The Schur polynomials in all nth primitive roots of unity

日高昌樹
Masaki Hidaka

鹿児島大学理学部　伊藤稔 *
Minoru Itoh
Faculty of Science, Kagoshima University

1　序文

自然数 n が 2 以外の素因数を高々二つしかもたないとき, 1 の原始 n 乗根における Schur 多項式の値は 1, 0, -1 のいずれかにしかならない. このことを報告する.

この主張における「2 以外の素因数を高々二つしかもたない」という n の条件は比較的ゆるく, たとえば 105 $(= 3 \cdot 5 \cdot 7)$ 未満の自然数はすべて該当する. また Schur 多項式を定める分割には何の条件もない. 非常に多くの自然数 n と分割に対して, この値が 1, 0, -1 にかぎられるのは興味深い.

主結果は次のとおりである:

定理 1.1. 自然数 n が 2 以外の素因数を高々二つしかもたない $(*)$ とき, 任意の分割 λ に対して, $s_\lambda(\omega_1, \ldots, \omega_d) \in \{1, 0, -1\}$ である. ここで, s_λ は λ に対応する Schur 多項式, $\omega_1, \ldots, \omega_d$ は 1 の原始 n 乗根すべてである.

この定理は, 2 系列の特別な分割に対してはすでに知られていた.

1 つは $\lambda = (1^k)$ の場合である. この場合は s_λ は基本対称式である. 1 の原始 n 乗根たちの基本対称式は, 符号を無視すると n 次の円分多項式 $\Phi_n(x)$ の係数に等しい. つまり, この場合は, 定理 1.1 は「n が $(*)$ の条件をみたすとき, $\Phi_n(x)$ の係数には $1, 0, -1$ しか現れない」と言い換えられる. これは有名な事実であり, 100 年以上前に, A. Migotti が [Mi] で証明を与えている.

* 本研究は科研費（課題番号:16K05067）の助成を受けたものである.

もう 1 つは $\lambda = (k)$ という分割の場合である．この場合は s_λ は完全斉次対称式である．1 の原始 n 乗根たちの完全斉次対称式は, n 次の円分多項式の逆数 $\Phi_n(x)^{-1}$ の係数と等しい．つまり, この場合は, 定理 1.1 は「n が $(*)$ の条件をみたすとき, $\Phi_n(x)^{-1}$ の係数には $1, 0, -1$ しか現れない」と言い換えられる．これは比較的最近の 2009 年に P. Moree [Mo] が与えた結果にあたる．

このような特別な分割の場合に知られていた結果を, 一般の分割に拡張したことになる．

2　ユニモジュラー系

定理 1.1 の証明で鍵になるのはユニモジュラー系 (unimodular system of vectors) という概念である ([DG]).

この概念を説明する前に, ベクトルの組の「行列式」について整理しておこう．B を n 次元ベクトル空間 V の n 個のベクトルの集合とする．V の基底を固定して, B の各元に対応する数ベクトルをまとめて行列を作り, その行列式を考える．この値はベクトルの並べる順序による符号の違いを除いて決まる．つまり V の基底を決めれば $[\det B]$ という値が決まることになる（ただし $[a] = \{a, -a\}$ とする）．

このことに注意して, ユニモジュラー系という概念を次のように定める:

定義 2.1. ベクトル空間 V の有限部分集合 X（ただし $0 \notin X$, $\langle X \rangle = V$）について「$[\det B]$ は V の基底をなす $B \subset X$ の選び方によらない」という条件がなりたつとき X はユニモジュラー系であるという．

[DG] におけるユニモジュラー系の定義では, $0 \notin X$ と $\langle X \rangle = V$ という条件は課していないが, ここではこれらの条件も課しておく．

定義 2.1 における「$[\det B]$ は V の基底をなす $B \subset X$ の選び方によらない」という条件は, 言い換えると「$\mathbb{Z}B$ という集合は, V の基底をなす $B \subset X$ の選び方によらない」と同じことである．さらに「適切に基底を選ぶと totally unimodular matrix（任意の小行列式が 1, 0, -1 のいずれかにしかならない行列）の列全体と実現できる」と言い換えることもできる．

たとえば A 型のルート系はユニモジュラー系の例となっている（実際はさらに極大なユニモジュラー系である）．

3 主定理を示すための 4 つの命題

主結果である定理 1.1 は, 以下述べる命題 3.1–3.4 （いずれもあるベクトルの集合がユニモジュラー系をなすという主張）を通じて証明できる. 定理 1.1 は命題 3.1 に帰着され, さらに命題 3.1 は命題 3.2, 命題 3.3, 命題 3.4 に順々に帰着されるのである:

$$\text{定理 } 1.1 \Leftarrow \text{命題 } 3.1 \Leftarrow \text{命題 } 3.2 \Leftarrow \text{命題 } 3.3 \Leftarrow \text{命題 } 3.4.$$

結局は命題 3.4 を証明すればよいことになる.

