Pieri type formulas and difference relations for interpolation Jack polynomials

神戸大学 理学研究科　渋川 元樹 *
Genki Shibukawa†
Graduate School of Science, Kobe University

Abstract

Jack 多項式についての Pieri 公式, 二項展開公式等を用いて, 補間 Jack 多項式 (shifted Jack 多項式) の Pieri 公式 (及び差分方程式) を導出する.

1 Introduction –一変数–

補間 Jack 多項式 (interpolation or shifted Jack polynomials) は Sahi [Sa], Knapp-Sahi [KS], Okounkov-Olshanski [OO1] らにより導入された shifted Schur 多項式の, いわゆる factorial Schur [M1] とは別の, 連続変形 (Jack 版) である. shifted Schur 多項式は元々は一般線型群の普遍包絡環の中心元 (特に Capelli 元) の固有値 (Harish-Chandra image) という表現論的由来があるものだが [OO2], 補間 Jack 多項式はそういった起源とは独立に, 下降ベキ, あるいは二項係数の多変数類似として, Macdonald あるいは Koornwinder といった多変数超幾何函数や量子可積分系に由来する多変数直交多項式系の明示公式 (binomial formulas) に現れてくる. 補間 Jack 多項式に関しては Knop-Sahi が高階の差分方程式を導出している [KS]. 更にもう 1 パラメータ変形した補間 Macdonald 多項式というクラスが導入されており, Okounkov により補間 Macdonald 多項式についての高階差分方程式が与えられている [O1]. しかし Okounkov の一連の公式についての証明 (“Idea of Proof”) はいくぶん不明瞭であり, Pieri 公式は述べておらず, また補間 Jack 多項式への退化は与えられていない (Okounkov の結果の素直な退化極限では補間 Jack 多項式の差分方程式は得られない).

最近, 著者は A 型の Macdonald 多項式の有理 (加法) 差分版の 2 (or 1) パラメータ変形とみなせる一連の離散型の多変数直交多項式系 (多変数 Meixner, Charlier , Krawtchouk 多項式) を補間 Jack 多項式を用いて導入し, 母函数, 直交性, 差分方程式 (or 隣接関係式) といった基本的性質を与えた. こうした先行研究を踏まえ, これらの離散多変数直交多項式系の満たす高階の差分方程式系の研究を行っているが, その研究過程で後述する Jack 多項式の twisted Pieri 公式と呼ばれる一連の公式が得られ, その応用として補間 Jack 多項式の

* g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp
† 本研究は科研費 (課題番号: 18J00233) の助成を受けたものである.

Pieri 公式 (あるいは差分方程式) を導出した．本稿はその一連の結果を, 多変数 Meixner 多項式等の元の文脈とは独立に述べたものである．なお, 本稿は RIMS 共同研究「可積分系数理の深化と展開」の講究録と内容が重複する部分があることを予めお断りしておく．一応こちらは Pieri 公式がメイン, 「可積分系数理の深化と展開」の方は差分方程式がメインの構成になっている (証明はメインの方のみ述べる) ので適宜ご参照いただきたい.

まず plot type として, 殆ど自明ではあるが, 一変数の結果からはじめよう．一変数の補間 Jack 多項式 $P_m^{\mathrm{ip}}(z)$ を, 次の 2 条件 $(1)^{\mathrm{ip}}$, $(2)^{\mathrm{ip}}$ を満たす z の m 次多項式として定める.

$$
\begin{aligned}
&(1)^{\mathrm{ip}}\ P_k^{\mathrm{ip}}(m) = 0, \quad \text{unless } k < m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\\
&(2)^{\mathrm{ip}}\ P_m^{\mathrm{ip}}(z) = z^m + (\text{lower terms}).
\end{aligned}
$$

標題の補間 Jack 多項式の Pieri 公式, 差分方程式は次のようなものである.

$$
zP_k^{\mathrm{ip}}(z) = P_{k+1}^{\mathrm{ip}}(z) + kP_k^{\mathrm{ip}}(z), \tag{1}
$$

$$
kP_k^{\mathrm{ip}}(z) = zP_k^{\mathrm{ip}}(z) - zP_k^{\mathrm{ip}}(z-1). \tag{2}
$$

すなわち, Pieri 公式 (1) は変数 z を固定した次数 k に関する隣接関係式であり, 差分方程式 (2) は次数 k を固定した変数 z に関する差分の関係式である．これらを多変数化するのが, 本稿の目的である．一変数の場合は, 補間 Jack 多項式が下降ベキ

$$
P_m^{\mathrm{ip}}(z) = z(z-1)\cdots(z-m+1)
$$

そのものなので, (1), (2) 共に容易にわかるが, ここでは一見回りくどいが多変数にも通用する方法で証明してみよう.

非負整数 m について

$$
\Phi_m(z) := z^m, \quad \Psi_m(z) := \frac{\Phi_m(z)}{P_m^{\mathrm{ip}}(m)} = \frac{z^m}{m!}
$$

とおき, 一階の微分作用素を

$$
E_m(z) := z^m \partial_z
$$

とする．必要となるのは以下の 5 種の公式である.

