On Soergel bimodules

阿部 紀行

概要

Soergel 両側加群の新たな定義に基づく圏化定理が得られたので，それについての報告を行う．

Soergel による圏化定理 [Soe07] から始めよう．(W, S) を Coxeter 系とし，k を体，Vを W の k 上の有限次元表現とする．以下常に S は有限であると仮定する．$R = S(V)$ を V 上の対称代数とする． これには自然に W が作用し， また Vの次数を 2 とすることで次数付き代数となる．S の元と共役な W の元を鏡映という．

定義 1　Vが鏡映忠実であるとは，次の二条件が満たされることである．

(1) Vは忠実な W の表現.

(2) $t \in W$ に対して，$\operatorname{codim}\bigl(\operatorname{Ker}(t-1)\bigr) = 1$ と t が鏡映であることは同値.

一般に， 次数加群 $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ に対して， その次数ずらし $M(k)$ を $M(k)^i = M^{i+k}$, $M(k) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M(k)^i$ により定める．$s \in S$ に対して $R^s = \{f \in R \mid s(f) = f\}$ とおき，次数付き両側 R 加群 B_s を $B_s = R \otimes_{R^s} R(1)$ により定める．

定義 2　$s_1, \ldots, s_l \in S$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対して，両側 R 加群

$$B_{s_1} \otimes_R B_{s_l} \otimes_R \cdots \otimes_R B_{s_l}(n)$$

を考える． この形の加群の直和の直和因子として現れる両側 R 加群を Soergel 両側加群という．

$\mathcal{S}$ を Soergel 両側加群からなる圏とする．$\mathcal{S}$ は部分加群や商加群をとる操作で閉じていないことに注意しておこう．$\mathcal{S}$ の分裂 Grothendieck 群 $[\mathcal{S}]$ とは，$\{[M] \mid M \in \mathcal{S}\}$ により生成され， 関係式 $[M_1 \oplus M_2] = [M_1] + [M_2]$ により定義される $\mathbb{Z}$ 加群である．$[\mathcal{S}]$ には $[M_1][M_2] = [M_1 \otimes_R M_2]$ および $v[M] = [M(1)]$ により $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 代数の構造が入る．ただし v は不定元である．Soergel の圏化定理は， この $[\mathcal{S}]$ が Hecke 環と同型になることを主張する．定理の正確な主張のために，Hecke 環 $\mathcal{H}$ を定義しておく．正規化は Soergel [Soe97] に従う．

定義 3　$\{H_w \mid w \in W\}$ で生成され，次の関係式により定義される $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 代数を $\mathcal{H}$ とおく．

- $(H_s - v^{-1})(H_s + v) = 0$ $(s \in S)$.

- $H_{w_1}H_{w_2} = H_{w_1w_2}$ $(w_1, w_2 \in W,\ \ell(w_1w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2))$.

よく知られているとおり，$\mathcal{H}$ は $\{H_w \mid w \in W\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 加群である．

Soergel の圏化定理の主張のためにいくつかの概念および記号を準備する．左次数 R 加群 M が自由であるとは，$M \simeq \oplus_i R(n_i)$ となる $n_i \in \mathbb{Z}$ が存在することである．このとき $\mathrm{grk}(M) = \sum_i v^{n_i} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ とおく．$x \in W$ は写像 $x : V^* \to V^*$ を定めるが，そのグラフ $\Gamma(x)$ を $\Gamma(x) = \{(v, xv) \mid v \in V^*\}$ と定める．すると，$B \in \mathcal{S}$ に対して $\mathrm{supp}(M) \subset \mathrm{Spec}(R \otimes R) = V^* \times V^*$ は $\Gamma(x)$ の有限個の和集合となることが，定義から容易にわかる．

定理 4（Soergel [Soe07]）　V が W の鏡映忠実な表現ならば，次が成り立つ．

(1) $x \in W$ に対して直既約な Soergel 両側加群 $B_x \in \mathcal{S}$ で，$\mathrm{supp}\, B_x = \bigcup_{y \le x} \Gamma(y)$ および $B_x|_{\Gamma(x)} \simeq R(\ell(x))$ を満たすものがただ一つ存在する．