命題 3.1. n が $(*)$ をみたすとき, 数ベクトルの集合

$$\Omega_n = \left\{ \begin{pmatrix} \omega_1^k \\ \vdots \\ \omega_d^k \end{pmatrix} \,\middle|\, k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

はユニモジュラー系をなす.

命題 3.2. n が $(*)$ をみたすとき, 1 の n 乗根全体の集合

$$Z_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^n = 1 \right\}$$

は $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ においてユニモジュラー系をなす.

ただし ζ_n は 1 の原始 n 乗根で, 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ をここでは $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と見なしている.

命題 3.3. (1) p が素数なら, Z_p は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ においてユニモジュラー系をなす.
(2) p と q が素数なら,

$$Z_p \otimes Z_q = \left\{ x \otimes y \,\middle|\, x \in Z_p,\ y \in Z_q \right\}$$

は $\mathbb{Q}(\zeta_p) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_q)$ においてユニモジュラー系をなす.

命題 3.4. (1) X が V の基本零和系ならば, X は V においてユニモジュラー系をなす.
(2) X, Y がそれぞれ V, W の基本零和系ならば,

$$X \otimes Y = \left\{ x \otimes y \,\middle|\, x \in X,\ y \in Y \right\}$$

は $V \otimes W$ においてユニモジュラー系をなす.

ここで $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間 V の有限部分集合 X について, 次の条件をみたすとき X は V の基本零和系であるということにする:

$$|X| = \dim(V) + 1, \qquad \langle X \rangle = V, \qquad \sum X = 0.$$

ただし $\sum X = \sum_{x \in X} x$ とする.

たとえば $e_1, \ldots, e_n$ が V の基底のとき, $\{e_1, \ldots, e_n, \sum_{i=1}^n e_i\}$ は V の基本零和系である. 逆に V の基本零和系はかならずこの形で表される. V の任意の基本零和系は線型同型写像で互いに移りあうこともすぐわかる.

また p が素数のとき, Z_p は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の基本零和系である. このことに注意すると, 命題 3.4 は命題 3.3 の一般化であることがわかる.

主定理は命題 3.1, 3.2, 3.3 を通じて基本零和系の性質である命題 3.4 に帰着されるが, そのくわしい過程は次節で述べる. また命題 3.4 の証明は次々節で述べる. 命題 3.4 の (1) は簡単に証明できるが, (2) はグラフの言葉を用いて証明することになる.

4　主定理の命題 3.4 への帰着

主定理は, 命題 3.1, 3.2, 3.3 を通じて, 基本零和系の性質である命題 3.4 に帰着できる. この節ではその過程を述べる.

4.1　定理 1.1 $\Leftarrow$ 命題 3.1

まず, 定理 1.1 は命題 3.1 に帰着される. 実際, 命題 3.1 の仮定の下で定理 1.1 は次のように証明できる.

Schur 多項式 s_λ は Vandermonde 型の行列式 a_μ の比として

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_d) = a_{\delta+\lambda}(x_1, \ldots, x_d)/a_\delta(x_1, \ldots, x_d)$$

と表される. ただし $\delta = (d-1, d-2, \ldots, 1, 0)$ であり, また $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対して, d 変数の多項式 a_μ を次のように定める:

$$a_\mu(x_1, \ldots, x_d) = \det(x_i^{\mu_j})_{1 \leq i,j \leq d}.$$

この a_μ に, $\omega_1, \ldots, \omega_d$ を代入したものは, Ω_n から d 個選んだベクトルの組の行列式に等しい. すなわち, 適切に $v_1, \ldots, v_d \in \Omega_n$ を選ぶと次が成立する:

$$a_\mu(\omega_1, \ldots, \omega_d) = \det(v_1, \ldots, v_d).$$

命題 3.1 を仮定すると, n が $(*)$ をみたすとき, この値は符号を除いて一定である（さもなくば 0 になる）. $a_\delta(\omega_1, \ldots, \omega_d) \neq 0$ もすぐわかる. これらから定理 1.1 がわかる.

