# Half-integrality of the closed SO(3)-orbit on the flag variety of $SL_3$

東京大学大学院数理科学研究科　林 拓磨
Takuma Hayashi
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

**概要**

本稿では [22] に基づき, $SL_3(\mathbb{C})$ の旗多様体の閉 $SO(3)(\mathbb{C})$ 軌道の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式の構成の概要を述べる. また, その研究背景となる保型 $L$ 関数の特殊値の有理 (整数) 性問題について簡単に説明する.

## 1　背景

近年, 代数体やその整数環またはその適当な局所化上定義された Harish-Chandra 加群の研究が Micharel Harris 氏, Günter Harder 氏, Fabian Januszewski 氏などによって進められている. 彼らの研究の背景には (特にコホモロジカル) 保型 $L$ 関数や Rankin-Selberg $L$ 関数の特殊値の有理性 (または整数性) という問題があり, すでに関連する論文もいくらか出ている ([15], [26], [24] など). 本節ではまず保型 $L$ 関数の特殊値の有理性について彼らの研究が関連する範囲で非専門家なりに説明することを試みたい. より正確なこと, 詳しいことは保型表現論の専門家に尋ねることを勧める. 主に表現論的視点を強調したため, 局所対称空間のコホモロジーについてはほとんど言及しないことにしたことも明記しておく.

保型 $L$ 関数の特殊値の有理性とは大雑把に言えば, 保型 $L$ 関数のいくつかの点での値を (0 でない) 代数的数と周期と呼ばれるある定数に分離することである. 以下よく知られた例を 2 つ挙げておこう.

**例 1.** Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を考えよう. これは $GL_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の自明表現に付随する保型 $L$ 関数と思うことができる. ここで $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ のアデール環である. このとき, 良く知られているように正整数 $m$ に対して

$$\zeta(2m)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m}$$

である。ここで $B_{2m}$ は第 $2m$ 項のベルヌーイ数である. 特に $\frac{\zeta(2m)}{(2\pi\sqrt{-1})^{2m}}\in\mathbb{Q}^{\times}\subset\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}^{\times}$ は $\mathbb{Q}$ の単元の集合) である.

**例 2** ([28])**.** 複素上半平面上の正則関数 $\Delta$ を

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

と定義する．ここで $q = e^{2\pi i\tau}$ である．$\Delta$ は Ramanujan のデルタ関数と呼ばれる, ウェイト 12 の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ は整数環) に関する正規化された唯一の一変数正則 (Hecke 固有) 尖点形式である．$L(s,\Delta)$ を $\Delta$ に付随する保型 $L$ 関数とする．すなわち, $\Delta$ の Fourier 展開を $\Delta(\tau) = \sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n$ と書くとき, $L(s,\Delta) = \sum_{n\geq 1}\tau(n)n^{-s}$ である．また,

$$\Lambda(s,\Delta) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\Delta)$$

とおく．ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数である．この時周期と呼ばれるある 2 つの実数 $\omega^+$, $\omega^-$ があり,

$$\Lambda(1,\Delta) = \Lambda(11,\Delta) = \frac{192}{691}\omega^-$$

$$\Lambda(2,\Delta) = \Lambda(10,\Delta) = \frac{384}{5}\omega^+$$

$$\Lambda(3,\Delta) = \Lambda(9,\Delta) = \frac{16}{135}\omega^-$$

$$\Lambda(4,\Delta) = \Lambda(8,\Delta) = 40\omega^+$$

$$\Lambda(5,\Delta) = \Lambda(7,\Delta) = \frac{8}{105}\omega^-$$

$$\Lambda(6,\Delta) = 32\omega^+$$

となる．特に, $\Omega^+ = \omega^+$, $\Omega^- = \omega^-\sqrt{-1}$ と置き換えると $1 \leq n \leq 11$ なる整数 $n$ に対して

$$\frac{L(n,\Delta)}{(2\pi\sqrt{-1})^n\Omega^{(-1)^n}(\Delta)} \in \mathbb{Q}^\times$$