(2) $\mathcal{S}$ の直既約対象はある $x \in W$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対して $B_x(n)$ と同型．

(3) $B \in \mathcal{S}$ と $x \in W$ に対して，次数付き左 R 加群 $B|_{\Gamma(x)}$ は自由加群である．$B \in \mathcal{S}$ に対して $\mathrm{ch}(B) = \sum_{x \in W} v^{-\ell(x)} \mathrm{grk}\big(B|_{\Gamma(x)}\big) H_x \in \mathcal{H}$ とおくと，$[B] \mapsto \mathrm{ch}(B)$ は $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 代数の同型 $[\mathcal{S}] \simeq \mathcal{H}$ を与える．

定理から，$\{\mathrm{ch}(B_x) \mid x \in W\}$ は $\mathcal{H}$ の基底を与える．$\mathrm{char}\, k = 0$ ならば，$\mathrm{ch}(B_x)$ は Kazhdan-Lusztig 基底と一致する．（(W, S) が簡約群の Weyl 群として与えられている場合は Soergel [Soe90] により示されている．一般の場合は Elias-Williamson [EW14] により証明された．）一般の場合は Kazhdan-Lusztig 基底とは一致せず，$\mathcal{H}$ の新たな基底を与える．近年の研究により，この基底は標数 p の体上で定義された簡約代数群の代数的な表現の既約指標と深く関わることがわかってきた．

Lusztig 予想に現れたのがアフィン Weyl 群に対する Kazhdan-Lusztig 多項式であったことから想像されるように，正標数における簡約代数群の表現論においてはアフィン Weyl 群に対する Soergel 両側加群を考えるのが自然である．この考えに基づき，Riche-Williamson [RW18] は，簡約代数群の傾加群の指標が $\mathrm{ch}(B_x)$ を使い記述されることを予想し，h を Coxeter 数とした時に $p \ge 2h - 2$ ならば既約指標を記述する公式がその予想から得られることを示した．Achar-Makisumi-Riche-Williamson [AMRW19] によりその後この指標公式が示されたため，$p \ge 2h - 2$ ならば，簡約代数群の既約表現の指標は $\mathrm{ch}(B_x)$ により与えられる．さて，その際の V であるが，$T \subset G$ を考えている簡約代数群および極大トーラス，$X^*(T)$ をその指標群とした時，$X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ を考えるのが自然である．しかし，これはアフィン Weyl 群の表現としては忠実ではなく，特に鏡映忠実にはなり得ない．従っ

て Soergel による定理をそのまま適用することはできない．Elias-Williamson [EW16] は，Vが鏡映忠実な場合に圏 $\mathcal{S}$ を生成元と関係式により記述し，その生成元と関係式により一般の（穏やかな条件を満たす）Vに対して新しく圏 $\mathcal{D}$ を定義し，その圏の Karoubian 包絡 $\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$ が Soergel の圏化定理の類似を満たすことを示した．Riche-Williamson の定式化では，この圏が使われている．

さて，Elias-Williamson による圏 $\mathcal{D}$ は，生成元と関係式により記述される．従って，もともとの $\mathcal{S}$ の定義とは一見かけ離れた形で定義される．しかも，その関係式は非常に複雑である．もともとの「両側加群的な」定義が存在しないかと問うのは自然であろう．本稿の目的はこの問いに答えを与えることである．

その構成を述べよう．定理 4 における B_x の特徴付けには，各 $x \in W$ に対するグラフ $\Gamma(x)$ が重要な役割を果たす．Vが忠実でないと，異なる $x \in W$ に対する $\Gamma(x)$ が一致してしまうということが起こり，これが定理 4 の成立を妨げている．この考察をもとに，次のような，各対象に $\mathrm{supp}(B)$ の情報を持たせた圏を考えることにしよう．Q を R の商体とする．次で定義される圏 $\mathcal{C}$ が，両側 R 加群の圏の代わりとなる．