1. 関口作用素 (一変数ではただの Euler 作用素のみ)

$$
(z\partial_z)\Phi_m(z) = \Phi_m(z)m, \tag{3}
$$

$$
(z\partial_z)\Psi_m(z) = \Psi_m(z)m. \tag{4}
$$

2. **Jack 多項式の Pieri 公式**

$$
\partial_z\Phi_m(z) = \Phi_{m-1}(z)m, \tag{5}
$$

$$
\partial_z\Psi_m(z) = \Psi_{m-1}(z), \tag{6}
$$

$$
z\Phi_m(z) = \Phi_{m+1}(z), \tag{7}
$$

$$
z\Psi_m(z) = \Psi_{m+1}(z)(m+1). \tag{8}
$$

3. **二項公式 (binomial formula)**

$$\Phi_x(1+z) = \sum_{0\le k\le x} \binom{x}{k} \Phi_k(z) = \sum_{0\le k\le x} \frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)} \Psi_k(z). \tag{9}$$

ただし x は非負整数.

以上の 3 つは良く知られているが, これに併せて次が必要となる.

4. **Mysterious summation**

$$(x+1) - x = 1. \tag{10}$$

5. **Jack 多項式の twisted Pieri 公式**

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z\right] \Phi_k(z) = \Phi_{k-1}(z)k, \tag{11}$$

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z\right] \Psi_k(z) = \Psi_{k-1}(z). \tag{12}$$

ただし, ad は $\mathbb{C}[z, \partial_z]$ における通常の adjoint

$$\mathrm{ad}\ (A)(B) := AB - BA$$

である.

一変数の場合, (10), (11), (12) はほぼ自明だが, これも多変数用の証明をしておこう. まず 4. は, Pieri 公式 (5), (7) より

$$[\partial_z, z]\Phi_x(z) = \Phi_x(z)(x+1) - \Phi_x(z)x = ((x+1)-x)\Phi_x(z).$$

他方, 作用素としての交換関係 $[\partial_z, z] = 1$ より

$$[\partial_z, z]\Phi_x(z) = 1 \cdot \Phi_x(z)$$

となるので, $\Phi_x(z)$ についての係数比較より結論を得る.
同様に 5. については, 関口作用素 (3), (4) と Pieri 公式 (5), (6) より

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z\right] \Phi_k(z) &= \partial_z((z\partial_z)\Phi_k(z)) - (z\partial_z)(\partial_z\Phi_k(z)) \\
&= (\partial_z\Phi_k(z))k - (z\partial_z)\Phi_{k-1}(z))k \\
&= (\Phi_{k-1}(z)k - \Phi_{k-1}(z)(k-1))k \\
&= (k-(k-1))\Phi_k(z)k.
\end{aligned}$$

ここで mysterious summation (10) を使えば結論を得る.

以上の結果から補間 Jack 多項式 $P_k^{\mathrm{ip}}(z)$ の Pieri 公式 (1)(と差分方程式 (2)) を導出できる．まず多項式の関係式なので任意の整数 x について示せば十分である．ついで $e^{\pm\partial_z}$ が z の ± 1 シフト作用素であることに注意すると

$$\begin{aligned}(z\partial_z)\Phi_x(1+z) &= (z\partial_z)e^{\partial_z}\Phi_x(z)\\ &= e^{\partial_z}[e^{-\mathrm{ad}\ (\partial_z)}(z\partial_z)]\Phi_x(z).\end{aligned}$$

よって, twisted Pieri (11) と二項公式 (9) より

$$\begin{aligned}(z\partial_z)\Phi_x(1+z) &= e^{\partial_z}\sum_{p=0}^{1}\left[\frac{(-\mathrm{ad}\ (\partial_z))^p}{p!}(z\partial_z)\right]\Phi_x(z)\\ &= e^{\partial_z}(\Phi_x(z)x-\Phi_{x-1}(z)x)\\ &= x\Phi_x(1+z)-x\Phi_{x-1}(1+z)\\ &= \sum_{k=0}^{x}\left(x\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)}-x\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x-1)}{P_k(1)}\right)\Psi_k(z). \qquad (13)\end{aligned}$$

他方, 先に二項公式 (9) を使ってから関口作用素 (4) を当てると

$$(z\partial_z)\Phi_x(1+z)=\sum_{k=0}^{x}\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)}(z\partial_z)\Psi_k(z)=\sum_{k=0}^{x}k\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)}\Psi_k(z). \qquad (14)$$

最後に (13) と (14) において $\Psi_k(z)$ の係数比較をして, Pieri 公式

$$kP_k^{\mathrm{ip}}(x)=xP_k^{\mathrm{ip}}(x)-xP_k^{\mathrm{ip}}(x-1)$$

を得る．差分方程式 (2) についても同様である．

本稿ではこの, あるいは一変数においてすら知られていなかったかもしれない (?) 論法を多変数化し, 一般の r 変数の補間 Jack 多項式についての Pieri 公式 (と差分方程式) を導出する．そのいくつかの応用として Jack 多項式の核函数の intertwining 関係式等を述べる．主結果の証明は, 上述の論法で用いた必要な公式に関してはその多くの多変数類似が既知であるので, 殆ど一変数と parallel にできる．しかし Pieri 公式を $\Phi_k(z)$ 版と $\Psi_k(z)$ 版の 2 種類用意しなければならない点が幾分面倒であり, 更にそれらを用いて twisted Pieri 公式 (11) と (12) の多変数類似を導出する step が一番の難所となる．正確にいえば, 多変数 Meixner 多項式の高階差分方程式の研究過程でまず twisted Pieri 公式が得られ, その応用として補間 Jack 多項式の Pieri 公式と差分方程式が得られたというのが研究の経緯である．