4.2 命題 3.1 $\Leftarrow$ 命題 3.2

命題 3.1 は自然な線型同型写像を通じて命題 3.2 に帰着される. このことを示そう.

Ω_n から生成される $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\langle \Omega_n \rangle$ は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} \mapsto z_1$$

という対応で円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ と同型である（$\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間として）. そしてこの同型写像を通じて Ω_n は Z_n と同一視できる. よって命題 3.1 は命題 3.2 と同値な主張である.

4.3 命題 3.2 $\Leftarrow$ 命題 3.3

命題 3.2 も自然な線型同型写像を通じて命題 3.3 に帰着される.

n が $n = p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$ と素因数分解されるとき, $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ は

$$\mathbb{Q}(\zeta_{p_1}) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{p_k})$$

の $p_1^{l_1-1} \cdots p_k^{l_k-1}$ 個の直和と $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間として自然に同一視できる. またこの同型を通じて Z_n は

$$\bigsqcup Z_{p_1} \otimes \cdots \otimes Z_{p_k}$$

と同一視できる. このことは次の補題の (1) と (2) を組み合わせるとわかる:

補題 4.1. (1) 自然数 a と b が互いに素のとき, 線型同型写像 $\mathbb{Q}(\zeta_{ab}) \to \mathbb{Q}(\zeta_a) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_b)$ で Z_{ab} の像が $Z_a \otimes Z_b$ となるものが存在する.
(2) 素数 p に対して, 線型同型写像 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^l}) \to \mathbb{Q}(\zeta_p)^{\oplus p^{l-1}}$ で Z_{p^l} の像が $\bigsqcup Z_p$ となるものが存在する.

証明. (1) 次のようなベクトル空間のあいだの対応を考える:

$$\mathbb{Q}(\zeta_a) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_b) \to \mathbb{Q}(\zeta_{ab}), \qquad x \otimes y \mapsto xy.$$

これが線型同型写像を与えて, $Z_a \otimes Z_b$ の像が Z_{ab} となることはすぐにわかる.
(2) $j \in 0, 1, \ldots, p^{l-1} - 1$ に対して, $\mathbb{Q}(\zeta_p)^{(j)}$ を $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ のコピーとする（また $x \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$

に対応する $\mathbb{Q}(\zeta_p)^{(j)}$ の元を $x^{(j)}$ と表す）．この上で, 次のようなベクトル空間のあいだの対応を考える:

$$\bigoplus_{j=0}^{p^{l-1}-1} \mathbb{Q}(\zeta_p)^{(j)} \to \mathbb{Q}(\zeta_{p^l}), \qquad x^{(j)} \mapsto \zeta_{p^l}^j x.$$

これは線型同型写像を与える（次元が等しいので, 全射になることを確認すればわかる）．$\bigsqcup_{j=0}^{p^{l-1}-1} Z_p^{(j)}$ の像が Z_{p^l} であることはすぐわかる. □

次の補題も鍵となる:

補題 4.2. X, Y がそれぞれ V, W のユニモジュラー系のとき, $X \sqcup Y$ は $V \oplus W$ のユニモジュラー系となる.

この補題から, $Z_{p_1} \otimes \cdots \otimes Z_{p_k}$ がユニモジュラー系なら, Z_n もユニモジュラー系である．$p = 2$ に対応する円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_2)$ は $\mathbb{Q}$ と等しく, $Z_2 = \{1, -1\}$ ということに注意すると, とくに命題 3.3 から命題 3.2 が導かれる.

4.4　命題 3.3 $\Leftarrow$ 命題 3.4

p が素数のとき Z_p は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の基本零和系である．よって命題 3.4 は命題 3.3 の一般化である.

5　命題 3.4 の証明

前節の議論で, 主定理は命題 3.4 に帰着できた．今節では, この命題 3.4 を証明しよう．まず節 5.1 で命題 3.4 (1) の証明を片付けて, 残りの節 5.2, 5.3 で命題 3.4 (2) をグラフの言葉を用いて証明する.

5.1　基本零和系はユニモジュラー系

まず命題 3.4 (1), つまり基本零和系はユニモジュラー系であることを示す.

