局所コンパクト群上のたたみ込みの L^p 収束性と Young の不等式の関係 *

東京大学 大学院数理科学研究科　里見 貴志 †
Takashi Satomi
Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

Abstract

$1 < p \leq \infty$ とユニモジュラーな局所コンパクト群 G に対し，G 上の L^p 関数 ϕ の n 回のたたみ込み ϕ^{*n} の $n \to \infty$ での振る舞いに注目する．このとき，任意の確率密度関数 $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し ϕ^{*n} が 0 に L^p 収束することと，G が開かつコンパクトな部分群を持たないことと，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ となるような $0 \neq \phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し $\|\phi * \psi\|_2 < 0.998\|\phi\|_1\|\phi\|_2$ となることと，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ となるような $0 \neq \phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し $\|\phi * \psi\|_2 < \|\phi\|_1\|\phi\|_2$ となることがすべて同値になる．とくに，G が Lie 群の場合は，任意の ϕ に対し ϕ^{*n} が 0 に L^p 収束することと，G の単位元を含む連結成分 G_0 がコンパクトでないことが同値になる．

1　はじめに

1.1　背景と主定理

ユニモジュラーな局所コンパクト群 G の (両側)Haar 測度を d とする．$1 \leq p \leq \infty$ と $\phi, \psi : G \to \mathbb{C}$ に対し，$\|\phi\|_p$ は ϕ の L^p ノルムを表す．ϕ と ψ のたたみ込み $\phi * \psi$ を

$$\phi * \psi(g) := \int \phi(h)\psi(h^{-1}g)dh$$

で定める．ただし，積分範囲を省略した場合はつねに G 全体での積分を考える．

このとき，以下の不等式が成り立つ．

定理 1.1（Young の不等式）　$1 \leq p, q, r \leq \infty$，$1/p + 1/q = 1 + 1/r$ とする．このとき，任意の $\phi \in L^p(G)$，$\psi \in L^q(G)$ に対し，$\phi * \psi \in L^r(G)$ となり

$$\|\phi * \psi\|_r \leq \|\phi\|_p\|\psi\|_q$$

が成り立つ．さらに，$p = q = r = 1$ のときは等号に強められる．

---

* 本研究は JSPS 科研費 JP19J22628 の助成を受けたものです．
† 日本学術振興会特別研究員 DC1・「数物フロンティア・リーディング大学院（FMSP）」コース生
E メールアドレス：tsatomi@ms.u-tokyo.ac.jp

$1 \le p \le \infty$，$\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$，$n = 1, 2, \cdots$ とすると，定理 1.1 より ϕ の n 回のたたみ込み ϕ^{*n} は $L^1(G) \cap L^p(G)$ に含まれ

$$\|\phi^{*n}\|_1 = \|\phi\|_1{}^n, \quad \|\phi^{*n}\|_p \le \|\phi\|_1 \|\phi^{*(n-1)}\|_p \le \cdots \le \|\phi\|_1{}^{n-1} \|\phi\|_p$$

となる．とくに，$\|\phi\|_1 = 1$ のとき

$$\|\phi^{*n}\|_p \le \|\phi^{*(n-1)}\|_p \le \cdots \le \|\phi\|_p$$

となる．

このとき，次の問題を考える．

問題 1.2　$1 < p \le \infty$ とする．次の条件 $P(p)$ をみたすような G の条件を求めよ．

$P(p)$: $\|\phi\|_1 = 1$ をみたすような任意の $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し，$n \to \infty$ で ϕ^{*n} は 0 に L^p 収束する．

注意 1.3　$\|\phi * \psi\|_p \le \||\phi| * |\psi|\|_p$ なので，条件 $P(p)$ は以下の条件 $P'(p)$ と同値である．

$P'(p)$: $\|\phi\|_1 = 1$ をみたすような任意の正値関数 $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し，$n \to \infty$ で ϕ^{*n} は 0 に L^p 収束する．