が言える．ここで, $\Omega^1$ と $\Omega^{-1}$ は各々 $\Omega^+$, $\Omega^-$ のこととする．証明についても少しだけ触れておく．まず尖点形式の周期と呼ばれる積分を考える．周期は Mellin 変換で表すことができ, 特に固有尖点形式の $L$ 関数の特殊値の情報を持っている．一方, 周期はコサイクル条件を満たす．より強く, 放物型コサイクルと呼ばれるコサイクルになる．そこで, 実際に関係式を書き下して計算してみると $6 \leq n \leq 10$ について上述の $\Lambda(n,\Delta)$ の関係式が得られる．実は尖点形式の空間は周期により内部コホモロジー (または Eichler コホモロジー, 放物型コホモロジー) と呼ばれる群コホモロジーの類似物 $H^1_!(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Sym}^{10}\,\mathbb{R})$ と同型になることも知られている (Eichler-Shimura 同型)．内部コホモロジーは代数的に定義されるので整数環上定義でき, さらに Eichler-Shimura 同型が Hecke 同変になるような Hecke 作用を持つ．一般に, 固有尖点形式の Fourier 係数の代数性はこの系として得られることを注意しておく．

$n = 11$ の場合はもう少し複雑である．ここでは複雑な議論を極力避けるため, [32] 5.2 の後半部分にある証明を紹介する．高ウェイトの場合への一般化については例えば [32] 5.2 の前半部分や [31], [27] を見るとよいだろう．まず尖点形式の空間を斉次多項式の空間 $\mathrm{Sym}^{10}\mathbb{R}^2$ のある 2 次元の部分空間に埋めこむ．コホモロジーという商空間でなく, 斉次多項式の空間に埋め込むことで $L$ 関数の特殊値 (積分値) を直接扱えることが肝心である．この多項式の空間の上には Hecke 作用を定義することができ, さらにこの埋め込みが Hecke 作用と交換する．Hecke 作用で同時固有空間分解すると 2 次元の空間は異なる 2 つの固有空間に分解するとわかる．実際, $\Delta$ から来ない方の固有値は各素数 $p$ に対して $p^{11}+1$ (つまり適当な正規化の下で Eisenstein 級数の Fourier 係数) が現れる．$\Delta$ から来る方の固有ベクトルを直接求めることで上述の結果が得られる．

次の予想は大域 Langlands 対応の関手性や [3] Conjecture 2.1 を通じて $L$ 関数の特殊値の代数性を統一するであろうと期待されている:

**予想 3** ([7] Conjecture 2.8)**.** $E$ を代数体, $M$ を体上定義された臨界な $E$ 係数モチーフとする．$E$ の複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込み $\sigma$ に対し, $L(\sigma, M, s)$ を $M$ と $\sigma$ に付随する $L$ 関数とする．$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{\mathrm{Hom}(E,\mathbb{C})}; e \otimes z \mapsto (\sigma(e)z)$ により $L^*(s, M) = (L(\sigma, M, s))_{\sigma \in \mathrm{Hom}(E,\mathbb{C})}$ を $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ に値を持つ関数とみなす．$E$ の複素数体への (ある) 埋め込み $\sigma$ について $L(\sigma, M, 0) \neq 0$ であると仮定する．このとき, ある幾何学的に定められる定数 $c^+(M) \in (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^\times / E^\times$ を用いて $L^*(M, 0) \in c^+(M) \cdot E^\times$ と表せる．

$L$ 関数の特殊値の整数性とは, 代数体 $E$ を $E$ の整数環 $\mathcal{O}_E$ の局所化 $\mathcal{O}_{E,f}$ に置き換えることを指す．例えば例 2 の場合で言えば $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Z}[1/2, 1/3, 1/5, 1/7, 1/691]$ に書き換えることができる．

