

# Convex bases for affine quantum groups and its application for quantum dilogarithm identities

東北大学大学院理学研究科 菅原 優

Masaru Sugawara

Mathematical Institute, Tohoku University

## 1 はじめに

Dimofte, Gukov, Soibelman らは, Calabi-Yau 多様体の refined BPS invariants の挙動を記述する壁越え公式と呼ばれる恒等式を示し, それを具体的に書き下すことによって, 次の恒等式を得た [3].

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,-1}\mathbf{U}_{0,1} &= (\mathbf{U}_{0,1}\mathbf{U}_{2,1}\mathbf{U}_{4,1}\dots) \\ &\quad \times \mathbb{E}(-qx_1^2)^{-1}\mathbb{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1} \\ &\quad \times (\dots\mathbf{U}_{6,-1}\mathbf{U}_{4,-1}\mathbf{U}_{2,-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1,-1}\mathbf{U}_{1,0}\mathbf{U}_{0,1} &= (\mathbf{U}_{0,1}\mathbf{U}_{1,1}\mathbf{U}_{2,1}\mathbf{U}_{3,1}\dots) \\ &\quad \times \mathbf{U}_{1,0}^2\mathbb{E}(-qx_1^2)^{-1}\mathbb{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1} \\ &\quad \times (\dots\mathbf{U}_{3,-1}\mathbf{U}_{2,-1}\mathbf{U}_{1,-1}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1,-1}^2\mathbf{U}_{0,1}^2 &= (\mathbf{U}_{0,1}^2\mathbf{U}_{1,1}^2\mathbf{U}_{2,1}^2\mathbf{U}_{3,1}^2\dots) \\ &\quad \times \mathbf{U}_{1,0}^4\mathbb{E}(-qx_1^2)^{-1}\mathbb{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1} \\ &\quad \times (\dots\mathbf{U}_{3,-1}^2\mathbf{U}_{2,-1}^2\mathbf{U}_{1,-1}^2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1,-2}\mathbf{U}_{0,1}^4 &= (\mathbf{U}_{0,1}^4\mathbf{U}_{1,2}\mathbf{U}_{1,1}^4\mathbf{U}_{3,2}\mathbf{U}_{2,1}^4\dots) \\ &\quad \times \mathbf{U}_{1,0}^6\mathbb{E}(-qx_1^2)^{-1}\mathbb{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1} \\ &\quad \times (\dots\mathbf{U}_{2,-1}^4\mathbf{U}_{3,-2}\mathbf{U}_{1,-1}^4\mathbf{U}_{1,-2}). \end{aligned} \quad (4)$$

ただし  $q, x_1, x_2$  は不定元で  $qx_1 = x_1q, qx_2 = x_2q, x_1x_2 = qx_2x_1$  を満たすとし,

$$\mathrm{Li}_q(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1-q^n)}, \quad \mathbb{E}(x) := \exp(\mathrm{Li}_{q^2}(-qx)), \quad \mathbf{U}_{m,n} := \mathbb{E}(q^{-mn}x_1^m x_2^n) \quad (5)$$

とおく. これらは非可換代数上の量子二重対数に関する“有限積 = 無限積”という形の恒等式になっている.

一方, 寺崎敏志氏は  $A_1^{(1)}$  型アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  の簡約普遍  $R$  行列の 2 通りの積表示を用いることによって, (1) の恒等式を代数的に導出することに成功した [14]. 寺崎氏が用い

たアフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  の簡約普遍  $R$  行列の積表示は伊藤健氏によって与えられたものであり [8], アフィン正ルート系上の凸順序と呼ばれる全順序ごとに  $U_q(\mathfrak{g})$  の凸基底と呼ばれる PBW 型基底および簡約普遍  $R$  行列の積表示が得られることが知られている. 簡約普遍  $R$  行列の一意性によって, 2 つの異なる積表示から恒等式が得られ, その両辺を適切な表現を用いて射影することによって“有限積 = 無限積”の形の恒等式を得ることができる.

本稿では寺崎氏の手法を拡張し,  $A_2^{(1)}$  型アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_3})$  の簡約普遍  $R$  行列の具体的な積表示を適切に構成することによって恒等式 (2) を導出する. 簡約普遍  $R$  行列の積表示から得られる恒等式を具体的に書き下すためには,  $U_q(\mathfrak{g})$  への組紐群の作用を用いて記述されるルートベクトルと呼ばれる元を  $U_q(\mathfrak{g})$  の Chevalley 生成元  $E_i, F_i$  たちの多項式として具体的に記述する必要がある. そのため本稿では各ルートベクトルを生成元  $E_i, F_i$  たちの有限回の  $q$ -交換子積を用いて具体的に書き下すアルゴリズムを構成する.

## 2 アフィン量子群の簡約普遍 $R$ 行列の積表示

この節では, 伊藤氏によるアフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  の簡約普遍  $R$  行列の積公式を紹介する [8]. そのために, まずアフィン正ルート系上の凸順序を導入し, その一般的構成法を紹介する. 次に  $U_q(\mathfrak{g})$  を導入し, 凸順序から定まる各ルートの表示を組紐群の作用を通じて持ち上げることによりルートベクトルを構成する. それによって  $U_q(\mathfrak{g})$  の凸基底および簡約普遍  $R$  行列の積表示が構成される.

### 2.1 凸順序

以下では  $\mathfrak{g}$  を  $X_\ell^{(1)}$  型の非振型アフィン Lie 環とする. ただし  $X = A, B, C, D, E, F, G$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$  とする. また Kac の教科書に基づいて次のようにおく [9].

$$\begin{array}{ll}
 e_i, f_i \in \mathfrak{g} : \text{Chevalley 生成元,} & \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} : \text{Cartan 部分環,} \\
 \check{\alpha}_i \in \mathfrak{h} : \text{余単純ルート,} & \alpha_i \in \mathfrak{h}^* : \text{単純ルート,} \\
 s_i \in \text{End}(\mathfrak{h}^*) : \alpha_i \text{に関する鏡映} & (i = 0, 1, \dots, \ell), \\
 \Delta \subset \mathfrak{h}^* : \text{ルート系,} & W := \langle s_0, s_1, \dots, s_\ell \rangle : \text{Weyl 群,} \\
 \Delta_+ \subset \Delta : \text{正ルートの全体,} & \Delta_- \subset \Delta : \text{負ルートの全体,} \\
 \Delta^{\text{re}} \subset \Delta : \text{実ルートの全体,} & \Delta^{\text{im}} := \Delta \setminus \Delta^{\text{re}} : \text{虚ルートの全体.}
 \end{array}$$

また各  $R \subset \Delta$  に対し  $R_\pm := R \cap \Delta_\pm$  (複合同順) と書く.

定義 2.1 [5, Definition 3.3]  $\Delta_+$  上の全順序  $\leq$  が凸順序であるとは, 任意の  $\beta, \gamma \in \Delta_+^{\text{re}}$  に対し,  $\beta < \gamma$  かつ  $\beta + \gamma \in \Delta_+$  ならば  $\beta < \beta + \gamma < \gamma$  となることをいう.

例 2.2  $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2 (X = A, \ell = 1)$  のとき, 次は凸順序である. なお  $\delta = \alpha_0 + \alpha_1$  となる.

$$\begin{aligned} \delta - \alpha_1 &< 2\delta - \alpha_1 < 3\delta - \alpha_1 < \dots \\ &< \delta < 2\delta < 3\delta < \dots \\ &\dots < 2\delta + \alpha_1 < \delta + \alpha_1 < \alpha_1. \end{aligned} \quad (6)$$

非振型アフィン正ルート系上の凸順序は伊藤氏によって分類されている [5]. 一般の凸順序を記述するため, さらに記号を準備する. 詳細は伊藤氏の論文を参照されたい [5].

まず  $\dot{I} := \{1, 2, \dots, \ell\}$  とおき,  $\{e_i, f_i, \check{\alpha}_i \mid i \in \dot{I}\}$  で生成される  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 環を  $\dot{\mathfrak{g}}$  とおく.  $\dot{\mathfrak{g}}$  は  $X_\ell$  型の単純 Lie 環となる.  $\dot{\mathfrak{g}}$  の Cartan 部分環を  $\dot{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{i \in \dot{I}} \mathbb{C}\check{\alpha}_i \subset \mathfrak{h}$  とおき,  $\dot{\mathfrak{g}}$  のルートの全体を  $\dot{\Delta} \subset \dot{\mathfrak{h}}^*$ , Weyl 群を  $\dot{W} = \langle s_i \mid i \in \dot{I} \rangle \subset W$  とおく.

各  $J \subset \dot{I}$  に対し次のおく. ただし  $\delta \in \Delta_{\pm}^{\text{im}}$  は null root である.