問題 1.2 は，以下のようなことを考えている．

ϕ が正値関数のとき，$\|\phi\|_1 = 1$ というのは ϕ が確率密度関数であることを表している．単位元 $e \in G$ を出発し，1 秒後に $g \in G$ だけ（左）移動する確率が $\phi(g)$ となるようなランダムウォークを考える．このとき，$\phi^{*n}(g)$ とは，n 秒後に g にいる確率を表している．そのため，ϕ^{*n} が 0 に L^p 収束するというのは，十分時間がたったときの確率密度が 0 に L^p 収束することを表している．

すなわち，条件 $P(p)$ というのは，1 秒後の確率分布がどのようなものであっても，十分時間がたった時に各点にいる確率が一様に広がっていくような G の条件である．

本稿では，問題 1.2 の答えとして，以下の定理を紹介する．

定理 1.4　ユニモジュラーな局所コンパクト群 G に関する以下の 8 つの条件 (i)-(vii)，(iv’) はすべて同値である．

(i) 開かつコンパクトな G の部分群 H が存在しない．

(ii) $0 < |H| < \infty$ となるような G の部分群 H が存在しない（ここで，$|H|$ は H の G 上 Haar 測度）．

(iii) $0 < |H| < \infty$ となるような開かつコンパクトな G の部分群 H が存在しない．

(iv) $\phi, \psi \ne 0$，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ をみたすような任意の $\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し，$\|\phi * \psi\|_2 < 0.998 \|\phi\|_1 \|\phi\|_2$ となる．

(iv') ある $c'' < 1$ が存在し，$\phi, \psi \neq 0$，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ をみたすような任意の $\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し，$\|\phi * \psi\|_2 < c''\|\phi\|_1\|\phi\|_2$ となる．

(v) $\phi, \psi \neq 0$，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ をみたすような任意の $\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し，$\|\phi * \psi\|_2 < \|\phi\|_1\|\phi\|_2$ となる．

(vi) 任意の $1 < p \leq \infty$ と $\|\phi\|_1 = 1$ をみたすような任意の $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し，$n \to \infty$ としたときに ϕ^{*n} は 0 に L^p 収束する（すなわち，任意の p に対し条件 $P(p)$ をみたす）．

(vii) ある $1 < p \leq \infty$ が存在し，$\|\phi\|_1 = 1$ をみたすような任意の $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し，$n \to \infty$ としたときに ϕ^{*n} は 0 に L^p 収束する（すなわち，ある p が存在し条件 $P(p)$ をみたす）．

Haar 測度の一般論から，G の部分群 H がコンパクトであることと $|H| < \infty$ であることが同値であり，G の部分群 H が開集合であることと $|H| > 0$ であることが同値であるので，(i)⇔(ii)⇔(iii) が従う．(iv)⇒(iv')⇒(v) は定義から従う．

また，以下の例 1.5 より (v)⇒(ii) の対偶と (vi)⇒(ii) の対偶が従う．

例 1.5　$0 < |H| < \infty$ となる部分群 $H \subset G$ が存在したとする．このとき，$\phi := 1_H/|H|$ とすると，$\|\phi\|_p = |H|^{1/p-1}$ かつ $\phi * \phi = \phi$ となる．$1 \leq p \leq \infty$ に対し $\|\phi * \phi\|_p = \|\phi\|_p = |H|^{1/p-1}$ となり，$\|\phi * \phi\|_p = \|\phi\|_1\|\phi\|_p$ が成り立つ．

また，$n = 1, 2, \ldots$ に対し $\phi^{*n} = \phi$ なので，$\|\phi^{*n}\|_p = \|\phi\|_p = |H|^{1/p-1}$ となる．よって，任意の $1 < p \leq \infty$ に対し条件 $P(p)$ をみたさない．