2 Preliminaries

ここでは [FK], [Ka], [Ko], [L], [M2], [St], [VK] から必要となる多変数類似について list する．まず r を正の整数, α, d を複素数として,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \{\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r \mid m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0\}, \\
\delta &:= (r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0) \in \mathcal{P}, \\
e_{r,k}(\mathbf{z}) &:= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} z_{i_1} \cdots z_{i_k} \quad (k = 1, \dots, r), \quad e_{r,0}(\mathbf{z}) := 1, \\
m_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) &:= \sum_{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathfrak{S}_r.\mathbf{m}} z_1^{\lambda_1} \cdots z_r^{\lambda_r}, \quad \mathfrak{S}_r.\mathbf{m} := \left\{(m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(r)}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid \sigma \in \mathfrak{S}_r\right\}, \\
E_k(\mathbf{z}) &:= \sum_{j=1}^r z_j^k \partial_{z_j}, \quad D_k(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^r z_j^k \partial_{z_j}^2 + d \sum_{1 \leq j \neq l \leq r} \frac{z_j^k}{z_j - z_l} \partial_{z_j} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})
\end{aligned}$$

とする．任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について, **Jack 多項式 (Jack polynomials)** $P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)$ を以下の 2 条件を満たす $|\mathbf{m}|$ 次斉次多項式として定義する.

$$\begin{aligned}
&(1)\ D_2(\mathbf{z}) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) \sum_{j=1}^r m_j \left(m_j - 1 - d(r-j)\right), \\
&(2)\ P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = m_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{m}} c_{\mathbf{mk}} m_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

また補間 **Jack 多項式 (interpolation Jack polynomials)** $P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)$ を次の 2 条件で定める.

$$\begin{aligned}
&(1)^{\mathrm{ip}}\ P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = 0, \quad \text{unless } \mathbf{k} \subset \mathbf{m} \in \mathcal{P} \\
&(2)^{\mathrm{ip}}\ P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) + (\text{lower terms}).
\end{aligned}$$

更に便宜上, 次のようにおく.

$$\begin{aligned}
\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) &:= \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} \ \text{(normalized Jack polynomials)}, \\
\Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) &:= \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} = \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} \Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}), \\
\binom{\mathbf{z}}{\mathbf{k}}^{(d)} &:= \frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{z} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{k} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} \ \text{(generalized (or Jack) binomial coefficients)}, \\
{}_0\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(; \mathbf{z}, \mathbf{u}\right) &:= \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} \Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) \Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} \Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) \Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

ここで用いた正規化定数は明示的に書ける．実際 [M2] (10.20), [Ko] (4.8) より

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)=\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)}{m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)}=\prod_{1\le i<j\le r}\frac{\left(\frac{d}{2}(j-i+1)\right)_{m_i-m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j-i)\right)_{m_i-m_j}}.$$

また [Ko] の (7.4), (7.5) より

$$\begin{aligned}P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)&=\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\left(m_i-j+1+\frac{d}{2}(m'_j-i)\right)\\&=\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{d}{2}(r-j)+1\right)_{m_j}\prod_{1\le i<j\le r}\frac{\left(\frac{d}{2}(j-i-1)+1\right)_{m_i-m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j-i)+1\right)_{m_i-m_j}}.\end{aligned}$$

次に一変数の補間 Jack 多項式の Pieri 公式 (と差分方程式) の導出の際に必要となった

1. 関口作用素
2. **Jack 多項式の Pieri 公式**
3. 二項公式
4. **Mysterious summation**
5. **Jack 多項式の twisted Pieri 公式**

の 5 つの公式の多変数化について順次述べよう．

1. 関口作用素 (Sekiguchi, Debiard, Macdonald, et.al.)

$\Delta(\mathbf{z})$ を差積 $\Delta(\mathbf{z}):=\prod_{1\le i<j\le r}(z_i-z_j)$ とし，関口作用素 (とその母函数) を

$$H^{(J)}_{k,r}(\mathbf{z}):=\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{2}{d}\right)^{k-l}\sum_{\substack{I\subset[r]\\|I|=l}}\frac{1}{\Delta(\mathbf{z})}\left(\prod_{i\in I}z_i\partial_{z_i}\right)\Delta(\mathbf{z})\sum_{\substack{J\subset[r]\setminus I\\|J|=k-l}}\left(\prod_{j\in J}z_j\partial_{z_j}\right),$$

$$S^{(d)}_r(u;\mathbf{z}):=\sum_{l=0}^{r}H^{(J)}_{l,r}(\mathbf{z})u^{r-l}$$

とおくと，

$$S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)=P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)I^{(d)}_r(u;\mathbf{m}),\tag{15}$$

$$H^{(J)}_{l,r}(\mathbf{z})P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)=P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)e_{r,l}(\mathbf{m}).\tag{16}$$

ただし

$$I^{(d)}_r(u;\mathbf{m}):=\prod_{k=1}^{r}\left(u+r-k+\frac{2}{d}m_k\right)=\left(\frac{2}{d}\right)^{r}\prod_{k=1}^{r}\left(m_k+\frac{d}{2}(u+r-k)\right).$$

2. **Jack 多項式の Pieri 公式** (Lassalle, et.al.)