Harder 氏や Raghuram 氏, Januszewski 氏はとりわけ $\mathrm{GL}_n$ の保型表現, 特にコホモロジカル尖点的保型表現を調べている．その理由は, 大域 Langlands 対応の関手性を信じれば, 一般の保型 $L$ 関数を理解するには $\mathrm{GL}_n$ の保型 $L$ 関数を理解すればよいという了解によるだろう．$\mathrm{GL}_n$ の場合強重複度一定理が成り立つから調べやすいという技術的側面もあると思う．ここで一般に有理数体上の簡約代数群の保型表現 $\Pi$ がコホモロジカルであるとは制限テンソル分解 $\Pi \cong \bigotimes' \Pi_v$ において無限素点成分 $\Pi_\infty$ が $(\mathfrak{g}, K)$ 加群としてコホモロジカルであることを言う ([1] Definition 7.2.1)．いわゆる $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群がコホモロジカル $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の例である．なぜコホモロジカルなものを考えるのだろうか? 実は, コホモロジカル尖点的保型表現 $\Pi$ の有限素点部 $\Pi_{(\infty)}$ に有理構造が存在することが [2] Thòréme 3.13, [4], [29] Proposition 2.15 などの仕事の後, 最終的に [25] Theorem 8.4 で一般的な形で証明された．かなり大雑把には, $\Pi_\infty$ 及び有限素点部分 $\Pi_{(\infty)}$ の有理性から $L$ 関数の特殊値の有理性が得られるだろうと期待されているわけである (cf. 予想 3)．つまり, $\Pi$ の有理構造とい

う表現の代数的性質と $L$ 関数の特殊値という解析的対象が関係しあっていると思われている．ところで, (コホモロジカル) 尖点的保型表現の有理性は例えば一変数正則保型形式論では対応する正規化された Hecke 固有尖点形式の Fourier 係数の有理性を意味する．しかし Fourier 係数の代数性自体は $L$ 関数の各 $n^{-s}$ の係数が代数的数であると言い換えることもできる．とすると, もちろん保型表現に付随しているとはいえ, 単純に級数の係数が代数的であるというだけで特殊値にまで代数性を期待するのは一見楽観的すぎるように思うかもしれない．それでいてこのように期待するのは保型表現 $\Pi$ の有理性が $\Pi$ に強い制約を与えると思われているためである．これについては例えば [3] Conjecture 1.14, [1] Conjecture 3.1.6, [29] Conjecture 1.3 などを見よ．これらの予想に関して, $\mathrm{GL}_1$ の場合については [30] を見よ．例えばコホモロジカルな場合には $\Pi_{(\infty)}$ の有理構造の存在が証明でき, さらに $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーを通して $L$ 関数の特殊値が扱えるだろうというわけである．実際, 少なくとも例 2 はコホモロジーによって $L$ 関数の特殊値 (や Fourier 係数) の代数性がわかるというタイプの結果の典型的な例になっている．もちろん, 例 2 の $n = 11$ の場合に見られるように単にコホモロジーに移るだけでいいということはなく, Eisenstein コホモロジーや Shalika モデルなど何か他にも道具が必要であることも留意しなくてはならない．

以上, コホモロジカル尖点的保型表現の保型 $L$ 関数の特殊値の有理性について説明をしてみた．実簡約 Lie 群の表現論の立場からは, 保型 $L$ 関数の特殊値の研究への応用に向けてコホモロジカルな Harish-Chandra 加群の有理構造または整数構造を見つけておくことは有用だろう．筆者が知る限り, 保型表現論の文脈で Harish-Chandra 加群の有理構造について初めて扱ったのは Laurent Clozel である．彼は [2] において $\mathrm{GL}_n$ のコホモロジカル尖点的保型表現の有限素点部分の有理構造を調べる過程で, Galois 群のある作用を調べることで Harish-Chandra 加群の有理構造を間接的に扱った．Harish-Chandra 加群の有理構造を $L$ 関数の特殊値の有理性への応用に向けて最初に明示的に扱ったのは Harris 氏だろう．[16], [17] において彼は離散系列表現の局所化の有理数体類似を考えることで離散系列表現の有理形式を得られると主張した．[14] では, Harder 氏はある Harish-Chandra 加群の整形式を用いて周期の定義の修正案を与えた．

