triangle c_1 = v$ であることに注意すれば，

$$r_\xi^* \circ r_\xi(v) = (v \triangle \xi) \triangle \xi = \frac{1}{2} v \triangle (\xi \triangle \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|_W^2 v.$$

(ii) r_ξ は単射であり，r_ξ^* は全射である: これは (i) と下の図より明らかである．

$$r_\xi^* \circ r_\xi \colon V^{[1]} \xrightarrow{\ r_\xi\ } E' \xrightarrow{\ r_\xi^*\ } V^{[1]}$$

(iii) $a \in \operatorname{Image} r_\xi$ かつ $b \in \operatorname{Ker} r_\xi^*$ ならば $a \triangle b = 0$ である: 実際，ある $v \in V^{[1]}$ が存在して $a = r_\xi(v)$ と書けるので，補題 3.1 の乗法表より $\xi \triangle v = 0$ および $v \triangle b = 0$ となることに注意すれば，

$$a \triangle b = (v \triangle \xi) \triangle b = (\xi \triangle v) \triangle b + v \triangle (\xi \triangle b) - \xi \triangle (v \triangle b) = v \triangle (\xi \triangle b)$$

を得る．ここで E におけるクラン積の可換性から $\xi \triangle b = b \triangle \xi = r_\xi^*(b)$ となるが，今 $b \in \operatorname{Ker} r_\xi^*$ であるので，結局 $a \triangle b = 0$ である．
(iv) $\operatorname{Image} r_\xi$ と $\operatorname{Ker} r_\xi^*$ は直交する: これは，W の内積は式 (3.2) で定義されているので，先程示した (iii) より直交性を得る． □

この補題より，$\operatorname{Image} r_\xi$ は E' の中にある $V^{[1]}$ のコピーと見なせる．そこで，

$$E_{V^{[1]}} := \operatorname{Image} r_\xi, \quad E_{V^{[1]}}^{\perp} := \operatorname{Ker} r_\xi^*$$

とおく．さて，2 次写像 Q を $E_{V^{[1]}}^{\perp}$ 上に制限したものを $\widetilde{Q}$ で表す:

$$\widetilde{Q}[b] := Q[b] \quad (b \in E_{V^{[1]}}^{\perp}).$$

補題 3.4　$\widetilde{Q}$ は Ω'-positive かつ homogeneous な $E_{V^{[1]}}^{\perp}$ 上の 2 次写像である．

証明　$E' \triangle E' \subset V'$ であることより，$\widetilde{Q}$ が Ω'-positive であることは明らかなので，以下 homogeneous であることを示す．まず $H' = \{\exp L_v;\ v \in V'\}$ と書けることに注意すれば，$\widetilde{Q}$ が homogeneous であることは

$$L_x(b \triangle b) = (L_x b) \triangle b + b \triangle (L_x b) \quad (x \in V',\ b \in E_{V^{[1]}}^{\perp})$$

と表せるので，$V' \triangle E_{V^{[1]}}^{\perp} \subset E_{V^{[1]}}^{\perp}$ を示せば十分である．ここで積 $\triangle$ は W のクラン積として考えている．補題 3.1 の (1) より，$b \triangle x = 0$ かつ $x \triangle \xi = 0$ であるので，

$$r_\xi^*(L_x b) = (x \triangle b) \triangle \xi = (b \triangle x) \triangle \xi + x \triangle (b \triangle \xi) - b \triangle (x \triangle \xi) = x \triangle (r_\xi^*(b)) = 0$$

となる．したがって，$\widetilde{Q}$ は homogeneous である． □

直和分解 $E = E_1 \oplus E_{V^{[1]}} \oplus E_{V^{[1]}}^{\perp}$ にしたがって，E の元 ν を

$$\nu = \xi + a + b \quad (\xi \in E_1,\ a \in E_{V^{[1]}},\ b \in E_{V^{[1]}}^{\perp}) \tag{3.3}$$

のように表す．

命題 3.5　$\nu \in E$ が $\xi \neq 0$ を満たすと仮定すると，

$$Q[\nu] = \rho(\exp L_{tc_1} \exp L_u)(c_1 + \widetilde{Q}[b]) \quad \text{where} \quad t := 2 \log \|\xi\|_W \quad \text{and} \quad u := \frac{2}{\|\xi\|_W} r_\xi^*(a).$$

証明　一般の $v \in V^{[1]}$ および $w \in V'$ に対して，

$$\rho(\exp L_{tc_1} \exp L_v)(c_1 + w) = \|\xi\|_W^2 c_1 + \|\xi\|_W v + (\tfrac{1}{2} v \triangle v + w)$$

であること，および

$$Q[\nu] = \|\xi\|_W^2 c_1 + 2\xi \triangle (a+b) + Q[a+b] = \|\xi\|_W^2 c_1 + \|\xi\|_W \cdot \tfrac{2}{\|\xi\|_W} r_\xi^*(a) + Q[a] + \widetilde{Q}[b]$$

であることを踏まえれば，$\frac{1}{2} u \triangle u = Q[a]$ を示せば十分であることがわかる．この式の左辺において，右の u のみ a を用いた形に展開すれば，クラン積の左対称性より

$$\frac{1}{2} u \triangle u = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\|\xi\|_W} u \triangle (a \triangle \xi) = \frac{1}{\|\xi\|_W} \big(a \triangle \big(u \triangle \xi\big) + \big(u \triangle a\big) \triangle \xi - \big(a \triangle u\big) \triangle \xi \big)$$