$$E_0(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r} \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}) \left(x_i + \frac{d}{2}(r-i)\right) h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}), \tag{17}$$

$$E_0(\mathbf{z})\Psi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ \mathbf{x}_i\in\mathcal{P}}} \Psi^{(d)}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}) h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}_i), \tag{18}$$

$$e_{r,1}(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r} \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}^i}(\mathbf{z}) h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}), \tag{19}$$

$$e_{r,1}(\mathbf{z})\Psi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ \mathbf{x}^i\in\mathcal{P}}} \Psi^{(d)}_{\mathbf{x}^i}(\mathbf{z}) \left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i)\right) h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}^i). \tag{20}$$

ただし

$$e_{r,1}(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^{r} z_j,\ E_0(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^{r} \partial_{z_j},\ h^{(d)}_{\pm,i}(\mathbf{x}) := \prod_{1\le k\ne i\le r} \frac{x_i - x_k - \frac{d}{2}(i-k) \pm \frac{d}{2}}{x_i - x_k - \frac{d}{2}(i-k)},$$

$$\mathbf{x}_i := \mathbf{x} - \epsilon_i, \quad \mathbf{x}^i := \mathbf{x} + \epsilon_i, \quad \epsilon_i := (0,\ldots,0,\overset{\overset{i}{\vee}}{1},0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}^r.$$

ここで $\mathbf{x}_i \notin \mathcal{P}$ (resp. $\mathbf{x}^i \notin \mathcal{P}$) なら $h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}) = 0$ (resp. $h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) = 0$) となることに注意しよう.

3. **二項公式** (Knop-Sahi, Okounkov-Olshanski, et.al.)

任意の分割 $\mathbf{x}$ について,

$$\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}^{(d)} \Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} \Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}). \tag{21}$$

以上の 3 つの公式はいずれも既知の公式であるので証明は省く.

4. **Mysterious summation**

一変数のときは自明だった mysterious summation $(x+1) - x = 1$ は以下のようになる.

補題 2.1　任意の $I \subset [r]$, $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_r) \in \mathbb{C}^r$ について,

$$\sum_{i\in I} \left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i)\right) h^{(d)}_{-,i,I\setminus i}(\mathbf{x}^i) h^{(d)}_{+,i,I\setminus i}(\mathbf{x}) - \sum_{i\in I} \left(x_i + \frac{d}{2}(r-i)\right) h^{(d)}_{+,i,I\setminus i}(\mathbf{x}_i) h^{(d)}_{-,i,I\setminus i}(\mathbf{x}) = |I|. \tag{22}$$

ただし,

$$h^{(d)}_{\pm,i,I\setminus i}(\mathbf{x}) := \prod_{j\in I\setminus i} \frac{x_i - x_j - \frac{d}{2}(i-j) \pm \frac{d}{2}}{x_i - x_j - \frac{d}{2}(i-j)}.$$

証明　証明は一変数と同様にやればよい. すなわち作用素としての交換関係より

$$[E_0(\mathbf{z}), e_{r,1}(\mathbf{z})]\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})r$$

を得る. 他方, Jack 多項式の Pieri 公式を用いて

$$\begin{aligned}
&[E_0(\mathbf{z}), e_{r,1}(\mathbf{z})]\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} E_0(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}^i}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{r} e_{r,1}(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{z})\left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right)h^{(d)}_{-,j}(\mathbf{x}) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}^i_j}(\mathbf{z}) \\
&\quad \cdot\left(\left(x_j + \delta_{j,i} + \frac{d}{2}(r-j)\right)h^{(d)}_{-,j}(\mathbf{x}^i)h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) - \left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right)h^{(d)}_{-,j}(\mathbf{x})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}_j)\right) \\
&\quad = \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) \\
&\quad \cdot\sum_{i=1}^{r}\left(\left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}^i)h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) - \left(x_i + \frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}_i)\right).
\end{aligned}$$

これの係数比較より結論を得る. □

5. **Jack 多項式の twisted Pieri 公式**

これが 5 つの公式の多変数類似の中で最も難所であり, 今回の主結果である.

定理 2.2　任意の $p = 1, \ldots, r$ について,

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\right]\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) \\
&\quad = \sum_{\substack{J\subset[r]\\|J|=p}}\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}_J}(\mathbf{z})I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k})\prod_{j\in J}\left(k_j + \frac{d}{2}(r-j)\right), \qquad (23)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\right]\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}_J\in\mathcal{P}\\|J|=p}}\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}_J}(\mathbf{z})I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k}_J). \qquad (24)$$

ここで $J^c := [r]\setminus J$, $\mathbf{k}_J = \mathbf{k} - \sum_{j\in J}\epsilon_j$,

$$h^{(d)}_{\pm,J}(\mathbf{k}) := \prod_{j\in J, l\in J^c}\frac{k_j - k_l - \frac{d}{2}(j-l) \pm \frac{d}{2}}{k_j - k_l - \frac{d}{2}(j-l)},$$

$$I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k}) := \left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{l\in J^c}\left(k_l + \frac{d}{2}(u+r-l)\right).$$

証明　$\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$ も $\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$ も同様なので $\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$ についてのみ示す. 証明は p についての induction を用いる. $p = 1$ のときは関口作用素そのものなのでよい. p まで成立したとし