命題 3.4 (1) の証明.　基本零和系 X の部分集合 X_1, X_2 で V の基底になるものを任意にとる（ただし $X_1 \neq X_2$ とする）．X の部分集合で V の基底になるものは $X \smallsetminus \{x\}$ という形のものにかぎられるので, 次をみたす $x_1, x_2 \in X$ がとれる:

$$X_1 = X \smallsetminus \{x_1\}, \qquad X_2 = X \smallsetminus \{x_2\}.$$

$[\det X_1] = [\det X_2]$ となることは次の計算でわかる．$A = X \setminus \{x_1, x_2\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
[\det X_1] &= [\det(X \setminus \{x_1\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{x_2\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{x_2 + \sum A\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{-x_1\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{x_1\})] \\
&= [\det(X \setminus \{x_2\})] \\
&= [\det X_2].
\end{aligned}$$

第 3 の等号の変形は, 行列式の基本変形である．また第 4 の等号では次が効いている:

$$x_1 + x_2 + \sum A = \sum X = 0. \qquad \square$$

5.2　同値関係の主張に帰着

以降は命題 3.4 (2) を証明しよう．つまり X と Y がそれぞれ V と W の基本零和系のとき, $X \otimes Y$ が $V \otimes W$ においてユニモジュラー系であることを示す.

V と W の次元をそれぞれ M, N として, $X \otimes Y$ の次のような部分集合族 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{B}$ を考える（$\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ となる）:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \bigl\{S \subset X \otimes Y \bigm| S \text{ の元の個数は } MN\bigr\}, \\
\mathcal{B} &= \bigl\{S \subset X \otimes Y \bigm| S \text{ は } V \otimes W \text{ の基底 }\bigr\}.
\end{aligned}$$

この $\mathcal{S}$ に $S_1 \sim S_2$ のとき $[\det S_1] = [\det S_2]$ となるような同値関係を定める．具体的には, まず $\mathcal{H}$ を次のようにおく:

$$\mathcal{H} = \bigl\{X \otimes y \bigm| y \in Y\bigr\} \cup \bigl\{x \otimes Y \bigm| x \in X\bigr\}.$$

ただし $X \otimes y$ と $x \otimes Y$ は次のような意味である:

$$X \otimes y = \bigl\{x \otimes y \bigm| x \in X\bigr\}, \qquad x \otimes Y = \bigl\{x \otimes y \bigm| y \in Y\bigr\}.$$

すると任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して $\sum H = 0$ となる．実際 $H = X \otimes y$ のとき

$$\sum H = \sum (X \otimes y) = (\sum X) \otimes y = 0 \otimes y = 0.$$

$H = x \otimes Y$ のときも同様である．この準備の下で, $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について, 次をみたす $H \in \mathcal{H}$ と $s_1, s_2 \in H$ が存在するときに, $S_1 \overset{\cdot}{\sim} S_2$ と定める:

$$H \subset S_1 \sqcup \{s_2\} = S_2 \sqcup \{s_1\}.$$

すると $S_1 \stackrel{\cdot}{\sim} S_2$ のとき $[\det S_1] = [\det S_2]$ となる．実際 A を

$$A = S_1 \setminus \{s_1\} = S_2 \setminus \{s_1\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
[\det S_1] &= [\det(A \sqcup \{s_1\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{s_1 + \textstyle\sum(H \setminus \{s_1, s_2\})\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{-s_2\})] \\
&= [\det(A \sqcup \{s_2\})] \\
&= [\det S_2].
\end{aligned}$$

ここで第二の等号は $H \setminus \{s_1, s_2\} \subset A$ に注意して行列式の基本変形をしている．また第三の等号は次が効いている:

$$s_1 + s_2 + \sum(H \setminus \{s_1, s_2\}) = \sum H = 0.$$

この関係 $\stackrel{\cdot}{\sim}$ から生成される $\mathcal{S}$ 上の同値関係 $\sim$ を考えよう．次はここまでの議論からすぐわかる:

命題 5.1. $S_1 \sim S_2$ をみたす $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ に対して, $[\det S_1] = [\det S_2]$ が成立する．とくに S_1 の一次独立性と S_2 の一次独立性は一致する．

$X \otimes Y$ がユニモジュラー系であることを示すためには, 次の命題を証明すればよいことになる:

命題 5.2. $\mathcal{S}$ 上の同値関係 $\sim$ に関して, $\mathcal{B}$ は一つの同値類となる．

5.3 補集合をとってグラフで考える

このまま $\mathcal{S}$ で議論するよりも, $X \otimes Y$ における補集合をとって, 次の集合族について議論する方がわかりやすい:

$$\mathcal{S}' = \{S^c \mid S \in \mathcal{S}\}, \qquad \mathcal{B}' = \{S^c \mid S \in \mathcal{B}\}.$$