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_J &:= \{\alpha_j \mid j \in J\} \subset \mathfrak{h}^*, \quad \dot{W}_J := \langle s_j \mid j \in J \rangle \subset \dot{W}, \\ \dot{W}^J &:= \left\{ w \in \dot{W} \mid w(\alpha_j) \in \dot{\Delta}_+ (\forall j \in J) \right\}, \\ \dot{\Delta}_J &:= \dot{W}_J(\dot{\Pi}_J), \quad \dot{\Delta}^J := \dot{\Delta} \setminus \dot{\Delta}_J, \quad \dot{\Delta}_\pm^J := \dot{\Delta}^J \cap \dot{\Delta}_\pm, \\ \Delta^J(w, \pm) &:= \left\{ m\delta + \varepsilon \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \varepsilon \in w\dot{\Delta}_\pm^J \right\} \cap \Delta_+ \quad (w \in \dot{W}), \\ \Delta_J(w, \pm) &:= \left\{ m\delta + \varepsilon \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \varepsilon \in w\dot{\Delta}_{J\pm} \right\} \cap \Delta_+ \quad (w \in \dot{W}). \end{aligned}$$

また  $J \subset \dot{I}$  を含む記号  $X^J, X_J$  に対し,  $J = \dot{I}$  のときは下付きの  $J$  を省略して  $X := X_J$  と書き,  $J = \emptyset$  のときは上付きの  $J$  を省略して  $X := X^J$  と書く. なお常に  $X^\emptyset = X_{\dot{I}}$  となる.

次に  $J \subset \dot{I}$  に対し  $\dot{\Delta}_J$  は有限個の有限型ルート系の直和となるので, その分解を  $J = \coprod_{c \in C} J_c$  とおく. ここで  $C$  は  $\dot{\Delta}_J$  の Dynkin 図形の連結成分の全体であり, 各  $c \in C$  に対し  $J_c \subset J$  は連結成分  $c$  に属する頂点の集合である. このとき  $J_c$  の作り方より  $\dot{\Delta}_{J_c}$  は既約な有限型ルート系となる. そこで  $\dot{\Delta}_{J_c}$  の最高ルートを  $\theta_{J_c} \in \dot{\Delta}_{J_c+}$  とおく.

さらに引き続き  $J \subset \dot{I}$  とその連結成分  $c \in C$  に対して次のおく.

$$\begin{aligned} \Pi_{J_c} &:= \dot{\Pi}_{J_c} \amalg \{\delta - \theta_{J_c}\}, \quad \Pi_J := \prod_{c \in C} \Pi_{J_c}, \\ S_J &:= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi_J\}, \quad W_J := \langle S_J \rangle \subset W, \\ \Delta_J^{\text{re}} &:= W_J(\Pi_J), \quad \Delta_J := \Delta_J^{\text{re}} \amalg \Delta^{\text{im}}. \end{aligned}$$

また各  $y \in W_J$  に対し  $\Phi_J(y) := \{\beta \in \Delta_{J+} \mid y^{-1}(\beta) \in \Delta_{J-}\}$  とおく. さらに  $u \in \dot{W}^J$  に対して

$$\nabla(J, u, y) := \Delta^J(u, -) \amalg u\Phi_J(y)$$

とおく.

さらに  $w \in \dot{W}$  に対し, 次の性質によって分解  $w = w^J w_J$  を定める.

補題 2.3  $w \in \dot{W}$  に対し,  $w = w^J w_J$  となる  $w^J \in \dot{W}^J$  及び  $w_J \in \dot{W}_J$  が一意に存在する.

定義 2.4 各  $w \in W_J$  に対し,  $w = u_1 u_2 \dots u_m$  ( $u_k \in S_J$ ) の形の積表示のうち  $m$  が最小となるものを簡約表示といい, 最小の  $m$  を  $l_J(w)$  と書き  $w$  の長さと呼ぶ.  $S_J$  の元の無限列  $u_1, u_2, \dots$  が任意の正整数  $m$  に対し  $l_J(u_1 u_2 \dots u_m) = m$  を満たすとき  $(W_J, S_J)$  における無限簡約語と呼ぶ.  $(W_J, S_J)$  における無限簡約語の全体を  $\mathscr{W}_J^\infty$  とおく.  $\mathbf{s} \in \mathscr{W}_J^\infty$  に対し  $\mathbf{s}$  の  $k$  番目の因子を  $\mathbf{s}(k) \in S_J$  と書き,  $\phi_{\mathbf{s}}(k) := \mathbf{s}(1)\mathbf{s}(2)\dots\mathbf{s}(k-1)(\beta_k) \in \Delta_J$  と書く. ただし  $\beta_k \in \Pi_J$  は  $\mathbf{s}(k) = s_{\beta_k}$  を満たすものとする.

それでは非振型アフィンルート系における  $\Delta_+$  上の凸順序の構成法を述べる. まず  $w \in \dot{W}$  を一つ選ぶと

$$\Delta_+ = \Delta(w, -) \amalg \Delta_+^{\text{im}} \amalg \Delta(w, +) \quad (7)$$

となる. また  $\dot{W}$  の最長元を  $w_0$  とおくと,  $w_0$  は  $\dot{\Delta}_+$  の任意の元の符号を負に反転させるから  $\Delta(w, +) = \Delta(w w_0, -)$  となる.

$w \in \dot{W}$  に対し  $\Delta(w, -)$  上の全順序を次の手順で構成する.

1. まず正整数  $n$  と添字の集合の filtration  $\dot{I} = J_0 \supsetneq J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq \dots \supsetneq J_n = \emptyset$  を選ぶ.
2. 次に Weyl 群の元  $y_1 \in W_{J_1}, y_2 \in W_{J_2}, \dots, y_n \in W_{J_n}$  および無限簡約語  $\mathbf{s}_0 \in \mathscr{W}_{J_0}^\infty, \mathbf{s}_1 \in \mathscr{W}_{J_1}^\infty, \dots, \mathbf{s}_{n-1} \in \mathscr{W}_{J_{n-1}}^\infty$  を, 次の条件を満たすように選ぶ.
  - (a)  $\emptyset = \nabla(J_0, w^{J_0}, 1_W) \subsetneq \nabla(J_1, w^{J_1}, y_1) \subsetneq \dots \subsetneq \nabla(J_n, w^{J_n}, y_n) = \Delta(w, -)$ .
  - (b)  $\nabla(J_i, w^{J_i}, y_i) = \nabla(J_{i-1}, w^{J_{i-1}}, y_{i-1}) \amalg w^{J_{i-1}} y_{i-1} \Phi_{J_{i-1}}(\mathbf{s}_{i-1})$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).
3. このとき任意の  $\alpha \in \Delta(w, -)$  は, ある整数  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) および正整数  $p$  を用いて

$$\alpha = w^{J_{k-1}} y_{k-1} \phi_{\mathbf{s}_{k-1}}(p) \quad (8)$$

と書ける. そこで  $\Delta(w, -)$  上の全順序  $\leq$  を次で定義する.

$$w^{J_{k-1}} y_{k-1} (\phi_{\mathbf{s}_{k-1}}(p)) \leq w^{J_{l-1}} y_{l-1} (\phi_{\mathbf{s}_{l-1}}(q)) \\ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (k < l) \text{ または } (k = l, p \leq q) \quad (k, l, p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}; k, l \leq n). \quad (9)$$

この全順序  $\leq$  は整列順序となり, その順序数は  $n\omega$  となる. そのためこの手順で構成される  $\Delta(w, -)$  上の整列順序  $\leq$  は  $n$  行型と呼ばれる.

そして  $\Delta_+$  上の全順序  $\leq$  を次のように構成する. まず  $w \in \dot{W}$  をひとつ選び, 上記の手順で  $\Delta(w, -)$  および  $\Delta(w, +) = \Delta(w w_0, -)$  上の全順序  $\leq_-, \leq_+$  をそれぞれ作る. なお  $\leq_{\pm}$  を構成する際に用いる, 添字の集合の filtration などのパラメータは全く独立に選んでよい. また正の虚ルートの全体  $\Delta_+^{\text{im}} = \{\delta, 2\delta, 3\delta, \dots\}$  上の全順序  $\leq_0$  をひとつ選ぶ.  $\leq_0$  は全順序ならば何でもよい. このとき  $\leq$  を次で定める.

$$\alpha \in \Delta(w, -), \beta \in \Delta_+^{\text{im}}, \gamma \in \Delta(w, +) \Rightarrow \alpha < \beta < \gamma;$$

$$\alpha \leq \alpha' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha \leq_- \alpha' \quad (\alpha, \alpha' \in \Delta(w, -)); \quad \beta \leq \beta' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \beta \leq_0 \beta' \quad (\beta, \beta' \in \Delta_+^{\text{im}});$$

$$\gamma \leq \gamma' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \gamma' \leq_+ \gamma \quad (\gamma, \gamma' \in \Delta(w, +)).$$

なお  $\Delta(w, +)$  上では  $\leq_+$  の逆の順序を用いていることに注意. このため  $\Delta_+$  上の順序  $\leq$  自身は整列順序ではない.

$\Delta_+$  上の全ての凸順序がこの手順により得られるというのが伊藤氏の結果である.

定理 2.5 [5, Theorem 7.9, Corollary 7.10] 非振型アフィンルート系において上で構成した全順序  $\leq$  は凸順序であり, さらに  $\Delta_+$  上の任意の凸順序は上述の方法で構成される.

## 2.2 $U_q(\mathfrak{g})$ の定義及び組紐群の作用

次に量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  を導入する.