て, $p+1$ のときを考える．以下, 便宜上 $s_j := k_j + \frac{d}{2}(r-j)$ とおく．まず帰納法の仮定と Pieri 公式より

$$\begin{aligned}
&E_0(\mathbf{z})\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right]\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})\\
&\quad=\sum_{\substack{J\subset[r]\\|J|=p}}E_0(\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z})\prod_{j\in J}s_jh_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k})I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k})\\
&\quad=\sum_{\substack{J\subset[r]\\|J|=p}}\sum_{i=1}^{r}\Phi_{\mathbf{k}_{J\cup\{i\}}}^{(d)}(\mathbf{z})h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k}_J)h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k})I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k})\,(s_i-\delta_{i,J})\prod_{j\in J}s_j
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right]E_0(\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})\\
&\quad=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right]\Phi_{\mathbf{k}_i}^{(d)}(\mathbf{z})s_ih_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k})\\
&\quad=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{J\subset[r]\\|J|=p}}\Phi_{\mathbf{k}_{\{i\}\cup J}}^{(d)}(\mathbf{z})h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}_i)I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}_i)h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k})s_i\prod_{j\in J}(s_j-\delta_{i,J})
\end{aligned}$$

となることに注意する．ここで $i\in J$ のとき,

$$\begin{aligned}
&h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k}_J)h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k})I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k})\,(s_i-\delta_{i,J})\prod_{j\in J}s_j\\
&\quad=\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{1\le l\ne i\le r}\frac{s_l-\delta_{l,J}-s_i+1-\frac{d}{2}}{s_l-\delta_{l,J}-s_i+1}\prod_{j\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_p-\frac{d}{2}}{s_j-s_p}\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)(s_i-1)\prod_{j\in J}s_j
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}_i)I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}_i)h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k})s_i\prod_{j\in J}(s_j-\delta_{i,J})\\
&\quad=\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{j\in J,p\in J^c}\frac{s_j-\delta_{j,i}-s_p-\frac{d}{2}}{s_j-\delta_{j,i}-s_p}\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{1\le l\ne i\le r}\frac{s_l-s_i-\frac{d}{2}}{s_l-s_i}(s_i-1)\prod_{j\in J}s_j
\end{aligned}$$

双方の共通因子として

$$\left(\frac{2}{d}\right)^r(s_i-1)\prod_{j\in J}s_j\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{j\ne i\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_i-\frac{d}{2}}{s_j-s_i}\frac{s_j-s_p-\frac{d}{2}}{s_j-s_p}$$

をくくりだすと残りの因子はそれぞれ

$$\prod_{l\in J^c}\frac{s_l-s_i+1-\frac{d}{2}}{s_l-s_i+1}\frac{s_i-s_l-\frac{d}{2}}{s_i-s_l}=h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k}(J^c)_i)h_{+,i}^{(d)}(\mathbf{k}(J^c))\tag{25}$$

及び

$$\prod_{l\in J^c}\frac{s_l-s_i-\frac{d}{2}}{s_l-s_i}\frac{s_i-1-s_l-\frac{d}{2}}{s_i-1-s_l}=h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}(J^c))h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{k}(J^c)_i) \tag{26}$$

となる. 他方, $i\notin J$ のとき,

$$\begin{aligned}&h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}_J)h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k})I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})\left(s_i-\delta_{i,J}\right)\prod_{j\in J}s_j\\&=\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{1\le l\ne i\le r}\frac{s_l-\delta_{l,J}-s_i-\frac{d}{2}}{s_l-\delta_{l,J}-s_i}\prod_{j\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_p-\frac{d}{2}}{s_j-s_p}\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{j\in J\sqcup\{i\}}s_j\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}&h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k}_i)I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k}_i)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k})s_i\prod_{j\in J}\left(s_j-\delta_{i,J}\right)\\&=\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{j\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_p+\delta_{p,i}-\frac{d}{2}}{s_j-s_p+\delta_{p,i}}\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{1\le l\ne i\le r}\frac{s_l-s_i-\frac{d}{2}}{s_l-s_i}\prod_{j\in J\sqcup\{i\}}s_j.\end{aligned}$$

先程と同様に各々の共通因子

$$\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{j\in J\sqcup\{i\}}s_j\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{j\ne i\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_i-\frac{d}{2}}{s_j-s_i}\frac{s_j-s_p-\frac{d}{2}}{s_j-s_p}$$

を括りだすと, 先程と同様の (25), (26) が残る. 以上をまとめると

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^{p+1}}{(p+1)!}S^{(d)}_r(t;\mathbf{z})\right]\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\\&\quad=\sum_{\substack{I\subset[r]\\|I|=p+1}}\frac{1}{p+1}\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}_I}(\mathbf{z})I^{(d)}_{I^c}(u;\mathbf{k})h^{(d)}_{-,I}(\mathbf{k})\prod_{j\in I}s_j\\&\qquad\cdot\sum_{i\in I}\left\{\left(s_i+\frac{d}{2}u\right)h^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}^i)h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})\right.\\&\qquad\qquad\left.-\left(s_i-1+\frac{d}{2}u\right)h^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}_i)\right\}.\end{aligned}$$

ここで出てきた和

$$\sum_{i\in I}[s_ih^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}^i)h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})-(s_i-1)\,h^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}_i)]=p+1.$$

は mysterious summation (22) そのものであり, $p+1$ でも成り立つことがわかる. □

ここで便宜のため以上の公式を一変数の場合と併せて, まとめて list しておく.