また，以下の議論から (iv')⇒(vii) が示せる．$p = 2$ の場合を示せばよい．

$n = 1, 2, \ldots$ に対し，$k := \lfloor \log_2 n \rfloor$ とする（$\lfloor \cdot \rfloor$ は底関数）．このとき，$2^k \leq n$ となるので，(iv') を繰り返し使って

$$\|\phi^{*n}\|_2 \leq \|\phi^{*2^k}\|_2 \leq c''\|\phi^{*2^{k-1}}\|_2 \leq \cdots \leq c''^k\|\phi\|_2 \leq c''^{\log_2 n-1}\|\phi\|_2$$

となる．$c'' < 1$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi^{*n}\|_2 \leq \lim_{n\to\infty} c''^{\log_2 n-1}\|\phi\|_2 = 0$$

となる．よって (iv')⇒(vii) が示された．

(i)⇒(iv') は以下の定理 1.6 と補題 1.9 から証明できる．

定理 1.6（Fournier [3, Thm.1]）　局所コンパクト群 G は開かつコンパクトな部分群を持たないとする．このとき，$\phi, \psi \neq 0$ をみたすような任意の $\phi, \psi \in L^{4/3}(G)$ に対し

$$\|\phi * \psi\|_2 < (1 - 3 \cdot 10^{-7})\|\phi\|_{4/3}\|\psi\|_{4/3}$$

となる．

定理 1.6 は，G が開かつコンパクトな部分群を持たないという条件を加えることで定理 1.1 の不等式の評価が改良できることを主張している．

注意 1.7　$1 \leq p, q, r \leq \infty$，$1/p + 1/q = 1 + 1/r$ とする．このとき，ある $c_{p,q} < 1$ が存在し，開かつコンパクトな部分群を持たないような任意の G と，$\phi, \psi \neq 0$ をみたすような任意の $\phi \in L^p(G), \psi \in L^q(G)$ に対し

$$\|\phi * \psi\|_r < c_{p,q}\|\phi\|_p\|\psi\|_q$$

となることを [3] では示している．

また，G が可換群の場合には，この主張は以下のように強められている．

定理 1.8（Eisner-Tao [2, Prop.5.4]）　$1/p + 1/q \leq 1$ をみたすような $1 \leq p, q \leq \infty$ に対し，ある $\epsilon > 0$ が存在し以下をみたす．G を可換な局所コンパクト群とし，$1/p + 1/q = 1 + 1/r$ とする．$\phi, \psi \neq 0$ をみたすような $\phi \in L^p(G), \psi \in L^q(G)$ が

$$\|\phi * \psi\|_r \geq (1 - \epsilon)\|\phi\|_p\|\psi\|_q$$

をみたすならば，ある開かつコンパクトな G の部分群 $H \subset G$ と $g, g' \in G$ が存在し

$$\||\phi| - 1_{gH}\|_p \leq \epsilon\|\phi\|_p, \quad \||\psi| - 1_{g'H}\|_q \leq \epsilon\|\psi\|_q$$

が成り立つ．

また，G が（非可換でもよい）捩れのない離散群の場合にも定理 1.8 と同様の主張が成り立つことが示されている (Charalambides-Christ [1, Thm.1.1])．

補題 1.9（Riesz-Thorin の定理）　測度空間 X の L^p ノルムを $\|\cdot\|_p$ と表す．$1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ とし

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$$

となるような $0 \leq \alpha \leq 1$ をとる．このとき，任意の $\phi \in L^p(X) \cap L^q(X)$ に対し $\phi \in L^r(X)$ となり

$$\|\phi\|_r \leq {\|\phi\|_p}^{\alpha}{\|\phi\|_q}^{1-\alpha}$$

をみたす．

定理 1.6 と補題 1.9 を使って (i)⇒(iv’) が以下のように示せる．

$c' := 1 - 3 \cdot 10^{-7}$ とする．$\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ が $\phi, \psi \neq 0$ をみたすとする．このとき，補題 1.9 より $\phi, \psi \in L^{4/3}(G)$ となり

$$\|\phi * \psi\|_2 < c'\|\phi\|_{4/3}\|\psi\|_{4/3} \leq c'(\|\phi\|_1\|\phi\|_2\|\psi\|_1\|\psi\|_2)^{1/2}$$