定義 2.6  $\mathfrak{g}$  を対称化可能 Kac-Moody Lie 環とし,  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{\ell}$  ( $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) を  $\mathfrak{g}$  の一般 Cartan 行列とする. 不定元  $q$  に対し  $\mathbb{Q}(q)$ -代数  $U_q(\mathfrak{g})$  を次で定義する.

$$\text{生成元: } E_i, F_i, K_\lambda \quad (i = 0, 1, \dots, \ell; \lambda \in P). \quad (10)$$

$$\text{関係式: } K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu}, \quad K_0 = 1 \quad (\lambda, \mu \in P); \quad (11)$$

$$K_\lambda E_i K_\lambda^{-1} = q^{(\lambda, \alpha_i)} E_i, \quad K_\lambda F_i K_\lambda^{-1} = q^{-(\lambda, \alpha_i)} F_i \quad (i = 0, 1, \dots, \ell; \lambda \in P); \quad (12)$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (i = 0, 1, \dots, \ell); \quad (13)$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k = 0 \quad (i \neq j). \quad (15)$$

ただし  $(\cdot, \cdot)$  は不変内積,  $P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \check{\alpha}_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} (\forall i = 0, 1, \dots, \ell)\}$  はウェイト格子,  $q_i := q^{\frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_i)}$  とし,  $[n]_q, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  はそれぞれ  $q$ -整数,  $q$ -二項係数とする.

また  $U_q(\mathfrak{g})$  の部分  $\mathbb{Q}(q)$ -代数たちを次で定める.

$$U_q^+ := \langle E_i (i = 0, 1, \dots, \ell) \rangle, \quad U_q^0 := \langle K_\lambda (\lambda \in P) \rangle, \quad U_q^- := \langle F_i (i = 0, 1, \dots, \ell) \rangle.$$

すると次の三角分解が成立する [11, 3.2.5].

$$U_q^- \otimes U_q^0 \otimes U_q^+ \cong U_q(\mathfrak{g}), \quad x \otimes y \otimes z \mapsto xyz. \quad (16)$$

さらに  $\mu \in P$  に対し  $U_\mu := \{x \in U_q(\mathfrak{g}) \mid K_\lambda x K_\lambda^{-1} = q^{(\lambda, \mu)} x (\forall \lambda \in P)\}$  とおくと, ウェ

イト空間分解

$$U_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\mu \in Q} U_\mu \quad (Q := \bigoplus_{i=0}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i \subset P \text{ はルート格子}) \quad (17)$$

が成り立ち,  $U_q(\mathfrak{g})$  は  $Q$ -次数付き代数となる. そこで  $q$ -交換子積  $[\cdot, \cdot]_q$  を次で定める.

$$[x, y]_q := xy - q^{(\mu, \nu)}yx \quad (\mu, \nu \in Q; x \in U_\mu, y \in U_\nu). \quad (18)$$

$U_q(\mathfrak{g})$  は次のように余積  $\Delta : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ , 余単位射  $\varepsilon : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$  という  $\mathbb{Q}(q)$ -代数射および対合射  $S : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$  という  $\mathbb{Q}(q)$ -反代数射を定めることにより Hopf 代数を成すことが知られている.

$$\Delta(E_i) := E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) := F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad \Delta(K_\lambda) := K_\lambda \otimes K_\lambda, \quad (19)$$

$$\varepsilon(E_i) := 0, \quad \varepsilon(F_i) := 0, \quad \varepsilon(K_\lambda) := 1, \quad (20)$$

$$S(E_i) := -K_i^{-1}E_i, \quad S(F_i) := -F_iK_i, \quad S(K_\lambda) := K_\lambda^{-1} \quad (i = 0, 1, \dots, \ell; \lambda \in P). \quad (21)$$

さらに  $U_q(\mathfrak{g})$  は組紐群の対称性を持つことが知られている.

定義 2.7  $W$  を Kac-Moody Lie 環  $\mathfrak{g}$  の Weyl 群とし, 各  $i, j = 0, 1, \dots, \ell$  に対し  $s_i s_j \in W$  の位数を  $m(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$  とおく. このとき次で定義される群  $\mathcal{B}$  を  $W$  に付随する組紐群という.

$$\text{生成元} : s_0, s_1, \dots, s_\ell. \quad (22)$$

$$\text{関係式} : \overbrace{s_i s_j s_i \dots}^{m(i, j)} = \overbrace{s_j s_i s_j \dots}^{m(i, j)} \quad (i \neq j, m(i, j) \neq \infty). \quad (23)$$

定理 2.8 [11, Chap. 37, 39] 各  $i = 0, 1, \dots, \ell$  に対し  $U_q(\mathfrak{g})$  の  $\mathbb{Q}(q)$ -代数としての自己同型  $T_i \in \text{Aut } U_q(\mathfrak{g})$  で次を満たすものが一意に存在する. さらに  $T_i$  たちは  $\mathfrak{g}$  の Weyl 群に付随する組紐群の定義関係式 (23) を満たす.

$$T_i(E_i) = -F_i K_i, \quad T_i(F_i) = -K_i^{-1} E_i, \quad T_i(K_\lambda) = K_{s_i(\lambda)} \quad (\lambda \in P), \quad (24)$$

$$T_i(E_j) = \frac{1}{[-a_{ij}]_{q_i}!} \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-1)^k q_i^{-k} \begin{bmatrix} -a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{-a_{ij}-k} E_j E_i^k, \quad (25)$$

$$T_i(F_j) = \frac{1}{[-a_{ij}]_{q_i}!} \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-1)^k q_i^k \begin{bmatrix} -a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^k F_j F_i^{-a_{ij}-k} \quad (j \neq i). \quad (26)$$

そこで組紐群の元  $b \in \mathcal{B}$  の  $U_q(\mathfrak{g})$  への作用を  $T_b \in \text{Aut } U_q(\mathfrak{g})$  と書く. さらに組紐群は Weyl 群の元の簡約表示について次の性質をもつことが古典的に知られている.

命題 2.9 [2, Chap. IV, §1, Proposition 5]

Weyl 群の元  $w \in W$  に対し  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} = s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_q}$  を  $w$  の 2 通りの簡約表示とする. このとき  $W$  に付随する組紐群  $\mathcal{B}$  においても  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} = s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_q} \in \mathcal{B}$  が成り立つ. 従って各  $w \in W$  に対し, その簡約表示  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q}$  を用いて定義される写像

$$s : W \rightarrow \mathcal{B}; \quad s(w) := s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} \in \mathcal{B} \quad (27)$$

は well-defined となり,  $s$  は標準全射  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow W$  の切断となる.

よって Weyl 群の元を自然に組紐群の元とみなすことができる. そこで各  $w \in W$  に対し  $T_w := T_{s(w)}$  と書く.

## 2.3 ルートベクトルの構成

2.1 節で構成した凸順序から定まる実ルート  $\alpha$  の表示 (8) を前節の組紐群の作用を通じて持ち上げることにより,  $\alpha$  に付随するルートベクトル  $E_\alpha \in U_q(\mathfrak{g})$  を構成する. しかし一般のルートベクトルを構成するためには前節の構成だけでは足りず, Weyl 群にさらに translation を付け加えた拡大 Weyl 群  $\widehat{W}$  およびそれに付随する拡大組紐群  $\widehat{\mathcal{B}}$  の作用まで構成する必要がある. この節では再び  $\mathfrak{g}$  は  $X_\ell^{(1)}$  型アフィン Lie 環とする.

定義 2.10  $\lambda \in \mathring{\mathfrak{h}}^*$  に対し線形写像  $t_\lambda : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  を次で定める.

$$t_\lambda(\mu) := \mu + (\mu, \delta)\lambda - \left\{ \frac{1}{2}(\lambda, \lambda)(\mu, \delta) + (\mu, \lambda) \right\} \delta \quad (\mu \in \mathfrak{h}^*). \quad (28)$$

$i \in \mathring{I}$  に対し  $(\varepsilon_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$  ( $i, j \in \mathring{I}$ ) を満たす元  $\varepsilon_i \in \mathring{\mathfrak{h}}^*$  を余基本ウェイトとよぶ.  $t_{\varepsilon_i} \in \text{GL}(\mathfrak{h}^*)$  は Weyl 群の元になるとは限らない. そこで Weyl 群  $W$  および  $t_{\varepsilon_i}$  ( $i \in \mathring{I}$ ) で生成される  $\text{GL}(\mathfrak{h}^*)$  の部分群を  $\widehat{W}$  とおき, 拡大 Weyl 群と呼ぶ. 実は  $\widehat{W}$  は  $W$  に Dynkin 図形の自己同型を適量付け加えたものと一致することが知られている.