$$
\begin{aligned}
\Phi_m^{(d)}(z) := z^m \quad &\Rightarrow \quad \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)}, \\
\Psi_m^{(d)}(z) := \frac{z^m}{m!} \quad &\Rightarrow \quad \Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right) \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})}{P_{\mathbf{m}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} = \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}, \\
(z\partial_z)\Phi_m(z) = \Phi_m(z)m \quad &\Rightarrow \quad S_r^{(d)}(u; \mathbf{z})\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) I_r^{(d)}(u; \mathbf{m}), \\
(z\partial_z)\Psi_m(z) = \Psi_m(z)m \quad &\Rightarrow \quad S_r^{(d)}(u; \mathbf{z})\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) I_r^{(d)}(u; \mathbf{m}), \\
\partial_z \Phi_m(z) = \Phi_{m-1}(z)m, \quad &\Rightarrow \quad E_0(\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{r} \Phi_{\mathbf{x}_i}^{(d)}(\mathbf{z}) \left(x_i + \frac{d}{2}(r-i) \right) h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{x}), \\
\partial_z \Psi_m(z) = \Psi_{m-1}(z) \quad &\Rightarrow \quad E_0(\mathbf{z})\Psi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{1 \le i \le r, \\ \mathbf{x}_i \in \mathcal{P}}} \Psi_{\mathbf{x}_i}^{(d)}(\mathbf{z}) h_{+,i}^{(d)}(\mathbf{x}_i), \\
z\Phi_m(z) = \Phi_{m+1}(z) \quad &\Rightarrow \quad e_{r,1}(\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r} \Phi_{\mathbf{x}^i}^{(d)}(\mathbf{z}) h_{+,i}^{(d)}(\mathbf{x}), \\
z\Psi_m(z) = \Psi_{m+1}(z)(m+1) \quad &\Rightarrow \quad e_{r,1}(\mathbf{z})\Psi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&\qquad = \sum_{\substack{1 \le i \le r, \\ \mathbf{x}_i \in \mathcal{P}}} \Psi_{\mathbf{x}^i}^{(d)}(\mathbf{z}) \left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i) \right) h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{x}^i), \\
\Phi_x(1+z) = \sum_{k \ge 0} \frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)} \Psi_k(z) \quad &\Rightarrow \quad \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1} + \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{P}} \frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}), \\
(x+1) - x = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i \in I} \left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i) \right) h_{-,i,I\setminus i}^{(d)}(\mathbf{x}^i) h_{+,i,I\setminus i}^{(d)}(\mathbf{x}) \\
&\qquad - \sum_{i \in I} \left(x_i + \frac{d}{2}(r-i) \right) h_{+,i,I\setminus i}^{(d)}(\mathbf{x}_i) h_{-,i,I\setminus i}^{(d)}(\mathbf{x}) \\
&\qquad = |I|, \\
\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z \right] \Phi_k(z) = \Phi_{k-1}(z)k \quad &\Rightarrow \quad \left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u; \mathbf{z}) \right] \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&\qquad = \sum_{\substack{J \subset [r] \\ |J| = p}} \Phi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z}) I_{J^c}^{(d)}(u; \mathbf{k}) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}) \\
&\qquad \cdot \prod_{j \in J} \left(k_j + \frac{d}{2}(r-j) \right), \\
\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z \right] \Psi_k(z) = \Psi_{k-1}(z) \quad &\Rightarrow \quad \left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u; \mathbf{z}) \right] \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&\qquad = \sum_{\substack{J \subset [r], \mathbf{k}_J \in \mathcal{P} \\ |J| = p}} \Psi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z}) I_{J^c}^{(d)}(u; \mathbf{k}) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}_J).
\end{aligned}
$$

3 主結果

key となる 5 つの公式の多変数類似が得られたので, これらを用いて Pieri 公式を証明する. ここまで準備できれば, 証明は一変数と完全に parallel になる.

定理 3.1 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^r$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$ について

$$I_r^{(d)}(u;\mathbf{z}) \frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} = \sum_{\substack{J\subset[r],\\ \mathbf{k}^J\in\mathcal{P}}} \frac{P_{\mathbf{k}^J}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{z}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} I_{J^c}^{(d)}\left(u;\mathbf{k}^J\right) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}). \tag{27}$$

ただし $J^c := [r] \setminus J$, $\mathbf{k}^J = \mathbf{k} + \sum_{j\in J}\epsilon_j$,

$$h_{\pm,J}^{(d)}(\mathbf{x}) := \prod_{j\in J, k\in J^c} \frac{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k) \pm \frac{d}{2}}{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k)},\ I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{x}) := \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{k\in J^c}\left(x_k + \frac{d}{2}(u+r-k)\right).$$

証明 多項式の関係式なので, 任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ について示せば十分である. まず $e^{\pm E_0(\mathbf{z})}$ が $\mathbf{z}$ の $\pm\mathbf{1}$ シフト作用素であることに注意して, (15) と二項公式 (21) を用いると

$$\begin{aligned}
[e^{\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z})} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})]\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) &= e^{E_0(\mathbf{z})} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z}) e^{-E_0(\mathbf{z})} \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) \\
&= e^{E_0(\mathbf{z})} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&= e^{E_0(\mathbf{z})} \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) I_r^{(d)}(u;\mathbf{x}) \\
&= \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) I_r^{(d)}(u;\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) I_r^{(d)}(u;\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}} \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) I_r^{(d)}(u;\mathbf{x}) \frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

他方, 二項公式 (21) で展開してから twisted Pieri 公式 (23) を当てると

$$\begin{aligned}
&[e^{\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z})} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})]\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} \sum_{p=0}^{r} \left[\frac{(\mathrm{ad}\ (E_0(\mathbf{z})))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right] \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} \sum_{p=0}^{r} \sum_{\substack{J\subset[r], \mathbf{k}_J\in\mathcal{P},\\ |J|=p}} \Psi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z}) I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}_J) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}} \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) \sum_{\substack{J\subset[r],\\ \mathbf{k}^J\in\mathcal{P}}} \frac{P_{\mathbf{k}^J}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} I_{J^c}^{(d)}\left(u;\mathbf{k}^J\right) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

ここで $\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})$ について係数比較をすれば結論を得る. □

定理3.1は母函数形だったが, これを u^{r-p} について係数比較をすることで, 次の補間 Jack 多項式の Pieri 公式が得られる.