Harish-Chandra 加群, とりわけ $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の構成方法の 1 つに Vogan-Zuckerman の導来関手がある． Januszewski 氏は [25] において, 標数 0 の体上定義された対の射 $(\mathfrak{q}, M) \to (\mathfrak{g}, K)$ に対して関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ を構成した．筆者は [19] 及び [18] において一般の可換環上で関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ を構成した．さらに筆者は適当な条件下で平坦底変換定理が成立することを [18] において証明し, 前述の可換環上定義されたコホモロジカル誘導が $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の整モデルを与えていることを保証した．この次に研究すべきテーマの 1 つに, ここで得られた表現の定義体 (環) を小さいものに取り換えられるかという問題 (降下問題) がある．これは保型表現論的には上述の体 $E$ またはその部分環を小さく取り直すことに関連する．実際, 例えば有理数体 $\mathbb{Q}$ (実際あとでは $\mathbb{Z}[1/2]$) 上の簡約代数群 $\mathrm{SO}(3)$ を可換 $\mathbb{Q}$ 代数の圏の群余

前層として

$$\mathrm{SO}(3)(A) = \{g \in \mathrm{SL}_3(A) : g^T = g^{-1}\}$$

で定義する (ここで $g^T$ は行列 $g$ の転置とする). この時, SO(3) は $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-1}\right]$ 上分裂し, (代数的) Borel-Weil 構成により絶対既約表現を全て得ることができる ([23] II 5.6, [18] Corollary 3.1.13 など). Borel-Weil 構成を用いる場合には Borel 部分群 (対) を取る都合上 $\mathbb{Q}$ 上ではこの議論を行うことはできない. 一方、調和多項式による実現などからわかるように SO(3) の $\mathbb{Q}$ 上の既約表現はすべて絶対既約表現になっている. この有理構造は Borel 部分対をとらなくてはならない以上, Borel-Weil 誘導では実現し得ない. Januszewski 氏は [25] においてより一般に $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群に対して Galois 降下を用いることで定義体の降下の例を与えた.

その他の表現の構成方法の 1 つに D 加群を用いるものがある. ここでは簡単のため $G_{\mathbb{R}}$ を連結線形実簡約 Lie 群, $K_{\mathbb{R}}$ をその極大コンパクト部分群とする. これらの複素化を $G$, $K$ とし, その Lie 環を対応するドイツ文字 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ と書く. $\mathcal{B}_G$, $\mathcal{B}_K$ を各々 $G$ と $K$ の旗多様体とするとき $\mathfrak{g}$ の $\theta$ 安定 Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ に付随して $K$ 同変閉埋め込み $i : \mathcal{B}_K \hookrightarrow \mathcal{B}_G$ を得る. ここで $\theta$ は $K_{\mathbb{R}}$ に対応する Cartan 対合である. 正規化部分群 $N_K(\mathfrak{b})$ の極大簡約部分群 $L$ をとる. $\lambda$ を $\mathfrak{b}$ の線形汎関数とし, $\mathbb{C}_{-\lambda}$ を $\mathfrak{b}$ が $-\lambda$ で作用する 1 次元 $(\mathfrak{b}, L)$ 加群とする. $\mathbb{C}_{-\lambda}$ に対応する $\mathcal{B}_K$ 上の線束を $\mathcal{L}_{-\lambda}$ と書く. この時ある $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の同型

$$\Gamma(\mathcal{B}_G, i_+\mathcal{L}_{-\lambda})^* \cong A_{\mathfrak{b}}(\lambda)$$

が知られている (双対定理). この定理は標語的には, 「 $G_{\mathbb{R}}$ の基本系列表現は $\mathcal{B}_G$ の閉 $K$ 軌道に対応する」 と言える. 私と Januszewski 氏は現在この幾何学的実現の立場から定義環の降下の実現を目指している. これによって無限素点側で保型 $L$ 関数の特殊値の有理性のより精密な評価が得られることを期待している. 将来的にはこのような表現の整数性定理が有限素点側でも確立されることで保型 $L$ 関数の特殊値の整数性が証明されることを筆者は期待している.