命題 2.11 [8, Proposition 2.1] (岩堀, 松本)  $\mathring{I}_* := \left\{ j \in \mathring{I} \mid (\varepsilon_j, \theta_j) = 1 \right\}$  とおき, 各  $j \in \mathring{I}_*$  に対し  $\rho_{\mathring{I}_j} := t_{\varepsilon_j} w_{\circ j} w_\circ$  とおくと,  $X_\ell^{(1)}$  型アフィンルート系の Dynkin 図形の自己同型  $\rho$  で  $\rho_{\mathring{I}_j}(\alpha_i) = \alpha_{\rho(i)}$  となるものが存在する. ただし  $w_\circ, w_{\circ j}$  はそれぞれ  $\mathring{W}, \mathring{W}_{\mathring{I} \setminus \{j\}}$  の最長元である. この対応  $j \mapsto \rho$  は単射である. さらに  $\Omega := \left\{ \rho_{\mathring{I}_j} \mid j \in \mathring{I}_* \right\} \amalg \{\text{id}_{\mathfrak{h}^*}\}$  とおくと  $\Omega$  は  $\text{GL}(\mathfrak{h}^*)$  の部分群を成し, 次が成り立つ.

$$\widehat{W} = \Omega \ltimes W. \quad (29)$$

そこで拡大組紐群を  $\widehat{\mathcal{B}} := \Omega \ltimes \mathcal{B}$  と定める. すると命題 2.11 より  $\widehat{W}$  の各元は  $\rho w$  ( $\rho \in \Omega, w \in W$ ) の形に一意的に書けるので, 写像  $\tilde{s} : \widehat{W} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}$  を  $\tilde{s}(\rho w) := \rho s(w)$  で定め,

$\Omega$  の各元の長さを 0 と約束すれば  $(\widehat{W}, \widehat{B})$  についても命題 2.9 が成立する. さらに Dynkin 図形の自己同型  $\rho$  は添字の並べ替え  $E_i \mapsto E_{\rho(i)}, F_i \mapsto F_{\rho(i)}, K_{\alpha_i} \mapsto K_{\alpha_{\rho(i)}}$  によって部分  $\mathbb{Q}(q)$ -代数  $U'_q(\mathfrak{g}) := \langle E_i, F_i, K_{\alpha_i}^{\pm 1} \rangle \subset U_q(\mathfrak{g})$  に代数の同型として作用するので, 拡大組紐群  $\widehat{B}$  の  $U'_q(\mathfrak{g})$  への作用が定義できる. そこで各  $\tilde{w} \in \widehat{B}$  の作用を  $T_{\tilde{w}} \in \text{Aut}(U'_q(\mathfrak{g}))$  と書き,  $w \in \widehat{W}$  に対し  $T_w := T_{\tilde{s}(w)}$  と書く.

一般の凸順序から定まる実ルートの表示 (8) では, 無限簡約語  $\mathbf{s} \in \mathscr{W}_J^\infty (J \subset \dot{I})$  の中に  $s_{\delta-\theta_{J_c}}$  という元が含まれているが, これは“部分アフィン Weyl 群”  $W_J$  における simple reflection に相当するため, この元を  $U'_q(\mathfrak{g})$  に自然に作用させるためには  $s_{\delta-\theta_{J_c}} \in W_J$  を適切に  $\widehat{W}$  の元まで拡張する必要がある. その拡張法は次で与えられる [8, Definition 3.4].

定義 2.12 空でない  $J \subset \dot{I}$  の各連結成分  $J_c \subset J$  に対し  $j_c \in J_c$  で  $(\varepsilon_{j_c}, \theta_{J_c}) = 1$  となるものを選び固定しておく. このとき写像  $\widehat{\cdot} : S_J \rightarrow \widehat{W}$  を次で定める.

$$\widehat{s}_j := s_j \quad (j \in J), \quad \widehat{s_{\delta-\theta_{J_c}}} := (t_{\varepsilon_{j_c}})^{J_c} s_{\bar{j}_c} (t_{\varepsilon_{\bar{j}_c}})^{J_c}. \quad (30)$$

ただし  $\bar{j}_c$  は,  $\widehat{W}_{J_c}$  の最長元を  $w_o$  とおくと  $w_o(\alpha_{\bar{j}_c}) = -\alpha_{j_c}$  を満たす唯一の添字とする.

これによって定まる  $w \in W_J$  の  $U'_q(\mathfrak{g})$  への作用を  $\widehat{T}_w$  と書く. これではやく実ルートに付随するルートベクトルを定義することができる.

定義 2.13 非振型アフィン正ルート系  $\Delta_+$  上の凸順序が与えられたとき, 正の実ルート  $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$  に付随するルートベクトル  $E_{\leq, \alpha} \in U_\alpha$  を, 表示 (8) を用いて次で定める.

$$E_{\leq, \alpha} := \begin{cases} T_w^{J_{k-1}} \widehat{T}_{y_{k-1}} \widehat{T}_{\mathbf{s}_{k-1}(1)} \widehat{T}_{\mathbf{s}_{k-1}(2)} \cdots \widehat{T}_{\mathbf{s}_{k-1}(p-1)} (E_{\mathbf{s}_{k-1}(p)}) & (\alpha \in \Delta(w, -)) \\ \Psi T_w^{J_{k-1}} \widehat{T}_{y_{k-1}} \widehat{T}_{\mathbf{s}_{k-1}(1)} \widehat{T}_{\mathbf{s}_{k-1}(2)} \cdots \widehat{T}_{\mathbf{s}_{k-1}(p-1)} (E_{\mathbf{s}_{k-1}(p)}) & (\alpha \in \Delta(w, +)) \end{cases}. \quad (31)$$

ただし  $\Psi : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$  は  $\Psi(E_i) := E_i, \Psi(F_i) := F_i, \Psi(K_\lambda) := K_\lambda^{-1}$  を満たす  $\mathbb{Q}(q)$ -反代数射である. また  $E_{s_j} := E_j$  とし,  $E_{s_{\delta-\theta_{J_c}}}$  は次の補題で一意に定まる元とする.

補題 2.14 [8, Lemma 5.1]

各  $\varepsilon \in \dot{\Delta}_+$  に対し,  $\mathbf{s} = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$  を簡約表示で  $\delta - \varepsilon = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{m-1}}(\alpha_{i_m})$  となり, かつ  $\Phi(\mathbf{s}) := \mathbf{s} \Delta_- \cap \Delta_+ \subset \Delta(1, -)$  を満たすものとする. 条件を満たす  $\mathbf{s}$  は常に存在し,

$$E_{\delta-\varepsilon} := T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{m-1}}(E_{i_m}) \quad (32)$$

とおくと,  $E_{\delta-\varepsilon}$  は条件を満たす簡約表示  $\mathbf{s}$  の取り方によらない.

次に虚ルートに付随するルートベクトルの構成法を述べる. 虚ルートベクトルは拡大組紐群  $\widehat{B}$  の作用を用いて構成される [1]. 虚ルート  $n\delta$  ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ) のアフィン Lie 環  $\mathfrak{g}$  における重複度は  $l$  であるから [9, Chap. 7],  $n\delta$  に付随するルートベクトルも  $l$  個構成する.

まず, ウェイトベクトル  $\mathcal{E}_{n\delta-\alpha_i}$  を次で定める.

$$\mathcal{E}_{n\delta-\alpha_i} := T_{\varepsilon_i}^n T_i^{-1}(E_i) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in \mathring{I}). \quad (33)$$

ただし  $T_{\varepsilon_i} := T_{t_{\varepsilon_i}} \in \text{Aut } U'_q(\mathfrak{g})$  は translation  $t_{\varepsilon_i} \in \widehat{W}$  を拡大組紐群  $\widehat{B}$  に持ち上げたものの作用である. そして

$$\varphi_{i,n} := [\mathcal{E}_{n\delta-\alpha_i}, E_i]_q = \mathcal{E}_{n\delta-\alpha_i} E_i - q_i^{-2} E_i \mathcal{E}_{n\delta-\alpha_i} \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in \mathring{I}) \quad (34)$$

とおく. さらに  $\varphi_{i,n}$  に対し次のような技術的な操作を行う. 各  $i \in \mathring{I}$  に対し

$$\varphi_i(z) := (q_i - q_i^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{i,n} z^n \in U_q^+[[z]] \quad (35)$$

とおく. ただし  $U_q^+[[z]]$  は  $U_q^+$  を係数とする形式冪級数環であり, 各  $x \in U_q^+$  に対し  $xz = zx$  として積を定める. また  $U_q^+[[z]]$  には  $z$ -進位相を与える. そして

$$I_i(z) := \log(1 + \varphi_i(z)) = (q_i - q_i^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} I_{i,n} z^n \quad (36)$$

とにおいて  $I_{i,n} \in U_q^+$  を定める. ただし対数関数は  $\log(1+x) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m$  で定める. この  $I_{i,n}$  を虚ルートベクトルと呼ぶ.

## 2.4 $U_q(\mathfrak{g})$ の凸基底と簡約普遍 $R$ 行列の積公式

こうして構成したルートベクトルたちは,  $U_q^+$  の凸基底と呼ばれる PBW 型の良い基底を成す. その凸基底に対して Drinfel'd による量子二重構成法 (quantum double construction) [4] を応用することにより, アフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  の簡約普遍  $R$  行列のルートベクトルを用いた具体的な無限積表示が与えられている [8].

**定義 2.15**  $\mathbb{Q}(q)$ -代数  $U$  の部分集合  $\Lambda$  に全順序  $\leq$  が与えられているとする. 各部分集合  $\Sigma \subset \Lambda$  に対し,  $\Sigma$  の元から成る単調増加な単項式の集合を

$$\mathcal{E}_{<}(\Sigma) := \{ E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} \cdots E_{\lambda_m} \mid E_{\lambda_k} \in \Sigma, E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2} \leq \cdots \leq E_{\lambda_m} \} \subset U$$

とおく.  $\mathcal{E}_{<}(\Lambda)$  は次の条件を満たすとき  $U$  の凸基底であるという.