となるが，補題 3.1 の乗法表より $u \triangle a = a \triangle u = 0$ であるので，

$$\frac{1}{2} u \triangle u = \frac{1}{\|\xi\|_W}\, a \triangle \big(u \triangle \xi\big)$$

となる．一方，a はある $v \in V^{[1]}$ を用いて $a = r_\xi(v) = v \triangle \xi$ と表せることより，u は

$$u = \frac{2}{\|\xi\|_W}\, a \triangle \xi = \frac{2}{\|\xi\|_W}\, (v \triangle \xi) \triangle \xi = \frac{2}{\|\xi\|_W}\, r_\xi^* \circ r_\xi(v) = \frac{2}{\|\xi\|_W} \cdot \frac{\|\xi\|_W^2}{2} v = \|\xi\|_W\, v$$

となるので，

$$\frac{1}{2}\, u \triangle u = \frac{1}{\|\xi\|_W}\, a \triangle \big(u \triangle \xi\big) = \frac{1}{\|\xi\|_W} \cdot \|\xi\|_W\, a \triangle (v \triangle \xi) = a \triangle a = Q[a]$$

となり，命題が証明された．　□

以降，定理 2.1 の代数的な証明を与える．階数 r についての帰納法を用いる．$r=1$ のときは明らかなので，$r-1$ のときに成立を仮定する．もし $E_1 = \{0\}$ ならば，$Q[E] = Q[E']$ となり帰納法の仮定が使えるので，以降 $E_1 \neq \{0\}$ とする．まず $\nu \in E$ を任意にとり固定する．ξ を ν の E_1 成分とするとき，自然数 n に対して $\nu_n \in E$ を

$$\nu_n = \xi_n + a + b, \qquad \xi_n = \begin{cases} \xi & (\xi \neq 0) \\ \frac{1}{n}\eta & (\xi = 0) \end{cases} \qquad (a \in E_{V^{[1]}},\ b \in E_{V^{[1]}}^{\perp})$$

により定義する．ここで $E_{V^{[1]}} = \mathrm{Image}\, r_{\xi_n}$ であり，$\eta \in E_1$ は $\eta \neq 0$ を満たすもので，一つ取って固定しておく．a, b は η の取り方には依存するが，n には依存していないことに注意する．今 $\xi_n \neq 0$ なので，命題 3.5 より

$$Q[\nu_n] = \rho(\exp L_{t_n c_1} \exp L_{u_n})(c_1 + \widetilde{Q}[b]) \quad \Big(t_n := 2\log\|\xi_n\|_W, \quad u_n := \frac{2}{\|\xi_n\|_W} r_{\xi_n}^*(a)\Big)$$

である．帰納法の仮定より，ある ${}^t(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^{r-1}$ が存在して

$$\widetilde{Q}[b] \in \overline{\rho(H')c'_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \qquad (c'_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \varepsilon_2 c_2 + \cdots + \varepsilon_r c_r)$$

となる．よって，ある点列 $\{h'_n\}_{n=1,2,\dots} \subset H'$ を用いて $\lim_{n\to+\infty} \rho(h'_n)c'_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widetilde{Q}[b]$ とできるので，$h' \in H'$ ならば $\rho(h')c_1 = c_1$ となることに注意すれば

$$c_1 + \widetilde{Q}[b] = \lim_{n\to+\infty} \bigl(c_1 + \rho(h'_n)c'_{\boldsymbol{\varepsilon}}\bigr) = \lim_{n\to+\infty} \rho(h'_n)\bigl(c_1 + c'_{\boldsymbol{\varepsilon}}\bigr)$$

である．明らかに $\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi$ であるので，$h_n := (\exp L_{t_n c_1})(\exp L_{u_n})h'_n \in H$ および $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ とおけば，Q の連続性より

$$Q[\nu] = \lim_{n\to+\infty} Q[\nu_n] = \lim_{n\to+\infty} \rho(\exp L_{t_n c_1} \exp L_{u_n})\rho(h'_n)(c_1 + c'_{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \lim_{n\to+\infty} \rho(h_n)c_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

であるので，$Q[\nu] \in \overline{\rho(H)c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ となる．

最後に $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^r$ が η の取り方に依存しないことをいう必要がある．非零ベクトル $\eta_1, \eta_2 \in E_1$ をとり，

$$E_k(\eta_i) := \mathrm{Image}\,(r_{\eta_i}|_{V_{k1}}) \quad (i = 1, 2)$$

とおくと，補題 3.3 の証明と同様にして，各 η_i に対して $E_k(\eta_i)$ は $r_{\eta_i}|_{V_{k1}}$ を通して V_{k1} と線型同型になるので，したがって $\dim E_k(\eta_1) = \dim E_k(\eta_2)$ である．定理 1.1 のアルゴリズムより，$\boldsymbol{\varepsilon}$ はこの次元情報のみによって決まるので，これは η の取り方には依存しない． □

参考文献

[1] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), 317–348.

[2] H. Ishi, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 161–186.

[3] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory **11** (2001), 155–171.

[4] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z. **259** (2008), 697–711.

[5] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, J. Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.

[6] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones and their Laplace transforms*, J. Math. Soc. Japan **70** (2018), 323—342.

[7] I. I. Piatetski-Shapiro, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon and Breach, New York, 1969.

[8] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.