## 2 $\mathrm{GL}_2$ の場合

幾何学的降下の現象を説明するためにここでは Januszewski 氏の考察を紹介する. まず $\mathbb{Z}$ 上定義された一般線形群概形 $\mathrm{GL}_2$ は $\mathbb{Z}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1$ に自然に作用する. 本稿では, $\mathrm{GL}_2$ の部分群概形 O(2) を可換環の圏の群余前層として次で定義する:

$$\mathrm{O}(2)(A) = \{g \in \mathrm{GL}_2(A) : gg^T = 1\}.$$

このとき例えば $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$ からなる唯一の閉 $\mathrm{O}(2)(\mathbb{C})$ 軌道を持つ. これらの点は明らかに整数環上定義しえないが, 例えば $\mathbb{C} = \mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ などと思う

ことにより, これら 2 点を合わせた空間は自然に整数環上定義される．言い換えると, O(2) 同変閉埋め込み $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[t]/(t^2+1) \to \mathbb{P}^1$ であってこの底変換 $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ が上述の閉 O(2) 軌道になっているものを与えることができる.

群論的立場から見直してみれば, $\mathbb{P}^1$ は $\mathrm{GL}_2$ の旗概形である．上述の 2 点は各々 $\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C})$ 軌道とみなすこともできる．ここで

$$\mathrm{SO}(2)(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{O}(2)(\mathbb{C}) : \det g = 1\}$$

である．上述の双対定理をもとに表現論の立場から言えば, この事実は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現が実数体上定義されえないのに対し, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の適当な中心指標を持つ (本質的) 離散系列が実数体上定義されることに対応する.

## 3　主定理

本稿の主定理は 「$\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の旗多様体の唯一の閉 $\mathrm{SO}(3)(\mathbb{C})$ 軌道は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される」 である．この主張の意味を正確に定式化することは非自明であるように筆者は思うので, ここではそのための説明をしたいと思う.

まず, 閉軌道の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式を与えるのだからその射の定義域と行先を定める必要がある. 自然な期待として定義域と行先はそれぞれ SO(3), $\mathrm{SL}_3$ の $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の簡約群概形としての旗概形であるべきだろう．では旗概形とは何だろうか? $\mathrm{SL}_3$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上 (準) 分裂なので, $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義された Borel 部分群をとり, エタール商空間を考えればよいだろう．では SO(3) の方はどうだろうか? SO(3) は実数体上ですら Borel 部分群を持たない．では実数体または $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の旗概形をどのように定義すればよいだろうか? ところで, 例えば複素数体上の旗多様体の点は Borel 部分代数 (または Borel 部分群) と同一視できることを思い出そう．このことを踏まえれば, 旗概形は Borel 部分群のモジュライ空間と捉えた方が (Borel 部分群を固定しないという意味で) 自然だろう．また, この定義では 簡約群が底概形上 Borel 部分群を持つ必要もなくなる．例えば SO(3) の場合で言えば単に旗概形の $\mathbb{Z}[1/2]$ 点集合が空集合であるというだけである．このようなアイデアは SGA 3 にすでに現れている．一般の底概形上の簡約群, Borel 部分群, 旗概形の定義などに関しては [8] Définition 2.7, [11] Définition 4.5, [9] Corollaire 5.8.3 などを見られたい．以下, $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の簡約群概形 $\mathrm{SL}_3$, SO(3) の旗概形 ([9] Corollaire 5.8.3 の記法で $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{SL}_3)$, $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{SO}(3))$ と書かれていたもの) をここではそれぞれ $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ と書く.

**定理 4（[22]）**　$\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されたある SO(3) 同変閉埋め込み $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)} \to \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ が存在する.

# 4　証明の概略

ここでは定理 4 が [22] においてどのように証明されたかについて, 特に射がどのように構成されたかに焦点を置いて概説したい．1 つの方針としては, モジュライ空間としての記述を直接用いて逐一 Borel 部分群がどのように対応するかを書き下すことが考えられる．しかしそれは大変なように思える．そこで, まず複素数体上で一度問題を考えてみよう．この場合, 閉埋め込みは対応する軌道の点 (つまり $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の適切な Borel 部分群) を 1 つとることで自動的に得られる．これは Borel 部分群を逐一どう対応させるかを書き下すことに比べてはるかに簡単であろう．そういうわけで, [22] では射を $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上構成しておき, それが実は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されていたことを後から証明するという手段 (Galois 降下) をとった．