となる．とくに，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ ならば

$$\|\phi * \psi\|_2 < c'\|\phi\|_1\|\phi\|_2$$

となるので，(i)⇒(iv') が示された．

よって，定理 1.4 を証明するためには，あとは (vii)⇒(vi) と (ii)⇒(iv) を示せばよい．

注意 1.10　(iv) 内の 0.998 という値は，正確には以下の値から出てきたものである．

α に関する 4 次方程式

$$\begin{aligned}&2\alpha^4 + (20c^2 - 21)\alpha^3 + (36c^4 - 92c^2 + 56)\alpha^2 \\ &\quad + (32c^6 - 164c^4 + 232c^2 - 100)\alpha - 64c^6 + 192c^4 - 192c^2 + 64 = 0\end{aligned}$$

の 2 番目に大きな実数解を c_1 とする．また，α に関する 4 次方程式

$$\begin{aligned}&\alpha^4 + (14c^2 - 14)\alpha^3 + (32c^4 - 52c^2 + 20)\alpha^2 \\ &\quad + (-128c^6 + 496c^4 - 608c^2 + 240)\alpha + 512c^6 - 1536c^4 + 1536c^2 - 512 = 0\end{aligned}$$

の 1 番目に大きな実数解を α_0 とし

$$c_2 := -\frac{(\alpha_0 + 2c^2 - 2)^2(\alpha_0^2 + (8c^2 - 9)\alpha_0 - 16c^2 + 16)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 8c^2 - 8)}$$

とする．

後述の 2.2 節では，$2c_2 - 1 > c_1$ をみたすような任意の $c < 1$ に対し，以下の命題を証明している．

命題 1.11　ユニモジュラーな局所コンパクト群 G が $0 < |H| < \infty$ となるような G の部分群 H を持たないとする．このとき，$\phi, \psi \neq 0$，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ をみたすような任意の $\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し，$\|\phi * \psi\|_2 < c\|\phi\|_1\|\phi\|_2$ となる．

命題 1.11 の主張は (ii)⇒(iv) の 0.998 という値を $2c_2 - 1 > c_1$ をみたすような $c < 1$ に取り替えたものになっている．このとき，$2c_2 - 1 > c_1$ をみたすような c の下限は $c = 0.997741\cdots$ となり，$\|\phi * \psi\|_2 < c\|\phi\|_1\|\phi\|_2$ という不等式は c の値が小さいほど強くなるので，とくに 0.998 のときに成り立つ．

1.2　具体例

以下では定理 1.4 のいくつかの具体例を説明する．

例 1.12　単位元 $e \in G$ を含むような G の連結成分を G_0 とする．G の部分群 $H \subset G$ が開集合ならば，H は閉集合でもあるので $G_0 \subset H$ となる．よって G_0 がコンパクトでないと

き，条件 $P(p)$ をみたす．また，G_0 が開かつコンパクトであるとき，条件 $P(p)$ をみたさない．

とくに，G が Lie 群ならば G_0 は開集合になるので，Lie 群 G が条件 $P(p)$ をみたすための必要十分条件は G_0 がコンパクトでないことである．

例 1.13　$d = 1, 2, \ldots$ とする．$G = \mathbb{R}^d$ のとき，任意の $1 < p \leq \infty$ に対し条件 $P(p)$ をみたす．

とくに $p = 2$ のときを考える．$\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\hat{\phi}(\xi) := \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\phi(x)dx$$

とすると

$$\|\phi^{*n}\|_2{}^2 = \|\hat{\phi}^n\|_2{}^2 = \int |\hat{\phi}(\xi)|^{2n}d\xi$$