ここで S^c は $X \otimes Y$ における S の補集合を意味する．$X \otimes Y$ の大きさは

$$|X \otimes Y| = (M+1)(N+1) = MN + M + N + 1$$

だから, $\mathcal{S}'$ は, $X \otimes Y$ の $(M+N+1)$ 個の点からなる部分集合全体ということになる．

$\mathcal{S}'$ 上の同値関係を, $S_1 \sim S_2$ のとき $S_1^c \sim S_2^c$ と定めよう．つまり S_1 と S_2 が $\mathcal{S}$ において同値のときに, S_1^c と S_2^c が $\mathcal{S}'$ において同値であると定める.

すでに主定理を命題 5.2 に帰着させたが, これでさらに次の命題に言い換えられることになる:

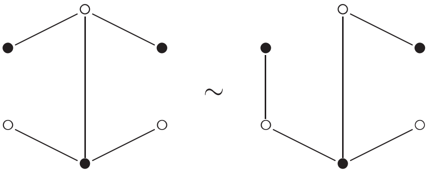
命題 5.3. $\mathcal{S}'$ 上の同値関係 $\sim$ に関して, $\mathcal{B}'$ は一つの同値類となる.

$\mathcal{S}'$ 上の同値関係は次のように言い換えられる．まず次をみたす $H \in \mathcal{H}$ と $s_1, s_2 \in H$ が存在するときに, $S_1^c \overset{\cdot}{\sim} S_2^c$ と定める:

$$H \cap S_1^c = \{s_1\}, \qquad H \cap S_2^c = \{s_2\}, \qquad S_1^c \smallsetminus \{s_1\} = S_2^c \smallsetminus \{s_2\}.$$

そしてこの関係 $\overset{\cdot}{\sim}$ から生成される $\mathcal{S}'$ 上の同値関係が $\sim$ ということになる.

これはさらにグラフの言葉でわかりやすく言い換えられる．$X \otimes Y$ は $X \times Y$ と同一視できるが, これをさらに X と Y を頂点集合とする完全二部グラフと同一視しよう．これで $\mathcal{S}'$ は, X と Y を頂点集合とする二部グラフのうち辺の個数が $M + N + 1$ であるもの全体ということになる．そして $\mathcal{S}'$ の同値関係は「leaf edge の取り替えを繰り返して移り合うものは同値」と言い換えられる．たとえば次の二つのグラフは同値である:



左辺のグラフの左上の黒い頂点は一つの辺しかもたない．このような頂点を葉 (leaf) と呼ぶ．この葉から出ている辺 (leaf edge) を, 同じ葉から出ている別の辺に取り替えたのが右辺のグラフである．上の説明で言えば, s_1 は S_1^c の leaf edge であり, これを s_2 という leaf edge に取り替えたのが S_2^c ということになる.

このようにグラフに言い換えると, 実は $\mathcal{B}'$ は, X と Y を頂点集合とする二部グラフの木全体の集合 $\mathcal{T}(X, Y)$ と一致することになる:

命題 5.4. $\mathcal{B}' = \mathcal{T}(X, Y)$ が成立する.

命題 5.3 や命題 5.4 を示す前に, 木に関する次の基本的な事実を確認しておく ([D]). $\mathcal{T}(X, Y)$ が $\mathcal{S}'$ の部分集合であることはこれからわかる:

補題 5.5. r 点集合を頂点集合とするグラフ E について次は同値である:

(1) E は木である.

(2) E は連結で $|E| = r+1$.

(3) E は閉路をもたず $|E| = r+1$.

まず命題 5.4 の片方の包含関係は, 次を利用して証明できる:

補題 5.6. $\mathcal{B}'$ の元で閉路をもつものは, 孤立点をもつグラフに同値.