系 3.2 任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^r$, $\mathbf{k}\in\mathcal{P}$ と $p=1,\dots,r$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&e_{r,p}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta\right)\frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}\\
&\quad=\sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}^J\in\mathcal{P},\\0\le|J|\le p}}\frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}e_{r-|J|,p-|J|}\left(\left(\mathbf{k}^J+\frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}\right)h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k}).
\end{aligned}\tag{28}
$$

ただし $J^c=\{i_1,\dots,i_{r-p}\}$,

$$
\left(\mathbf{k}^J+\frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}:=\left(k_{i_1}+\delta_{i_1,J}+\frac{d}{2}(r-i_1),\dots,k_{i_{r-p}}+\delta_{i_{r-p},J}+\frac{d}{2}(r-i_{r-p})\right)\in\mathbb{C}^{|J^c|}.
$$

証明は述べないが, 同様にして補間 Jack 多項式の差分方程式も得られる (詳しくは RIMS 共同研究「可積分系数理の深化と展開」の講究録の方を参照).

定理 3.3 任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^r$, $\mathbf{k}\in\mathcal{P}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&I^{(d)}_r(u;\mathbf{k})P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)\\
&\quad=\sum_{J\subset[r]}(-1)^{|J|}P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}_J+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{x})h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{x})\prod_{j\in J}\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right).
\end{aligned}\tag{29}
$$

ただし $\mathbf{k}_J=\mathbf{k}-\sum_{j\in J}\epsilon_j$.

定理3.3は母函数形だったが, これを u^{r-p} について係数比較をすることで, 次の補間 Jack 多項式の差分方程式が得られる.

系 3.4 任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^r$, $\mathbf{k}\in\mathcal{P}$, $p=1,\dots,r$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&e_{r,p}\left(\mathbf{k}+\frac{d}{2}\delta\right)P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)\\
&\quad=\sum_{\substack{J\subset[r]\\0\le|J|\le p}}(-1)^{|J|}P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}_J+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)e_{r-|J|,p-|J|}\left(\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}\right)h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{x})\\
&\qquad\cdot\prod_{j\in J}\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right).
\end{aligned}\tag{30}
$$

4 Applications

補間 Jack 多項式の Pieri 公式のいくつかの応用を述べる．まず補間 Jack 多項式の条件 $(2)^{\mathrm{ip}}$

$$P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)=P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)+(\text{lower terms}),$$

を思い出し, 系 3.2 の (28)

$$\begin{aligned}&e_{r,p}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta\right)\frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}\\&=\sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}^J\in\mathcal{P},\\0\le|J|\le p}}\frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}e_{r-|J|,p-|J|}\left(\left(\mathbf{k}^J+\frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}\right)h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

の最高次の係数を比較して, 以下の Jack 多項式 $\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$ の Pieri 型公式 (既知) を得る．

系 4.1 任意の $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^r$, $\mathbf{k}\in\mathcal{P}$, $p=1,\dots,r$ に対し,

$$e_{r,p}\left(\mathbf{z}\right)\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})=\sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}^J\in\mathcal{P},\\|J|=p}}\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}^J}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k}).\tag{31}$$

他方, Jack 多項式の twisted Pieri 公式 (24)

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\right]\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})=\sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}^J\in\mathcal{P},\\|J|=p}}\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}_J}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k}_J)I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k}),$$

において, u^{r-p} についての係数比較をすることで, 以下の Jack 多項式 $\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$ の Pieri 型公式 (未知?) を得る．

系 4.2 任意の $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^r$, $\mathbf{k}\in\mathcal{P}$, $p=1,\dots,r$ に対し,

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{r-p}\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}H^{(d)}_{r,p}(\mathbf{z})\right]\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})=\sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}^J\in\mathcal{P},\\|J|=p}}\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}_J}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k}_J).\tag{32}$$

これらの $\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$, $\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$ についての 2 つの Pieri 型公式 (31), (32) より, 以下の核函数 ${}_0\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(;\mathbf{z},\mathbf{w}\right)$ についての intertwining 関係式が得られる．

定理 4.3 任意の $\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbb{C}^r$, $p=1,\dots,r$ に対し,

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{r-p}\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}H^{(d)}_{r,p}(\mathbf{z})\right]{}_0\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(;\mathbf{z},\mathbf{w}\right)={}_0\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(;\mathbf{z},\mathbf{w}\right)e_{r,p}(\mathbf{w}).\tag{33}$$

一変数の場合は

$$ {}_0\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(;z,w\right) := \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^m w^m = \sum_{m=0}^{\infty}\Psi_m(z)\Phi_m(w) = \sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(z)\Psi_m(w) = e^{zw} $$

なので, (33) はよく知られた

$$ \partial_{z0}\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(;z,w\right) = {}_0\mathcal{F}_0{}^{(d)}\left(;z,w\right)w $$

の多変数類似に他ならない.