となる．よって (vi) から，$\|\phi\|_1 = 1$ をみたすような任意の $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int |\hat{\phi}(\xi)|^{2n}d\xi = \lim_{n\to\infty}\|\phi^{*n}\|_2{}^2 = 0$$

となるので，$\xi \in \mathbb{R}^d$ についてほとんどいたるところ $|\hat{\phi}(\xi)| < 1$ となることが分かる．

2　定理 1.4 の証明

2.1　(vii)⇒(vi) の証明

(vii)⇒(vi) を示すため，以下の補題を準備する．

補題 2.1　$1 < p < \infty$，$k \geq 1 + 1/(p-1)$ とする．このとき，任意の $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対し，$\phi^{*k} \in L^\infty(G)$ となり

$$\|\phi^{*k}\|_\infty \leq \|\phi\|_1{}^{k-1-1/(p-1)}\|\phi\|_p{}^{1+1/(p-1)}$$

となる．

証明　$k \geq 1 + 1/(p-1)$ より $1 < 1 + 1/(k-1) \leq p$ となるので，補題 1.9 より $\phi \in L^{1+1/(k-1)}(G)$ で

$$\|\phi\|_{1+1/(k-1)} \leq \|\phi\|_1{}^{1-1/k-1/k(p-1)}\|\phi\|_p{}^{1/k+1/k(p-1)}$$

となる．よって，定理 1.1 を繰り返し使うことで

$$\|\phi^{*k}\|_\infty \leq \|\phi\|_{1+1/(k-1)}{}^k \leq \|\phi\|_1{}^{k-1-1/(p-1)}\|\phi\|_p{}^{1+1/(p-1)}$$

となる．□

(vii)$\Rightarrow$(vi) の証明に戻る．任意の $1 < p < \infty$ に対し，G が条件 $P(p)$ をみたすことと G が条件 $P(\infty)$ をみたすことが同値であることを示せばよい．

まず，G が条件 $P(p)$ をみたすならば G が条件 $P(\infty)$ をみたすことを示す．

$\phi \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$，$\|\phi\|_1 = 1$ とする．$k := 1 + \lceil 1/(p-1) \rceil$（$\lceil \cdot \rceil$ は天井関数）とし，n を $n \geq k$ をみたすような整数とする．$\phi \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$ より $\phi^{*\lfloor n/k \rfloor} \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$ なので，補題 1.9 より $\phi^{*\lfloor n/k \rfloor} \in L^p(G)$ となる．補題 2.1 より

$$\|\phi^{*n}\|_\infty \leq \|\phi^{*(k\lfloor n/k \rfloor)}\|_\infty \leq \|\phi^{*\lfloor n/k \rfloor}\|_p{}^{1+1/(p-1)}$$

となる．従って，G が条件 $P(p)$ をみたすことより

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi^{*n}\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \|\phi^{*\lfloor n/k \rfloor}\|_p{}^{1+1/(p-1)} = \lim_{n\to\infty} \|\phi^{*n}\|_p{}^{1+1/(p-1)} = 0$$

となり，条件 $P(\infty)$ をみたすことが示された．

次に，G が条件 $P(\infty)$ をみたすならば G が条件 $P(p)$ をみたすことを示す．

$\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$，$\|\phi\|_1 = 1$ とする．$k := 1 + \lceil 1/(p-1) \rceil$ とすると，補題 2.1 より $\phi^{*k} \in L^\infty(G)$ で

$$\|\phi^{*k}\|_\infty \leq \|\phi\|_p{}^{1+1/(p-1)}$$

となる．補題 1.9 より

$$\|\phi^{*n}\|_p \leq \|\phi^{*(k\lfloor n/k \rfloor)}\|_p \leq \|\phi^{*(k\lfloor n/k \rfloor)}\|_\infty{}^{1-1/p}$$