この方針を実行するにはまず閉軌道に対応する $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上定義された Borel 部分群 $B_0$ (後述) を与える必要がある．$B_0$ が得られたならば次に $B_c = B_0 \cap \mathrm{SO}(3)$ が $\mathrm{SO}(3)$ の Borel 部分群であることが期待されるわけだが, これが非自明である．$\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されているという事実に注意すると, Lie 環の計算から各幾何学的ファイバーが Borel 部分群になっていることは従うのだが, $B_c$ が $\mathbb{Z}[1/2]$ 上平滑であることがそれだけでは従わないように思われる．そこで [22] では [5] の力学の方法を採用することにした．

以下いくらかの定義と簡単な一般論についてまとめておく．しばらく底概形 $S$ を固定し, $\mathbb{G}_m$ を $S$ 上の乗法群, $\mathbb{A}^1$ を $S$ 上のアフィン直線とする．$S$ 概形は米田埋め込みにより $S$ 概形の圏の前層とみなす．

**定義 5.** $X$ を $S$ 上の分離概形, $S'$ を $S$ 概形, $x \in X(S')$, $\pi : \mathbb{G}_m \times_S X \to X$ を $S$ 上の作用とする．底変換により $\mathbb{G}_m$, $\mathbb{A}^1$, $X$, 及び $\pi$ を $S'$ 上定義されているとみなす．軌道射

$$\pi(-)x : \mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_m \times_{S'} S' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{G}_m} \times x} \mathbb{G}_m \times_{S'} X \xrightarrow{\pi} X$$

が $S'$ 上の射 $\mathbb{A}^1 \to X$ に延長するとき $\lim_{t\to 0} \pi(t) \cdot x$ が存在すると言う．

**補題 6**　(1) $X$ を分離 $S$ 概形とする．このとき, $S$ 上の射 $\mu : \mathbb{G}_m \to X$ は $\mathbb{A}^1 \to X$ に高々一意的に伸びる．

(2) 次の $S$ 概形の射の持ち上げ問題を考える:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, hook, "j"'] & X \arrow[d, hook, "i"] \\ \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\tilde{\mu}"'] \arrow[ur, dashed] & Y. \end{tikzcd}$$

ここで, $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ を $S$ 上の標準的な開埋め込みとする．$i$ は閉埋め込みとし, $Y$

は $S$ 上分離的であるとする．このときこの持ち上げ問題は一意的に解を持つ．すなわち, 上の図式を可換にする点線矢印は一意的に存在する．特に, 図式 $\mu:\mathbb{G}_m\to X$ が与えられたとき, $\lim_{t\to 0} i\circ\mu$ が存在することは $\lim_{t\to 0}\mu$ が存在することの必要十分条件である．

系 7　$Y$ を分離 $S$ 概形, $i: X\hookrightarrow Y$ を 閉埋め込みとする．$X$ と $Y$ は $i$ が $\mathbb{G}_m$ 同変になるような $\mathbb{G}_m$ の作用 $\pi_X, \pi_Y$ を持つとする．このとき, $S$ 概形 $T$ に対し,

$$\{y\in Y(T):\ \lim_{t\to 0}\pi_Y(t)\cdot y \text{ が存在する }\}\cap i(X(T)) = i(\{x\in X(T):\ \lim_{t\to 0}\pi_X(t)\cdot x \text{ が存在する }\})$$

が成り立つ．

次の定理が肝心である．

定理 8（[5] Example 5.2.2）　$G$ を $S$ 上の簡約群概形, $T$ をその極大トーラスとする．このとき, 余指標 $\mu^\vee:\mathbb{G}_m\to T$ に対し, 次で定義される $G$ の部分前層 $P_G(\mu^\vee)$ は $G$ の放物部分群である:

$$P_G(\mu^\vee)(X) = \{g\in G(X): \lim_{t\to 0}\mu^\vee(t)g\mu^\vee(t)^{-1} \text{ が存在する }\}.$$

ここから証明の概要に戻る．以下の議論では底概形 $S$ は全てアフィンである．そこで, $S$ の座標環が $k$ のとき, 制限米田関手により $S$ 概形を可換 $k$ 代数の圏の余前層とみなす．さて, $T_{\mathrm{std}}$ を対角行列からなる $\mathrm{SL}_3$ の $\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right]$ 上の極大トーラスとする．次に