定義 5　次数付き両側 R 加群 M と分解 $M \otimes_R Q = \oplus_{x\in W} M_Q^x$ の組 $\left(M, \left(M_Q^x\right)_{x\in W}\right)$ からなる圏を $\mathcal{C}$ と書く．ただし $m \in M_Q^x$ は $mf = x(f)m$ を全ての $f \in R$ に対して満たす．$\mathcal{C}$ における射 $\varphi\colon M \to N$ とは，次数 0 の両側 R 加群の準同型であって，$\varphi\left(M_Q^x\right) \subset N_Q^x$ を全ての $x \in W$ に対して満たすもののことである．

一般に両側 R 加群 M に対して，$m \in M|_{\Gamma(x)}$ は $mf = x(f)m$ を $f \in R$ に対して満たす．すなわち，M_Q^x は $M|_{\Gamma(x)}$ をもともとの情報として込めておいたものである．このことから，もし Vが忠実ならば分解 $M = \oplus_{x\in W} M_Q^x$ は M の両側 R 加群としての構造のみから定まり，よって $\mathcal{C}$ は両側 R 加群のなす圏の充満部分圏となっていることがわかる．$\mathcal{C}$ の対象において，第二成分はしばしば省略して書かれる．$M, N \in \mathcal{C}$ に対して，$M \otimes N \in \mathcal{C}$ を $M \otimes N = \left(M \otimes_R N, \left(\oplus_{yz=x} M_Q^y \otimes_Q N_Q^z\right)_{x\in W}\right)$ により定める．

以下，Elias-Williamson [EW16] に従い，Vに次の条件を課しておく．各 $s \in S$ に対して $\alpha_s \in V$, $\alpha_s^\vee \in V^*$ が与えられており，次を満たすことを仮定する．

(1) $\langle \alpha_s, \alpha_s^\vee \rangle = 2$.

(2) $s(v) = v - \langle v, \alpha_s^\vee \rangle \alpha_s$ $(v \in V)$.

(3) $\alpha_s \neq 0$, $\alpha_s^\vee \neq 0$.

$\mathrm{char}\, k \neq 2$ ならば，三つ目の条件は一つ目から従う．このとき，$B_s = R \otimes_{R^s} R$ に $\mathcal{C}$ の対象の構造を

$$\left(B_s\right)_Q^x = \begin{cases} Q\left(\delta_s \otimes 1 - 1 \otimes s(\delta_s)\right) & x = e, \\ Q\left(\delta_s \otimes 1 - 1 \otimes \delta_s\right) & x = s, \\ 0 & x \neq e, s \end{cases}$$

により定めることができる．ただし，$\delta_s \in V$ は $\langle \delta_s, \alpha_s^\vee \rangle = 1$ を満たす元であり，上記分解はこの元の取り方によらない．なお，この分解は $\mathrm{supp}_W(B_s) \subset \{e, s\}$ により一意的に定まる．後は同様に，圏 $\mathcal{S}$ を，$s_1, \ldots, s_l \in S, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$B_{s_1} \otimes \cdots \otimes B_{s_l}(n)$$

の形の対象の直和の直和因子から得られる対象全体からなる圏とする．この場合の圏化定理を主張する前に，次の仮定をおくこととする．

仮定 6　st の位数 m が有限となる組 $s, t \in S$ に対して，$M = B_s \otimes B_t \otimes \cdots$ および $N = B_t \otimes B_s \otimes \cdots$ を B_s, B_t を交互に m 個テンソルしたものとする．このとき，そのような全ての s, t に対して，ある射 $M \to N$ であって，$(1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \in M$ を $(1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \in N$ に移すものが存在する．

この条件を直接確認するのがどうするのがよいのか筆者にはわからないが，容易に確認ができる十分条件として以下がある．p がある程度大きい時，簡約代数群からくるアフィン Weyl 群とその表現はこの十分条件を満たす．

補題 7　$\langle s, t \rangle \subset W$ を $\{s, t\}$ の生成する部分群とする．もし st の位数が有限となる組 $s, t \in S$ に対して V の $\langle s, t \rangle$ への制限が鏡映忠実ならば，仮定 6 は s, t に対して満たされる．