となるので，G が条件 $P(\infty)$ をみたすことより

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi^{*n}\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \|\phi^{*(k\lfloor n/k \rfloor)}\|_\infty{}^{1-1/p} = \lim_{n\to\infty} \|\phi^{*n}\|_\infty{}^{1-1/p} = 0$$

となり，条件 $P(p)$ をみたすことが示された．

以上より条件 $P(p)$ と条件 $P(\infty)$ が同値となり，(vii)$\Rightarrow$(vi) が示された．

2.2　(ii)$\Rightarrow$(iv) の証明

最後に (ii)$\Rightarrow$(iv) の対偶を示す．任意の $\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対し $\|\phi * \psi\|_2 \leq \||\phi| * |\psi|\|_2$ なので，正値関数の場合のみ考えればよい．

$\phi, \psi \neq 0$，$\|\phi\|_1 = \|\psi\|_1$，$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2$ かつ $\|\phi * \psi\|_2 \geq c\|\phi\|_1\|\phi\|_2$ をみたすような正値関数 $\phi, \psi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ が存在したとする．

以降，ϕ, ψ と G の Haar 測度を適当に定数倍することで $\|\phi\|_1 = \|\phi\|_2 = \|\psi\|_1 = \|\psi\|_2 = 1$ としてよい．また，$0 < c_1 < c_2 < 1$ を注意 1.10 で定めたものとする．

このとき，次の定理を示せばよい．

定理 2.2

$$H := \left\{ g \in G \;\middle|\; \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh \geq c_2 \right\}$$

は G の部分群になり，$0 < |H| < 1/c_2$ となる．

注意 2.3　$c = 0.998$ のとき，$c_1 = 0.06998\cdots$，$c_2 = 0.56701\cdots$ となる．

以下の (ii)⇒(iv) の証明では，$2c_2 - 1 > c_1$ であることと，任意の $c_1 < x < c_2$ に対し

$$\alpha < x < -\frac{(\alpha + 2c^2 - 2)^2(\alpha^2 + (8c^2 - 9)\alpha - 16c^2 + 16)}{\alpha^2(\alpha + 8c^2 - 8)}$$

となる $8(1 - c^2) < \alpha < 1$ が存在することを使う．

$0 < \delta < 1$ に対し，$A(\delta) := \{g \in G \mid \phi * \psi(g) \geq \delta\}$ とする．

補題 2.4　$0 \leq \delta < 1$ ならば

$$\int_{A(\delta)} \phi * \psi(g)dg \geq \frac{c^2 - \delta}{1 - \delta}$$

となる．

証明　定理 1.1 より $\|\phi * \psi\|_\infty \leq \|\phi\|_2\|\psi\|_2 \leq 1$ なので

$$\begin{aligned} c^2 &\leq \int_{A(\delta)} \phi * \psi(g)^2 dg + \int_{A(\delta)^c} \phi * \psi(g)^2 dg \\ &\leq \int_{A(\delta)} \phi * \psi(g)dg + \delta \int_{A(\delta)^c} \phi * \psi(g)dg \\ &= \delta + (1 - \delta)\int_{A(\delta)} \phi * \psi(g)dg \end{aligned}$$

となる．よって

$$\int_{A(\delta)} \phi * \psi(g)dg \geq \frac{c^2 - \delta}{1 - \delta}$$

となる．□

補題 2.5　$\alpha > 0$，$g \in G$ とする．このとき

$$\alpha \geq \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh$$

ならば

$$g \in A\left(1 - \frac{2(1 - c^2)}{\alpha}\right)^{-1} A\left(1 - \frac{2(1 - c^2)}{\alpha}\right)$$