1.  $\mathcal{E}_{<}(\Lambda)$  は  $U$  の  $\mathbb{Q}(q)$ -線形空間としての基底となる.
2. 与えられた順序についての任意の区間  $I \subset \Lambda$  に対し,  $I$  で生成される  $U$  の部分  $\mathbb{Q}(q)$ -代数を  $U_I$  とおくと,  $\mathcal{E}_{<}(I)$  が  $U_I$  の  $\mathbb{Q}(q)$ -線形空間としての基底となる.

ただし全順序集合  $\Lambda$  の部分集合  $I$  が区間であるとは,  $I = \Lambda$  となるか, またはある  $x, y \in \Lambda$  に対し  $I$  が  $(x, *)$ ,  $[x, *)$ ,  $(*, y)$ ,  $(*, y]$ ,  $(x, y)$ ,  $[x, y)$ ,  $(x, y]$ ,  $[x, y]$  のいずれかと一致することである. ただし  $(x, *) := \{ \lambda \in \Lambda \mid x < \lambda \}$ ,  $[x, y) := \{ \lambda \in \Lambda \mid x \leq \lambda < y \}$  等とおく.

定理 2.16 [8, Theorem 8.6] 非振型アフィン正ルート系  $\Delta_+$  上の凸順序を一つ選び,

$$\Lambda := \{ E_{\leq, \alpha} \mid \alpha \in \Delta_+^{\text{re}} \} \amalg \{ T_w(I_{i,m}) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}; i = 1, 2, \dots, \ell \}$$

とおく. ただし  $w \in \dot{W}$  は凸順序の構成で設定したパラメータとする. また  $\Lambda$  上の全順序を  $\Delta_+$  上の凸順序および  $I_{i,m}$  の間の次の順序によって定める.

$$I_{i,m} \leq I_{j,m'} \Leftrightarrow (m \leq m') \text{ または } (m = m', i \leq j).$$

すると  $\mathcal{L}_{<}(\Lambda)$  は  $U_q^+$  の凸基底となる.

なお Chevalley involution  $\Omega : U_q^+ \rightarrow U_q^-; \Omega(E_i) := F_i, \Omega(q) := q^{-1}$  という  $\mathbb{Q}$ -代数の反同型があるため,  $U_q^+$  の凸基底を  $\Omega$  でうつせば  $U_q^-$  の凸基底も得られる.

この凸基底を用いることでアフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  の簡約普遍  $R$  行列  $\Theta$  の具体的な積表示を構成できる. まず, テンソル積代数  $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$  において非負整数  $h$  に対し

$$(U_q \otimes U_q)_h := \bigoplus_{\substack{\mu, \nu \in Q_+ \\ \text{ht}(\mu + \nu) = h}} (U_q^- U_q^0 \otimes U_q^- U_q^0) \cdot U_\mu \otimes U_\nu \subset U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$$

とおき,  $\{ \bigoplus_{h=k}^\infty (U_q \otimes U_q)_h \mid k = 0, 1, 2, \dots \}$  を 0 の基本近傍系とするような線形位相を  $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$  に与える. その位相について完備化した位相  $\mathbb{Q}(q)$ -代数を  $\widehat{U}_q \widehat{\otimes} \widehat{U}_q := \prod_{h=0}^\infty (U_q \otimes U_q)_h$  とおく.  $U_q^+ \otimes U_q^- \subset \widehat{U}_q \widehat{\otimes} \widehat{U}_q$  の閉包を  $U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^-$  とおく.

定義 2.17 [11, 4.1.2] 次を満たす一意的な元  $\Theta \in \widehat{U}_q \widehat{\otimes} \widehat{U}_q$  を簡約普遍  $R$  行列と呼ぶ.

1.  $\Theta \cdot \bar{\Delta}^{\text{op}}(u) = \Delta^{\text{op}}(u) \cdot \Theta \quad (\forall u \in U_q(\mathfrak{g})).$
2.  $\Theta_0 = 1 \otimes 1.$

ただし  $x \in \widehat{U}_q \widehat{\otimes} \widehat{U}_q$  に対し  $x = (x_h)_{h=0}^\infty \in \prod_{h=0}^\infty (U_q \otimes U_q)_h$  で  $x_h \in (U_q \otimes U_q)_h$  を定める. また  $\mathbb{Q}$ -代数としての自己同型  $\Upsilon \in \text{Aut } U_q(\mathfrak{g})$  を  $\Upsilon(E_i) := E_i, \Upsilon(F_i) := F_i, \Upsilon(K_\lambda) = K_\lambda^{-1}, \Upsilon(q) := q^{-1}$  で定め,  $\bar{\Delta} := (\Upsilon \otimes \Upsilon) \circ \Delta \circ \Upsilon$  とおく. さらにテンソル積成分の並べかえ  $P : x \otimes y \mapsto y \otimes x$  で  $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$  に値をとる各関数  $X$  に対し  $X^{\text{op}} := P \circ X$  を定める.

この  $\Theta$  の一意性が恒等式の証明の核心となる. そして  $\Theta$  はアフィン正ルート系上の凸順序ごとに次のようなルートベクトルによる具体的な積表示をもつ.

定理 2.18 [8, Corollary 9.9]

まずアフィン正ルート系上の凸順序を一つ選んでルートベクトル  $E_{\leq, \alpha}, I_{i,n}$  を構成する.  $i, j \in \dot{I}$  と正整数  $n$  に対し  $b_{i,j;n} := \text{sgn}(a_{ij})^n \frac{[a_{ij}n]_{q_i}}{n(q_i^{-1} - q_j)}$  とおき,  $\ell$  次正方行列  $(b_{i,j;n})_{i,j=1}^\ell \in \text{Mat}(\mathbb{Q}(q), \ell)$  の逆行列を  $(c_{i,j;n})_{i,j=1}^\ell$  とおく. ただし整数  $x$  に対し  $x > 0$  ならば  $\text{sgn}(x) := 1, x = 0$  ならば  $\text{sgn}(x) := 0, x < 0$  ならば  $\text{sgn}(x) := -1$  と定める.

また  $F_{\leq, \alpha} := \Omega(E_{\leq, \alpha}) \in U_{-\alpha}$  ( $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$ ),  $J_{i,n} := \Omega(I_{i,n}) \in U_{-n\delta}$  とおき,  $\exp_q(x) := \mathbb{E}((q - q^{-1})x)$ ,  $q_\alpha := q^{\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)}$  ( $\alpha \in \Delta$ ) とおくと,

$$S_n := \sum_{i,j \in \hat{I}} c_{j,i;n} I_{i,n} \otimes J_{j,n} \in U_q^+ \otimes U_q^-, \quad (37)$$

$$\Theta_{\leq, \alpha} := \begin{cases} \exp_{q_\alpha} \{ (q_\alpha^{-1} - q_\alpha) E_{\leq, \alpha} \otimes F_{\leq, \alpha} \} & \alpha \in \Delta_+^{\text{re}} \\ \exp \{ T_w \otimes T_w(S_n) \} & \alpha = n\delta \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (38)$$

とおけば, 簡約普遍  $R$  行列  $\Theta$  は次のように書ける.

$$\Theta = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \Theta_{\leq, \alpha} \in U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^-. \quad (39)$$

ただし積  $\prod_{\alpha \in \Delta_+}^> X_\alpha$  は  $\alpha < \beta$  のとき積の順序が  $X_\beta X_\alpha$  となるように定める. すなわち積の順序は与えられた凸順序と逆になるようにする.

### 3 ルートベクトルの $q$ -交換子積による表示

アフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  の簡約普遍  $R$  行列  $\Theta$  の積公式 (39) は, 実ルートに対応する部分がルートベクトルに関する量子二重対数の積の形になっている. そこで複数の凸順序から  $\Theta$  の異なる積表示を構成し,  $\Theta$  の一意性によって恒等式を作ることで冒頭の壁越え公式を導出する. ルートベクトルは組紐群の作用によって記述されているが, 具体的な恒等式を構成するためには Chevalley 生成元  $E_i, F_i$  によるルートベクトルのさらに直接的な記述が必要となる. そこでこの節では, 組紐群の作用で記述される  $T_w(E_i)$  の形の元が  $E_i$  たちの有限回の  $q$ -交換子積で具体的に書き下せることを示す.

一般に  $\mathfrak{g}$  を対称化可能 Kac-Moody Lie 環とする.  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \in W$  が簡約表示のとき,  $\alpha := s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) \in \Delta_+$  となるから,

$$E_\alpha := T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}) \in U_\alpha \subset U_q^+ \quad (40)$$

は生成元  $E_i$  たちの多項式でかけることになる. 実はさらに  $E_\alpha$  が  $E_i$  たちの  $q$ -交換子積で書けることを以下示す.

まず組紐群の作用 (25) が  $q$ -交換子積によって,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し  $[n]_q! := [1]_q [2]_q \dots [n]_q \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  と書くとき

$$T_i(E_j) = \frac{1}{[-a_{ij}]_{q_i}!} \overbrace{[E_i, [E_i, \dots, [E_i, E_j]_q]_q \dots]_q}^{-a_{ij}} \quad (i \neq j) \quad (41)$$

と書けること, および Weyl 群が不変内積を保つことにより

$$T_i([x, y]_q) = [T_i(x), T_i(y)]_q \quad (x, y \in U_q(\mathfrak{g}), i = 0, 1, \dots, \ell) \quad (42)$$

となることに注目する. この 2 性質を用いて  $E_\alpha$  の後ろの因子  $T_{i_{k-1}}$  から順に  $q$ -交換子積に展開していくことを考えるが, 途中で  $T_i(E_i) = -F_i K_i \in U_{-\alpha_i}$  が現れてしまう場合があるので, これを次の公式を用いて簡約する.