証明（概略のみ）. $\mathcal{B}'$ の元で閉路をもつものを考える. 補題 5.5 から, これは非連結であり, 閉路をもつ連結成分 V_0 と閉路をもたない連結成分 V_1 が存在する（ここで V_0 と V_1 は頂点の集合とする. つまり $X \sqcup Y$ の部分集合である）. 連結成分 V_1 は, 孤立点でなければ葉 v をもつ. この頂点 v から出ている leaf edge を, v と V_0 の元を結ぶ辺に取り替える. すると取り替えたあとのグラフでは, $V_0 \sqcup \{v\}$ と $V_1 \setminus \{v\}$ が連結成分となる. 言わば, V_1 から v が V_0 に移動したことになる. この取り替えを繰り返すと, V_1 の頂点数が一つずつ減っていくことになり, いずれは孤立点になる. □

命題 5.4 の $(\subset)$ の証明. 任意の $S^c \in \mathcal{B}'$ をとる. $S^c \notin \mathcal{T}(X, Y)$ と仮定すると, 補題 5.5 から S^c は閉路をもつ. 補題 5.6 より S^c は孤立点をもつグラフ R^c と同値. すると $H \subset R$ となる $H \in \mathcal{H}$ が存在する. H は一次従属だから, R も一次従属となる. よって命題 5.1 から S も一次従属となり, $S \in \mathcal{B}$ と矛盾する. □

$\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}(X, Y)$ がわかったから, 命題 5.3 を示すには, $\mathcal{T}(X, Y)$ の任意の 2 元（つまり $\mathcal{S}'$ の任意の木）が互いに同値であることを示せばよい. これは次のようにして証明できる（またこれは命題 5.4 の $(\supset)$ の証明にもなる）.

命題 5.3 の証明（概略のみ）. $x \in X$ と $y \in Y$ に対して, $(x \otimes Y) \cup (X \otimes y)$ は $\mathcal{T}(X, Y)$ の元であり, x と y 以外の頂点はすべて葉である. このような二つの頂点以外がすべて葉であるような二部グラフをここでは標準グラフと呼ぶことにしよう（言わば二部グラフにおける星である）. $\mathcal{T}(X, Y)$ の任意の元は leaf edge の取り替えを繰り返して, ある標準グラフに変形できる. また任意の二つの標準グラフは leaf edge の取り替えを繰り返して移りあうこともわかる. このように標準グラフを経由することで, $\mathcal{T}(X, Y)$ の任意の 2 元が同値であることがわかる. □

注意. A 型のルート系がユニモジュラー系であることも同じような議論で証明できる. 符号のみ異なるベクトルを同一視することにすると, A_n 型のルート系は完全グラフ K_{n+1} と自然に同一視できる. $\mathcal{B}$ を木全体, $\mathcal{H}$ をサイクル全体と置き換えると, ほとんど同じ議論で説明ができる.

6 マトロイドの理論との関係について

前節の議論は, マトロイドの基本的な理論と重複する部分があるように見える.

連結なグラフに対して, 木となる部分グラフを基底と定めることで, 辺集合はマトロイドをなす. これをグラフ的マトロイド (graphic matroid) という. またグラフ的マトロイドの双対マトロイドを補グラフ的マトロイド (cographic matroid) という. 言い換えると, 補グラフが木となる部分グラフを基底と定めるマトロイドである.

前節で議論した $X \otimes Y$ は, 完全二部グラフから決まる補グラフ的マトロイドと同型である. また A_n 型のルート系は（符号のみ異なるベクトルを同一視すると）完全グラフ K_{n+1} から決まるグラフ的マトロイドと同型である. そして, グラフ的マトロイドや補グラフ的マトロイドは正則マトロイドであり, ゆえにユニモジュラー系で実現できることがわかっている ([O]).

前節の議論は, 一見このマトロイドの理論に含まれてしまうように見える. しかし今述べたことからわかるのは, $X \otimes Y$ があるユニモジュラー系とマトロイドとして同型であるということだけで, これは主定理のために必要とした命題 3.4 (2) （$X \otimes Y$ 自体がユニモジュラー系である）よりも弱い. そこで本稿ではこの命題 3.4 (2) を直接的に証明した.

参考文献

[DG] V. Danilov and V. Grishukhin, *Maximal unimodular systems of vectors*, European J. Combin. **20** (1999), no. 6, 507–526.

[D] R. Diestel, Graph theory. Fifth edition, Graduate Texts in Mathematics, 173. Springer, Berlin, 2017.

[H] 日高昌樹, 1 の原始 n 乗根におけるシューア多項式の値, 鹿児島大学大学院理工学研究科修士論文 (2019).

[Mi] A. Migotti, *Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung*, S.-B. der Math.-Naturwiss. Classe der Kaiser. Akad. der Wiss., Wien **87** (1883), 7–14.

[Mo] P. Moree, *Inverse cyclotomic polynomials*, J. Number Theory, **129** (2009), 667–680.

[O] J. Oxley, Matroid theory. Second edition, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 21. Oxford University Press, Oxford, 2011.