となる．

証明　$\delta := 1 - 2(1-c^2)/\alpha$ とする．任意の $g \in G$ に対し $g \notin A(\delta)^{-1}A(\delta)$ ならば

$$\int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh < \alpha$$

となることを示せばよい．$g \notin A(\delta)^{-1}A(\delta)$ より，任意の $h \in G$ に対し $h^{-1}g \notin A(\delta)$ または $h^{-1} \notin A(\delta)$ をみたす．よって補題 2.4 より

$$\begin{aligned}
&\int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh \\
&\leq \int 1_{A(\delta)^c}(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh + \int \phi * \psi(h^{-1}g)1_{A(\delta)^c}(h^{-1})\phi * \psi(h^{-1})dh \\
&\leq \int 1_{A(\delta)^c}(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1}g)dh + \int 1_{A(\delta)^c}(h^{-1})\phi * \psi(h^{-1})dh \\
&< 2\left(1 - \frac{c^2-\delta}{1-\delta}\right) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

となるので，示された．　□

補題 2.6　$\tilde{\phi}(g) := \phi(g^{-1})$ とする．$g_1, g_2 \in A(\delta)$ ならば

$$\phi * \tilde{\phi}(g_1 g_2^{-1}) = \int \phi(g_1 h)\phi(g_2 h)dh \geq 4\delta - 3$$

となる．

証明　$j = 1, 2$ とする．$\|\phi\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$ より

$$\int (\phi(g_j h) - \psi(h^{-1}))^2 dh = 2(1 - \phi * \psi(g_j)) \leq 2(1-\delta)$$

となる．よって $L^2(G)$ に関する Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned}
&\left(\int (\phi(g_1 h) - \phi(g_2 h))^2 dh\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int (\phi(g_1 h) - \psi(h^{-1}))^2 dh\right)^{1/2} + \left(\int (\phi(g_2 h) - \psi(h^{-1}))^2 dh\right)^{1/2} \\
&\leq 2(2(1-\delta))^{1/2}
\end{aligned}$$

となるので

$$2\left(1 - \int \phi(g_1 h)\phi(g_2 h)dh\right) = \int (\phi(g_1 h) - \phi(g_2 h))^2 dh \leq 8(1-\delta)$$

となる．よって

$$\int \phi(g_1 h)\phi(g_2 h)dh \geq 4\delta - 3$$

となる．　□

補題 2.7　$3/4 < \delta \le 1$，$g_1, g_2 \in A(\delta)$ ならば

$$\int \phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2)dh \ge \delta^2 \left(2 \cdot \frac{c^2 - \delta}{1-\delta} - \frac{1}{4\delta - 3}\right)$$

となる．

証明　$f(g) := 1_{A(\delta)}(g)\phi * \psi(g)$ とすると

$$\phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2) \ge \delta^2 \left(f(h^{-1}g_1) + f(h^{-1}g_2) - \frac{\phi * \tilde{\phi}(h)}{4\delta - 3}\right) \tag{1}$$

となる．実際，$h^{-1}g_1 \in A(\delta)$ または $h^{-1}g_2 \in A(\delta)$ のとき $h \in A(\delta)A(\delta)^{-1}$ なので，$h^{-1}g_1, h^{-1}g_2 \in A(\delta)$ ならば補題 2.6 より

$$\begin{aligned}\phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2) &\ge \delta^2 \\ &\ge \delta^2(\phi * \psi(h^{-1}g_1) + \phi * \psi(h^{-1}g_2) - 1) \\ &\ge \delta^2 \left(\phi * \psi(h^{-1}g_1) + \phi * \psi(h^{-1}g_2) - \frac{\phi * \tilde{\phi}(h)}{4\delta - 3}\right)\end{aligned}$$

となり，$h^{-1}g_1 \in A(\delta)$，$h^{-1}g_2 \notin A(\delta)$ ならば

$$\begin{aligned}\phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2) &\ge 0 \\ &\ge \delta^2(\phi * \psi(h^{-1}g_1) - 1) \\ &\ge \delta^2 \left(\phi * \psi(h^{-1}g_1) - \frac{\phi * \tilde{\phi}(h)}{4\delta - 3}\right)\end{aligned}$$