**補題 3.1** [13, 2.35] 任意の非負整数  $n$  と相異なる添字  $i, j$  に対し,  $U_q(\mathfrak{g})$  において次が成り立つ.

$$\left[ \left( \overrightarrow{\text{ad}} E_i \right)^n (E_j), T_i(E_i) \right]_q = [n]_{q_i} [1 - a_{ij} - n]_{q_i} \left( \overrightarrow{\text{ad}} E_i \right)^{n-1} (E_j). \quad (43)$$

ただし  $\overrightarrow{\text{ad}} x(y) := [x, y]_q$  と書き,  $n = 0$  のときは  $\left( \overrightarrow{\text{ad}} E_i \right)^{-1} (E_j) := 0$  と約束する.

**証明**  $n$  に関する帰納法で示す. まず  $U_q(\mathfrak{g})$  の定義関係式より

$$E_i K_i = q_i^{-2} K_i E_i, \quad E_j K_i = q_i^{-a_{ij}} K_i E_j, \quad E_i F_i = F_i E_i + \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad E_j F_i = F_i E_j$$

となるから,  $F := T_i(E_i) = -F_i K_i$  との交換関係が

$$E_i F = q_i^{-2} F E_i - \frac{K_i^2 - 1}{q_i - q_i^{-1}}, \quad E_j F = q_i^{-a_{ij}} F E_j$$

となることに注意する. さて  $n = 0$  のときは,  $F = -F_i K_i$  のウェイトが  $-\alpha_i$  となることから

$$[E_j, F]_q = E_j F - q_i^{-a_{ij}} F E_j = q_i^{-a_{ij}} F E_j - q_i^{-a_{ij}} F E_j = 0$$

となり,  $[E_j, F]_q = [E_j, -F_i K_i]_q = 0$  となるから成立している. 次に,  $n$  のとき公式が成立すると仮定し,

$$C_n := [n]_{q_i} [1 - a_{ij} - n]_{q_i}, \quad X_n := \left( \overrightarrow{\text{ad}} E_i \right)^n (E_j)$$

とおく.  $X_n$  はウェイト  $n\alpha_i + \alpha_j$  の元となるから  $X_n K_i = q_i^{-2n - a_{ij}} K_i X_n$  となる. また帰納法の仮定より

$$X_n F = q_i^{-2n - a_{ij}} F X_n + C_n X_{n-1}$$

となる. これらの交換関係を用いれば,  $n + 1$  の場合は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} [X_{n+1}, F]_q &= \left[ [E_i, X_n]_q, F \right]_q \\ &= \left[ E_i X_n - q_i^{2n + a_{ij}} X_n E_i, F \right]_q \\ &= E_i X_n F - q_i^{-2(n+1) - a_{ij}} F E_i X_n \\ &\quad - q_i^{2n + a_{ij}} \left\{ X_n E_i F - q_i^{-2(n+1) - a_{ij}} F X_n E_i \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_i \left\{ q_i^{-2n-a_{ij}} F X_n + C_n X_{n-1} \right\} - q_i^{-2(n+1)-a_{ij}} F E_i X_n \\
&\quad - q_i^{2n+a_{ij}} \left\{ X_n \left( q_i^{-2} F E_i - \frac{K_i^2 - 1}{q_i - q_i^{-1}} \right) - q_i^{-2(n+1)-a_{ij}} F X_n E_i \right\} \\
&= q_i^{-2n-a_{ij}} \left( q_i^{-2} F E_i - \frac{K_i^2 - 1}{q_i - q_i^{-1}} \right) X_n + C_n E_i X_{n-1} - q_i^{2(n+1)+a_{ij}} F E_i X_n \\
&\quad - q_i^{2n+a_{ij}} q_i^{-2} \left( q_i^{-2n-a_{ij}} F X_n + C_n X_{n-1} \right) E_i + q_i^{2n+a_{ij}} X_n \frac{K_i^2 - 1}{q_i - q_i^{-1}} \\
&\quad + q_i^{-2} F X_n E_i \\
&= -q_i^{-2n-a_{ij}} \frac{K_i^2 - 1}{q_i - q_i^{-1}} X_n + C_n E_i X_{n-1} \\
&\quad - q_i^{2(n-1)+a_{ij}} C_n X_{n-1} E_i + q_i^{2n+a_{ij}} \frac{q_i^{2(-2n-a_{ij})} K_i^2 - 1}{q_i - q_i^{-1}} X_n \\
&= \frac{q_i^{-2n-a_{ij}} - q_i^{2n+a_{ij}}}{q_i - q_i^{-1}} X_n + C_n [E_i, X_{n-1}]_q \\
&= \left( [-a_{ij} - 2n]_{q_i} + C_n \right) X_n.
\end{aligned}$$

なお  $n = 0$  のときは  $C_n = 0$  となるからこの計算が問題なく通用する. 従って漸化式

$$C_0 = 0, \quad C_{n+1} = C_n + [-a_{ij} - 2n]_{q_i} \quad (n \geq 0)$$

が成り立つ.  $C_n := [n]_{q_i} [1 - a_{ij} - n]_{q_i}$  がこの漸化式を満たすことは容易に確かめられる. ゆえに  $n + 1$  でも公式が成立する.  $\square$

定理 3.2 [13, 4.20]  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \in W$  が簡約表示ならば,  $E_\alpha := T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-1}}(E_{i_k})$  は  $E_i$  たちを高々有限回  $q$ -交換子積をとったもののスカラー倍で書ける.

証明  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に関する帰納法で示す.  $k = 1$  のときは  $E_\alpha = E_{i_1}$  より自明であり,  $k = 2$  の場合は  $s_{i_1} s_{i_2}$  が簡約表示より  $i_1 \neq i_2$  であるから, (41) よりいえる. そこで  $k \geq 2$  とし, 長さが  $k$  未満の簡約表示について  $E_\alpha$  が有限回の  $q$ -交換子積で書けると仮定する.  $i := i_{k-1}$ ,  $j := i_k$  とおき,  $w^{\{i,j\}} \in W$  は  $w = w^{\{i,j\}} \dots s_j s_i s_j s_i s_j$  を満たすもののうち長さが最小のものとおくと,  $w^{\{i,j\}}(\alpha_i), w^{\{i,j\}}(\alpha_j) \in \Delta_+$  となることが  $w^{\{i,j\}}$  の取り方およびルート系の性質からいえる. このとき帰納法の仮定より  $T_{w^{\{i,j\}}}(E_i)$  および  $T_{w^{\{i,j\}}}(E_j)$  は有限回の  $q$ -交換子積で書けるから,  $T_\alpha = T_{w^{\{i,j\}}} \dots T_j T_i(E_j)$  よりとくに  $\dots T_j T_i(E_j)$  が  $E_i$  と  $E_j$  のみを有限回  $q$ -交換子積をとったものとして書けることがいえれば  $T_\alpha$  も書けることがいえる.  $E_i, E_j$  の有限回の  $q$ -交換子積で書ける元の全体を  $\mathcal{F}_{ij}$  とおく. よって特に  $w = \dots s_j s_i s_j$  の場合に  $E_\alpha \in \mathcal{F}_{ij}$  を示せば十分である.

そこで非負整数  $p, k$  に対し

$$s_{i,j;p} := \overbrace{\dots s_j s_i s_j s_i s_j}^p, \quad (44)$$

$$V_{i,j;p}^{(k)} := T_{\mathbf{s}_{i,j;p}} \left( \left( \overleftarrow{\text{ad}} E_j \right)^k (E_i) \right) = \overbrace{\dots T_i T_j T_i T_j}^p \left( \overbrace{[\dots [E_i, E_j]_q, E_j]_q, \dots, E_j]_q}^k \right) \quad (45)$$

とおく. すると補題 3.1 を使うことで次の漸化式が示せる [13, 4.18].

$$V_{i,j;p+1}^{(1)} = \frac{1}{[-a_{ji} - 1]_{q_j}!} \left( \overrightarrow{\text{ad}} E_{\mathbf{s}_{i,j;p+1}} \right)^{-a_{ji}-2} \left( V_{j,i;p}^{(1)} \right) \quad (a_{ji} \leq -2), \quad (46)$$

$$V_{i,j;p+2}^{(1)} = \frac{1}{[-a_{ji} - 1]_{q_j}!} \left( \overrightarrow{\text{ad}} V_{i,j;p}^{(1)} \right)^{-a_{ji}-3} \left( V_{i,j;p}^{(2)} \right) \quad (a_{ij} = -1, a_{ji} \leq -3), \quad (47)$$

$$V_{i,j;p+2}^{(2)} = \frac{[2]_{q_j}}{[-a_{ji} - 2]_{q_j}!} \left( \overrightarrow{\text{ad}} V_{i,j;p}^{(1)} \right)^{-a_{ji}-4} \left( V_{i,j;p}^{(2)} \right) \quad (a_{ij} = -1, a_{ji} \leq -4). \quad (48)$$