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right])$$

$$T_0 = g_0 T_{\mathrm{std}} g_0^{-1}$$

とおく．このとき $\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right]$ 上の余指標 $\mu^\vee:\mathbb{G}_m\to T_0$ を

$$a\mapsto g_0\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g_0^{-1}$$

とおくとき, $B_0 := P_{\mathrm{SL}_3}(\mu^\vee)$ は $\mathrm{SL}_3$ の Borel 部分群となる (例えば [6] Corollary 2.2.2 を見よ)．$\mu^\vee$ は $\mathrm{SO}(3)$ の極大トーラス を経由することが容易にわかり, 系 7 により $B_c := B_0\cap \mathrm{SO}(3) = P_{\mathrm{SO}(3)}(\mu^\vee)$ となることがわかる．$B_0$ が Borel 部分群であることから $B_c$ の各幾何学的ファイバーも可解群となり, $B_c$ は Borel 部分群となる．以上により $\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right]$ 上定義された $\mathrm{SO}(3)$ 同変単射 $i:\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}\to\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ が得られる．

**注意 9.** 筆者は本研究を始めた当初, $B_c$ の Levi 分解を明示的に与えることで $B_c$ が平滑であること (及び Borel 部分群であること) を証明していた．この証明は [20] に残した．

次に $i$ が $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義されることについて概説する．証明の基本的なアイデアは「もし $i$ が $\sqrt{-1} \mapsto -\sqrt{-1}$ で定義される共役写像と交換するとき $i$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される」というものである．このような考えた方は Galois 降下と呼ばれ, SGA 1 にすでに現れている．例えば, $B_0$ の共役は

$$\overline{B}_0 = P_{\mathrm{SL}_3}(\overline{\mu}^\vee)$$

で表すことができる．ここで $\overline{\mu}^\vee$ は

$$\overline{\mu}^\vee(a) = \overline{g}_0 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{g}_0^{-1}$$

$$\overline{g}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} & 0 \\ -\sqrt{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．さらに $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)(\mathbb{Z})$ とすると

$$\overline{\mu}^\vee(a) = \mu^\vee(a)^{-1} = s\mu^\vee(a)s$$

が成り立つ．このことから

$$\overline{B}_0 = sB_0s$$

$$\overline{B}_c = sB_cs$$

がわかる．Weil 制限を用いてうまいエタール被覆をとることで, $\mathbb{Z}[1/2]$ 代数 $R$ に対して次の図式が可換であることが証明できる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}(R \otimes_{\mathbb{Z}[1/2]} \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]) & \xrightarrow{\mathrm{conj}} & \mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}(R \otimes_{\mathbb{Z}[1/2]} \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathcal{B}_{\mathrm{SL}(3)}(R \otimes_{\mathbb{Z}[1/2]} \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]) & \xrightarrow{\mathrm{conj}} & \mathcal{B}_{\mathrm{SL}(3)}(R \otimes_{\mathbb{Z}[1/2]} \mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]). \end{array}$$

ここで, 水平な矢印は $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ の共役自己同型から誘導される写像である．あとは共役不変な部分を取ることで $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の射 $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)} \to \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ であってその $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ への底変換が $i$ と一致するものが得られる (Galois 降下)．以下, このようにして得られた $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の射 $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)} \to \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ を同じ記号 $i$ で書く．$i$ は $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上 SO(3) 同変なので, 降下の一意性から $\mathbb{Z}[1/2]$ 上でも SO(3) 同変であることが言える．

$\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ と $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上射影的である ([9] Corollaire 5.8.3)．特に $\mathcal{B}_{\mathrm{SO}(3)}$ と $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_3}$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上固有である ([10] Théorème 5.5.3 (i))．[10] Corollaire 5.4.3 (i) により, $i$ も固

有であることがわかる．一般に，概形間の (有限表示な) 固有単射は閉埋め込みなので ([12] Proposition 8.11.5, [13] Corollaire 18.12.6) $i$ は閉埋め込みである．

以上の論法は部分旗多様体の閉軌道の整数性問題に対して汎用性が高く，それについては現在 [22] にまとめている．また，閉軌道以外の取り扱いについては [21] ですでに研究を始めている．

謝辞

本稿についてコメントをくださった跡部発さんに感謝いたします．

## 参考文献

[1] K. Buzzard and T. Gee. The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations. In *Automorphic forms and Galois representations. Vol. 1*, volume 414 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 135–187. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[2] L. Clozel. Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 10 of *Perspect. Math.*, pages 77–159. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[3] L. Clozel. Motives and automorphic representations, 2006. ⟨ hal-01019707 ⟩.