となる．

式 (1) と補題 2.4 より

$$\begin{aligned}&\int \phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2)dh \\ &\ge \delta^2 \left(\int f(h^{-1}g_1)dh + \int f(h^{-1}g_2)dh - \int \frac{\phi * \tilde{\phi}(h)}{4\delta - 3}dh\right) \\ &\ge \delta^2 \left(2 \cdot \frac{c^2 - \delta}{1-\delta} - \frac{1}{4\delta - 3}\right)\end{aligned}$$

となる．□

補題 2.8

$$c_1 < \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh < c_2$$

となる $g \in G$ は存在しない．

証明　$g \in G$ が
$$c_1 < \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh < c_2$$
をみたすとして，矛盾を導く．

このとき
$$\alpha < \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh < -\frac{(\alpha + 2c^2 - 2)^2(\alpha^2 + (8c^2 - 9)\alpha - 16c^2 + 16)}{\alpha^2(\alpha + 8c^2 - 8)} \quad (2)$$
をみたすような $\alpha > 8(1 - c^2)$ が存在する．$\delta := 1 - 2(1 - c^2)/\alpha$ とすると，補題 2.5 より $g \in A(\delta)^{-1}A(\delta)$ となる，すなわちある $g_1, g_2 \in A(\delta)$ が存在して $g = g_1^{-1}g_2$ となる．$\alpha > 8(1 - c^2)$ より $3/4 < \delta \leq 1$ をみたすので，補題 2.7 より
$$\begin{aligned}
\alpha &\geq \int \phi * \psi(h^{-1}g_1^{-1}g_2)\phi * \psi(h^{-1})dh \\
&= \int \phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2)dh \\
&\geq \delta^2 \left(2 \cdot \frac{c^2 - \delta}{1 - \delta} - \frac{1}{4\delta - 3}\right) \\
&= -\frac{(\alpha + 2c^2 - 2)^2(\alpha^2 + (8c^2 - 9)\alpha - 16c^2 + 16)}{\alpha^2(\alpha + 8c^2 - 8)}
\end{aligned}$$
となるが，これは式 (2) に矛盾する．

よって示された．□

定理 2.2 の証明　補題 2.8 より
$$H = \left\{ g \in G \,\middle|\, \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh > c_1 \right\} \quad (3)$$
となる．$g_1, g_2 \in H$ とすると
$$\int \phi * \psi(h^{-1}g_1^{-1}g_2)\phi * \psi(h^{-1})dh = \int \phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2)dh$$
となる．任意の $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1$ に対し $x_1x_3 \geq x_1x_2 + x_2x_3 - x_2$ となることに注意すると
$$\begin{aligned}
&\int \phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1}g_2)dh \\
&\geq \int \phi * \psi(h^{-1}g_1)\phi * \psi(h^{-1})dh + \int \phi * \psi(h^{-1}g_2)\phi * \psi(h^{-1})dh - \int \phi * \psi(h^{-1})dh \\
&\geq 2c_2 - 1 \\
&\geq c_1
\end{aligned}$$

となるが，式 (3) より $g_1^{-1}g_2 \in H$ となる．よって $H^{-1}H \subset H$ となるので H は G の部分群となる．

式 (3) より H は開集合なので $|H| > 0$ である．また

$$c_2|H| \leq \int \phi * \psi(h^{-1}g)\phi * \psi(h^{-1})dh = 1$$

なので，$0 < |H| < 1/c_2$ となる． □

参考文献

[1] Marcos Charalambides and Michael Christ, *Near-extremizers for Young's inequality for discrete groups*, arXiv:1112.3716.

[2] Tanja Eisner and Terence Tao, *Large values of the Gowers-Host-Kra seminorms*, J. Anal. Math. **117** (2012), 133–186, DOI 10.1007/s11854-012-0018-2. MR2944094

[3] John J. F. Fournier, *Sharpness in Young's inequality for convolution*, Pacific J. Math. **72** (1977), no. 2, 383–397. MR461034