これらを用いて, 任意の  $i \neq j$  に対し  $\mathbf{s}_{i,j;p}$  が簡約表示ならば  $E_{\mathbf{s}_{i,j;p}} := \dots T_j T_i (E_j) \in \mathcal{F}_{ij}$  となることを  $p$  に関する帰納法で示す.  $p = 1, 2$  のときは明らか.  $p \geq 2$  として  $p$  以下では成立すると仮定する. このとき  $\mathbf{s}_{i,j;p}$  が簡約表示なら  $a_{ij} < 0, a_{ji} < 0$  となる. すると

$$E_{\mathbf{s}_{i,j;p+1}} = \frac{1}{[-a_{ij}]_{q_i}!} \left( \overrightarrow{\text{ad}} E_{\mathbf{s}_{j,i;p}} \right)^{-a_{ij}-1} \left( V_{i,j;p-1}^{(1)} \right)$$

となる. 帰納法の仮定より  $E_{\mathbf{s}_{j,i;p}} \in \mathcal{F}_{ij}$  だから  $V_{i,j;p-1}^{(1)} \in \mathcal{F}_{ij}$  なら  $E_{\mathbf{s}_{i,j;p+1}} \in \mathcal{F}_{ij}$  となる. 特に  $a_{ij} \leq -2, a_{ji} \leq -2$  の場合は  $V_{i,j;1}^{(1)} \in \mathcal{F}_{ij}$  および漸化式 (46) から帰納的に  $V_{i,j;p-1}^{(1)} \in \mathcal{F}_{ij}$  となることがいえる. また  $a_{ij} = -1, a_{ji} \leq -4$  の場合も  $V_{i,j;0}^{(1)}, V_{i,j;1}^{(1)}, V_{i,j;0}^{(2)}, V_{i,j;1}^{(2)} \in \mathcal{F}_{ij}$  が補題 3.1 によって直接確かめられ, 漸化式 (47), (48) により帰納的に  $V_{i,j;p-1}^{(1)}, V_{i,j;p-1}^{(2)} \in \mathcal{F}_{ij}$  がわかる.

$a_{ij} \leq -4, a_{ji} = -1$  の場合は, 補題 3.1 より

$$T_j \left( [E_i, [E_i, E_j]_q]_q \right) = [[E_j, E_i]_q, E_i]_q$$

となるから

$$E_{\mathbf{s}_{i,j;p+1}} = \frac{1}{[-a_{ij}]_{q_i}!} \left( \overrightarrow{\text{ad}} E_{\mathbf{s}_{j,i;p}} \right)^{-a_{ij}-2} \left( V_{j,i;p-2}^{(2)} \right)$$

と計算でき,  $V_{j,i;p-2}^{(2)}$  は  $a_{ij} = -1, a_{ji} \leq -4$  の場合の結果から  $\mathcal{F}_{ij}$  の元である. よって  $E_{\mathbf{s}_{i,j;p+1}} \in \mathcal{F}_{ij}$  となる.

残された  $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1), (-1, -2), (-1, -3), (-2, -1), (-3, -1)$  の場合は,  $\mathbf{s}_{i,j;p}$  が簡約表示になる  $p$  が有限個しかないので, 補題 3.1 を用いて直接  $E_{\mathbf{s}_{i,j;p}}$  を計算することで  $\mathcal{F}_{ij}$  の元になることが確かめられる. たとえば  $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1)$  のとき

$$\begin{aligned} T_j T_i (E_j) &\stackrel{(41)}{=} T_j ([E_i, E_j]_q) \stackrel{(42)}{=} [T_j(E_i), T_j(E_j)]_q \stackrel{(41)}{=} [[E_j, E_i]_q, T_j(E_j)]_q \\ &\stackrel{\text{補題 3.1}}{=} [1]_{q_j} [1 - (-1) - 1]_{q_j} E_i = E_i \end{aligned}$$

より次の簡約則を得る.

$$T_j T_i(E_j) = E_i \quad \text{if } (a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1). \quad (49)$$

□

特に  $\mathfrak{g}$  のルート系が simply laced である, すなわち  $a_{ij} = 0, -1$  ( $\forall i \neq j$ ) となる場合は,  $E_\alpha$  の計算を以下のように図式的に行うことができる. まず  $q$ -交換子積を

$$\overset{X}{\underset{Y}{\curvearrowright}} := [X, Y]_q \quad (X, Y \in U_q(\mathfrak{g})). \quad (50)$$

と図示する. 例えば生成元  $E_i$  に関する量子 Serre 関係式 (14) は次のように書ける.

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad \quad \quad}^{1-a_{ij}} \\ \begin{array}{ccccccc} i & i & i & i & \cdots & i & i & j \\ \diagdown & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & \diagdown & \diagdown & \diagdown \\ & & & & & & & \end{array} \end{array} = \left( \overset{\rightarrow}{\text{ad}} E_i \right)^{1-a_{ij}} (E_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

ただし  $E_i$  をさらに略して単に  $i$  と書くこととする. この記法によって, 複雑な  $q$ -交換子積の繰り返しで記述される元を二分木として見通し良く書き表すことができる.

さらに定理 3.2 の証明より,  $\Delta$  が simply laced などときは, 簡約表示  $\mathbf{s} := s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} s_j \in W$  に対し  $E_{\mathbf{s}} := T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_m}(E_j) \in U_q^+$  を表す二分木を次のアルゴリズムによって図式的に計算できる.

1. まず一点を描き, それを 1 つの葉だけからなる二分木と見なす. その葉に添字  $j$  と簡約表示  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$  を記す. つまり二分木の各葉は添字および簡約表示の 2 つのデータを保持する.  $m = 0$  のときはこれだけで操作は終了し  $E_{\mathbf{s}} = E_j$  となる.
2. 二分木の各葉に対して繰り返し次の操作を行う. 葉に描かれている添字を  $p$ , 簡約表示を  $s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_k}$  とおく.
  - (a)  $k = 0$  ならその葉に対して何の操作も行うことはない.
  - (b)  $k \geq 1$  の場合は簡約性より  $j_k \neq p$  となる.  $a_{j_k p} = 0$  の場合は  $T_{j_k}(E_p) = E_p$  より簡約表示の因子  $s_{j_k}$  を削除する. この操作を  $a_{j_k p} = -1$  となるまで繰り返す.
  - (c)  $s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{k-1}}(\alpha_p) \in \Delta_-$  となる場合は, exchange condition [9] より

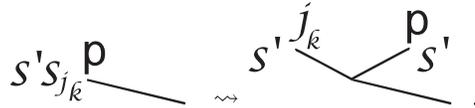
$$s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{k-1}} = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{l-1}} s_{j_{l+1}} \cdots s_{j_{k-1}} s_p$$

となる番号  $l$  が存在する. このとき  $a_{j_k p} = a_{p j_k} = -1$  および簡約則 (49) より

$$\begin{aligned} T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_{k-1}} T_{j_k}(E_p) &= T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_{l-1}} T_{j_{l+1}} \cdots T_{j_{k-1}} T_p T_{j_k}(E_p) \\ &= T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_{l-1}} T_{j_{l+1}} \cdots T_{j_{k-1}}(E_{j_k}) \end{aligned}$$

となるのでこの葉の添字  $p$  を  $j_k$  に書換え簡約表示を  $s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{l-1}} s_{j_{l+1}} \dots s_{j_{k-1}}$  に書換える. この操作を  $s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{k-1}}(\alpha_p) \in \Delta_+$  となるまで繰り返す.

- (d)  $s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{k-1}}(\alpha_p) \in \Delta_+$  となる場合は, これまでの操作より  $a_{j_k p} = a_{p j_k} = -1$  となるため, (41) より  $T_{j_k}(E_p) = [E_{j_k}, E_p]_q$  となり, しかも  $s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{k-1}} s_{j_k}$  および  $s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{k-1}} s_p$  はともに簡約表示となる. そこで次のように枝を分け, 二つの新しい葉を生成する. ただし  $s' := s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{k-1}}$  とおく. 新しい葉は左から順にそれぞれ添字が  $j_k, p$  となり, 簡約表示はともに  $s'$  となる.



- 3. すべての葉に描かれている簡約表示の長さが 0 になるまで上の操作を繰り返す. 各操作で簡約表示の長さは真に短くなるので, この手順は有限回の操作で終了する.

例えば  $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_3$  のとき,  $T_0 T_1 T_2(E_0)$  は次のように計算できる. ただし  $[n]$  がその葉の添字を表し, その左の数列  $i_1 i_2 \dots$  はその葉の簡約表示  $s_{i_1} s_{i_2} \dots$  を表す. また簡約表示の長さが 0 になったら添字を示す  $[\cdot]$  を取り払う.

$$T_0 T_1 T_2(E_0) = 012[0] = \overset{01[2]}{\underbrace{\quad}} \overset{01[0]}{\underbrace{\quad}} = \overset{0[1]}{\underbrace{\quad}} \overset{0[2]}{\underbrace{\quad}} 1 = \overset{0}{\underbrace{\quad}} \overset{1}{\underbrace{\quad}} \overset{0}{\underbrace{\quad}} \overset{2}{\underbrace{\quad}} 1.$$

よって  $T_0 T_1 T_2(E_0) = \left[ \left[ [E_0, E_1]_q, [E_0, E_2]_q \right]_q, E_1 \right]_q$  となる.