[4] L. Clozel. Errata: Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité [ MR1044819]. In *Autour des motifs—École d'été Franco-Asiatique de Géométrie Algébrique et de Théorie des Nombres/Asian-French Summer School on Algebraic Geometry and Number Theory. Vol. III*, volume 49 of *Panor. Synthèses*, pages 61–63. Soc. Math. France, Paris, 2016.

[5] B. Conrad. Reductive group schemes. In *Autour des schémas en groupes. Vol. I*, volume 42/43 of *Panor. Synthèses*, pages 93–444. Soc. Math. France, Paris, 2014.

[6] B. Conrad. Reductive groups over fields. Notes by Tony Feng. Available at `http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/249BW16Page/handouts/249B_2016.pdf`.

[7] P. Deligne. Valeurs de fonctions $L$ et périodes d'intégrales. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.

[8] M. Demazure. Groupes réductifs—généralités. In *Schémas en Groupes (Sém.*

*Géométrie Algébrique, Inst. Hautes études Sci., 1964), Fasc. 6, Exposé 19*, page 34. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[9] M. Demazure. Groupes réductifs: Déploiements, sous-groupes, groupes-quotients. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1964), Fasc. 6, Exposé 22*, page 106. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[10] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.

[11] A. Grothendieck. Eléments réguliers: Suite. Application aux groupes algébriques. (Avec un appendice par J.-P. Serre). In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1963/64), Fasc. 4, Exposé 14*, page 53. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1964.

[12] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28):255, 1966.

[13] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.

[14] G. Harder. Harish-Chandra Modules over $\mathbb{Z}$, 2014. arXiv:1405.6513.

[15] G. Harder and A. Raghuram. Eisenstein cohomology for $\mathrm{GL}_N$ and the special values of Rankin-Selberg $L$-functions. 2019. To appear as a volume in the Annals of Math. Studies.

[16] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):2000–2053, 2013.

[17] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms: Erratum. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 03 2018.

[18] T. Hayashi. Flat base change formulas for $(\mathfrak{g}, K)$-modules over Noetherian rings. *J. Algebra*, 514:40–75, 2018.

[19] T. Hayashi. Dg analogues of the Zuckerman functors and the dual Zuckerman functors I, 2019. To appear in Journal of Algebra.

[20] T. Hayashi. Half-integrality of the closed SO(3)-orbit on the flag variety of SL(3). 第 5 回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 報告集 (2019).

[21] T. Hayashi. Half-integrality of the $KGB$ decomposition for $\mathrm{SL}_3$. In preparation.

[22] T. Hayashi and F. Januszewski. Families of $\mathcal{D}$-modules. In preparation.

[23] J. C. Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical*

*Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.

[24] F. Januszewski. On Period Relations for Automorphic $L$-functions II, 2016. arXiv:1604.04253.

[25] F. Januszewski. Rational structures on automorphic representations. *Math. Ann.*, 370(3-4):1805–1881, 2018.

[26] F. Januszewski. On period relations for automorphic $L$-functions I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(9):6547–6580, 2019.

[27] W. Kohnen and D. Zagier. Modular forms with rational periods. In *Modular forms (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., pages 197–249. Horwood, Chichester, 1984.

[28] G. Shimura. Sur les intégrales attachées aux formes automorphes. *J. Math. Soc. Japan*, 11:291–311, 1959.

[29] S. W. Shin and N. Templier. On fields of rationality for automorphic representations. *Compos. Math.*, 150(12):2003–2053, 2014.

[30] M. Waldschmidt. Transcendance et exponentielles en plusieurs variables. *Invent. Math.*, 63(1):97–127, 1981.

[31] D. Zagier. Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, pages 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627, 1977.

[32] D. Zagier. Modular Forms of One Variable. Typed by S. Lichtenstein. Available at `https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/tex/UtrechtLectures/UtBook.pdf`.