5 Concluding remarks

最後に補間 Jack 多項式の Pieri 公式に関連したいくつかの future works を述べる. 今回述べた補間 Jack 多項式の Pieri 公式は, 基本対称式

$$ e_{r,k}(\mathbf{z}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le r} z_{i_1}\cdots z_{i_k}, $$

すなわち一列型の Schur 多項式を補間 Jack 多項式に掛ける, いわば一列型のものだった. これの変奏として, 基本対称式ではなく完全斉次対称式

$$ h_{r,k}(\mathbf{z}) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=k} z_1^{i_1}\cdots z_r^{i_r}, $$

すなわち一行型の Schur 多項式を補間 Jack 多項式に掛ける, いわば一行型の Pieri 公式 (あるいは差分方程式) が考えられる. これは Jack 多項式の関口作用素 (基本対称式を固有値にもつ固有微分作用素) の代わりに, 完全斉次対称式を固有値にもつ野海作用素及びそれを用いた twisted Pieri 公式が明示的に書ければ, 本稿の議論と全く parallel にして補間 Jack 多項式の一行型の Pieri 公式 (及び差分方程式) が得られると期待できる.

次いで補間 Jack 多項式の q,t 変形にあたる補間 Macdonald 多項式において, 同様の Pieri 公式及び差分方程式) の導出が考えられる. これに関しては最近進展があり, 差分方程式に関しては野海 [N] が証明を与え, Pieri 公式に関しては F. Atai [A] が証明無しに明示的に書き下した. Pieri 公式の証明についても, 差分方程式を補間 Macdonald 多項式のある種の双対性 (Okounkov が [O2] (0.3) で言及しているがこれも未証明?) を介して読みかえることで得られると期待されているが, 現段階では完遂できていないようである. また差分方程式の野海の証明は Knop-Sahi [KS] の証明の q,t 変形あるいは Okounkov の “Idea of Proof” に近いものであり, 本稿の証明とは別種の証明である. なので我々の証明法の q,t 変形が得られるかどうかは興味深いと思われる.

ここまでは A 型の補間多項式についてしか言及してこなかったが, BC 型の補間多項式については Okounkov の先行結果 [O2] が知られている. 基本的には BC 型から退化すれ

ば, A 型の結果は順次得られるはずだが, 単純な退化では Atai の予想は得られず A 型との関係性はわかっていないようである．また有理版への言及もなされていない．今のところ, BC-Jacobi 多項式に関して本稿と同様の方法で適応することで, 一階の Pieri 公式は得ることができているが, これの高階化ができることが望ましい．

また本研究の元々の動機は多変数 Meixner 多項式の高階差分方程式であった．これを導出するために, 今回述べた twisted Pieri 公式 (23), (24) よりも難しい

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ e_{r,1}(\mathbf{z}))^q}{q!}\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right]\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = ?,$$
$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ e_{r,1}(\mathbf{z}))^q}{q!}\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right]\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = ?$$

というタイプの twisted Pieri 公式を明示的に書き下す必要がある．これができれば多変数 Meixner 多項式の高階差分方程式 (Pieri 公式) が導出でき, 更に有理型の BC 補間多項式に関する feedback もあると期待される．

謝辞

本研究にあたり, 有益なコメントを多数いただいた神戸大学の野海正俊先生と Farrokh Atai 氏に感謝申し上げます．

参考文献

[A] F. Atai : *Pieri formulas for interpolation Macdonald polynomials*, private note, (2019).

[FK] J. Faraut and A. Korányi : *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, (1994).

[Ka] J. Kaneko : *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1086–1110.

[Ko] T. H. Koornwinder : *Okounkov's BC-type interpolation Macdonald polynomials and their $q = 1$ limit*, Sém. Lothar. Combin, **72** (2014/15), 27pp.

[KS] F. Knop and S. Sahi: *Difference equations and symmetric polynomials defined by their zeros*, Internat. Math. Res. Notices, **10** (1996), 473–486.

[L] M. Lassalle: *Coefficients binomiaux généralisés et polynômes de Macdonald*, J. Funct. Anal., **158** (1998), 289–324.

[M1] I., G., Macdonald: *Schur functions: theme and variations*, Seminaire Lotharingien de Combinatoire **498** (1992), 5-39.

[M2] I., G., Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1995).

[N] M. Noumi: *q-Difference equations for Okounkov's interpolation polynomials of type A*, private note, (2019).

[O1] A. Okounkov: *Binomial formula for Macdonald polynomials and applications*, Math. Res. Letters, **4** (1997), 533–553.

[O2] A. Okounkov: *BC-type interpolation Macdonald polynomials and binomial formula for Koornwinder polynomials*, Trans. Groups **3**-2 (1998), 181–207.

[OO1] A. Okounkov and G. Olshanski: *Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications*, Math. Res. Letters, **4** (1997), 69–78.

[OO2] A. Okounkov and G. Olshanski: *Shifted Schur functions*, Algebra i Analiz, **9**-2 (1997), 239–300.

[Sa] S. Sahi: *The spectrum of certain invariant differential operators associated to a Hermitian symmetric space*, Lie theory and geometry, Birkhäuser Boston, (1994) 569–576.

[St] R. Stanley : *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math., **77**-1 (1989) 76–115.

[VK] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk: *Representation of Lie Groups and Special Functions -Recent Advances-*, Kluwer Academic Publishers, (1995).