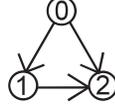
### 4 壁越え公式 (2) の導出

最後に壁越え公式 (2) の証明の概要を述べる [13]. 以下  $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_3$  とする. まず  $A_2^{(1)}$  型アフィン正ルート系において凸順序を定めるパラメータを  $w := s_1$ ,  $\Delta(w, -)$  上では  $J_0 = \dot{I} = \{1, 2\}$ ,  $J_1 := \{1\}$ ,  $J_2 = \emptyset$ ,  $s_0 := (s_0 s_1 s_2)^\infty = s_0 s_1 s_2 s_0 s_1 s_2 \dots \in \mathscr{W}_{J_0}^\infty$ ,  $s_1 := (s_{\delta - \alpha_1} s_1)^\infty \in \mathscr{W}_{J_1}^\infty$ ,  $y_1 := 1 \in W_{J_1}$ ,  $y_2 = 1 \in W_{J_2} = \{1\}$  と選び,  $\Delta(w, +) = \Delta(s_2 s_1, -)$  上では  $J_0 = \dot{I}$ ,  $J_1 := \{2\}$ ,  $J_2 = \emptyset$ ,  $s_0 := (s_0 s_2 s_1)^\infty$ ,  $s_1 := (s_{\delta - \alpha_2} s_2)^\infty$ ,  $y_1 := 1$ ,  $y_2 = 1$  と選ぶと, 次の 2 行型凸順序が得られる.

$$\begin{aligned}
 & \delta - \alpha_1 - \alpha_2 < \delta - \alpha_2 < 2\delta - \alpha_1 - \alpha_2 < 2\delta - \alpha_2 < \dots \\
 & < \alpha_1 < \delta + \alpha_1 < 2\delta + \alpha_1 < 3\delta + \alpha_1 < \dots \\
 & < \delta < 2\delta < 3\delta < 4\delta < \dots \\
 & \dots < 3\delta - \alpha_1 < 2\delta - \alpha_1 < \delta - \alpha_1 \\
 & \dots < \delta + \alpha_1 + \alpha_2 < \delta + \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_2.
 \end{aligned} \tag{51}$$

この凸順序から定まるルートベクトルを前節のアルゴリズムを用いて全て具体的に書き下す. また  $\tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  を Dynkin 図形の自己同型とすると, 簡約普遍  $R$  行列の一意性より

$$\Theta = \tau \widehat{\otimes} \tau(\Theta) \quad (52)$$



が示せる. 次に Dynkin quiver  $\sigma :=$  に対し

$$\left\{ [E_i, E_j]_q \otimes 1, 1 \otimes [F_i, F_j]_q \mid \sigma \text{ は辺 } i \rightarrow j \text{ をもつ} \right\} \subset U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^- \quad (53)$$

で生成される  $U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^-$  の両側イデアルの閉包を  $I$  とおき,  $D := U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^- / I$  とおく. すると標準射影  $\pi_\sigma : U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^- \rightarrow D$  は次の性質を持つことがわかる. なおこの構成自体は一般の  $U_q(\mathfrak{g})$  および Dynkin quiver  $\sigma$  に対しても可能である. またこの性質を持つ表現は,  $U_q^\pm$  をある代数上の  $q$ -差分作用素として実現することにより具体的に構成することもできる [13].

- $\sigma$  が辺  $i \rightarrow j$  をもつ  $\Rightarrow \pi_\sigma([E_i, E_j]_q \otimes 1) = \pi_\sigma(1 \otimes [F_i, F_j]) = 0$ .
- $y_i := \pi_\sigma(-(q_i - q_i^{-1})^2 E_i \otimes F_i)$  とおくと,  $\{y_0^{m_0} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \mid m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  は  $D$  において  $\mathbb{Q}(q)$ -線形独立.

よって  $y_0, y_1, y_2 \in D$  の代数関係式は  $y_1 y_0 = q^2 y_0 y_1, y_2 y_0 = q^2 y_0 y_2, y_2 y_1 = q^2 y_1 y_2$  で尽くされることがわかる. さらに  $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$  が単純ルートでないとき  $\pi_\sigma(E_{\leq, \alpha} \otimes 1) = 0$  となり, 虚ルートベクトルについても  $\pi_\sigma(T_1(\varphi_{i,n}) \otimes 1) = 0$  ( $\forall i = 1, 2; \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ) となっていることがルートベクトルの  $q$ -交換子積による表示からわかる. よって単純ルートベクトル以外は表現  $\pi_\sigma$  の像において消滅し, 簡約普遍  $R$  行列の積公式 (39) より  $\pi_\sigma(\Theta) = \mathbb{E}(y_2) \mathbb{E}(y_1) \mathbb{E}(y_0)$  となる. さらに多くの計算が必要となるが,  $\pi_\sigma(\tau \widehat{\otimes} \tau(\Theta))$  も同様にルートベクトルの表示を用いて全て計算することにより, 最終的に (52) から次の恒等式が得られる.

**定理 4.1 (主定理 [13])**  $q$  を不定元とし, 3 変数の非可換な形式冪級数環  $\mathbb{Q}(q)[[y_0, y_1, y_2]]$  に関係式  $y_1 y_0 = q^2 y_0 y_1, y_2 y_0 = q^2 y_0 y_2, y_2 y_1 = q^2 y_1 y_2$  を入れて定まる完備な位相  $\mathbb{Q}(q)$ -代数において, 正規積を  $:y_0^l y_1^m y_2^n := q^{lm+mn+nl} y_0^l y_1^m y_2^n$  ( $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) と定める. このとき次の恒等式が成立する.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(:y_2:) \mathbb{E}(:y_1:) \mathbb{E}(:y_0:) &= \left\{ \prod_{m \geq 0}^{\rightarrow} \mathbb{E}(:y_0^{m+1} y_1^m y_2^m:) \mathbb{E}(:y_0^{m+1} y_1^{m+1} y_2^m:) \right\} \mathbb{E}(:y_0 y_2:) \\ &\quad \times \mathbb{E}(-q: y_0 y_1 y_2:)^{-1} \mathbb{E}(-q^{-1}: y_0 y_1 y_2:)^{-1} \\ &\quad \times \mathbb{E}(:y_1:) \left\{ \prod_{m \geq 0}^{\leftarrow} \mathbb{E}(:y_0^m y_1^{m+1} y_2^{m+1}:) \mathbb{E}(:y_0^m y_1^m y_2^{m+1}:) \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

ただし  $\prod_{m \geq 0}^{\rightarrow} a_m := a_0 a_1 a_2 \dots$ ,  $\prod_{m \geq 0}^{\leftarrow} a_m := \dots a_2 a_1 a_0$  と書く.

実はこれは Reineke が得た恒等式 [3, (4.10)] の量子版になっている. そしてこの恒等式において  $y_0 = x_2$ ,  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = qx_1 x_2^{-1}$  を代入して特殊化すれば (2) が得られる.

追記.  $A_3^{(1)}$  型アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_4)$  の簡約普遍  $R$  行列の積表示をある 3 行型の凸順序から構成することによって, 恒等式 (3) の導出にも成功しているが, ルートベクトルの計算はさらに繁雑となる. 最後の恒等式 (4) も  $D_4^{(1)}$  型のものから導出できると予想されている [14].

## 参考文献

- [1] J. Beck. *Convex bases of PBW-type for quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 193-199.
- [2] N. Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras Chapters 4-6*, Springer-Verlag, Berlin, (2002). (English translation from French).
- [3] T. Dimofte, S. Gukov, Y. Soibelman. *Quantum Wall Crossing in  $N=2$  Gauge Theories*, Lett. Math. Phys. **95** (2011) 1-25, arXiv:0912.1346.
- [4] V. G. Drinfel'd. *Quantum groups*, Proc. Int. Congr. Math. Berkeley 1986, vol. 1, Amer. Math. Soc. (1987), 798-820.
- [5] K. Ito. *The classification of convex orders on affine root systems*, Comm. in Alg. **29** (2001), 5605-5630, arXiv:math/9912020.
- [6] K. Ito. *Parametrizations of infinite biconvex sets in affine root systems*, Hiroshima Math. J. **35** (2005), 425-451, arXiv:math/9911214.
- [7] 伊藤健. アフィン・リー代数の正ルート系上の凸順序の分類と量子展開代数の凸基底の構成及び普遍  $R$  行列の積公式, 名古屋大学学位論文, (2005).
- [8] K. Ito. *A new description of convex bases of PBW type for untwisted quantum affine algebras*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 133-183.
- [9] V. G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras* (3rd edn), Cambridge University Press, (1990).
- [10] M. Kontsevich, Y. Soibelman. *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, (2008, preprint), arXiv:0811.2435.
- [11] G. Lusztig. *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser, Boston, (1993).
- [12] M. Reineke, *Poisson automorphisms and quiver moduli*, J. Inst. Math. Jussieu, **9** (2010), 653-667, arXiv:0804.3214.
- [13] 菅原優. アフィン量子群の凸基底と普遍  $R$  行列について, 東北大学修士論文, (2019).
- [14] 寺崎敏志. 量子群の普遍  $R$  行列の積公式について, 東北大学修士論文, (2015).