証明　Soergel によるもともとの圏化定理（定理 4）を使う．w_0 を $\langle s, t \rangle$ の最長元とする．仮定から $\langle s, t \rangle$ は定理 4 を満たすので，B_{w_0} が存在し，これは M, N の直和因子となることがわかる．$M \twoheadrightarrow B_{w_0} \hookrightarrow N$ を適当に定数倍すれば，仮定の射となる．　□

$\mathrm{supp}_W B = \left\{ x \in W \mid B_x^Q \neq 0 \right\}$ とおく．また $B \to B \otimes Q = \oplus_{x \in W} B_Q^x \twoheadrightarrow B_Q^x$ の像を B^x とする．V が W の表現として忠実である場合は，$\mathrm{supp}\, B = \cup_{x \in \mathrm{supp}_W(B)} \mathit{\Gamma}(x)$ であり，B^x は $B|_{\mathit{\Gamma}(x)}$ と一致する．以上の仮定のもとで，定理 4 と全く同じ主張が成立する．念のため，この場合にも定理を書いておくことにしよう．

定理 8（[Abe19]）　仮定 6 の成立を仮定すると，次が成り立つ．

(1) 各 $x \in W$ に対して直既約な対象 $B_x \in \mathcal{S}$ で，$\mathrm{supp}_W B_x = \left\{ y \in W \mid y \leq x \right\}$ および $\left(B_x\right)^x \simeq R\left(\ell(x)\right)$ を満たすものがただ一つ存在する．

(2) $\mathcal{S}$ の直既約対象はある $x \in W$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対して $B_x(n)$ と同型．

(3) $B \in \mathcal{S}$ と $x \in W$ に対して左次数 R 加群 B^x は自由加群である．$B \in \mathcal{S}$ に対して $\mathrm{ch}(B) = \sum_{x \in W} v^{-\ell(x)} \mathrm{grk}\left(B^x\right) H_x \in \mathcal{H}$ とおくと，$[B] \mapsto \mathrm{ch}(B)$ は $\mathbb{Z}\left[v, v^{-1}\right]$ 代数の同型 $[\mathcal{S}] \simeq \mathcal{H}$ を与える．

V に関する若干の仮定のもとで，$\mathcal{S}$ は次の圏とも圏同値であることが示される．V が GKM 条件を満たすとは，任意の $w_1, w_2 \in W$ および $s_1, s_2 \in S$ に対して，$w_1 s_1 w_1^{-1} \neq w_2 s_2 w_2^{-1}$ ならば $w_1\left(\alpha_{s_1}\right)$ と $w_2\left(\alpha_{s_2}\right)$ は一次独立となることである．

- Elias-Williamson により定義された圏 $\mathcal{D}$ の Karoubian 包絡 $\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$．
- W が Kac-Moody 群の Weyl 群である場合に，旗多様体上のパリティ層のなす圏 [FW14]．
- V が GKM 条件を満たすならば，(W, S) に付随する Moment graph 上の射影的な層のなす圏 [Fie08]．

参考文献

[Abe19] N. Abe, *On Soergel bimodules*, arXiv:1901.02336.

[AMRW19] P. N. Achar, S. Makisumi, S. Riche, and G. Williamson, *Koszul duality for Kac–Moody groups and characters of tilting modules*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 1, 261–310.

[EW14] B. Elias and G. Williamson, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 3, 1089–1136.

[EW16] B. Elias and G. Williamson, *Soergel calculus*, Represent. Theory **20** (2016), 295–374.

[Fie08] P. Fiebig, *The combinatorics of Coxeter categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 8, 4211–4233.

[FW14] P. Fiebig and G. Williamson, *Parity sheaves, moment graphs and the p-smooth locus of Schubert varieties*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **64** (2014), no. 2, 489–536.

[RW18] S. Riche and G. Williamson, *Tilting modules and the p-canonical basis*, Astérisque (2018), no. 397, ix+184.

[Soe90] W. Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 421–445.

[Soe97] W. Soergel, *Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatoric[s] for tilting modules*, Represent. Theory **1** (1997), 83–114 (electronic).

[Soe07] W. Soergel, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 3, 501–525.