# 固有でない関数の安定性

慶應義塾大学　早野　健太
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Keio University

## 1. 序

本稿の目的は可微分多様体の間の安定写像に関して知られている結果，および [3] で得られた結果の概説を与えることである．

可微分多様体 $N, P$ に対し，$N$ から $P$ への可微分写像全体の集合を $C^\infty(N,P)$ とする．本稿ではこの集合には Whitney の $C^\infty$–位相が与えられているとする．$f \in C^\infty(N,P)$ の開近傍 $\mathcal{U} \subset C^\infty(N,P)$ で次の条件を満たすものがとれるとき，$f$ は**安定**であるという：

任意の $g \in \mathcal{U}$ に対し $\phi_g \circ g \circ \Phi_g = f$ となる $N, P$ の自己微分同相 $\Phi_g, \phi_g$ が存在する．

一般に与えられた可微分写像が安定であるかどうかを決定するのは容易ではないが，固有な (コンパクト集合の逆像がコンパクトとなる) 写像については安定性と (より容易に確かめることができる) 局所安定性 (定義は次節で説明する) が同値であることが，Mather により示されている ([4])．一方で固有でない写像が安定であるための条件については，Dimca([1]) による $\mathbb{R}$ 上の関数についての結果，du Plessis-Vosegaard([2]) による擬固有な写像 [1] についての結果以外，何も知られていなかった．そこで [3] では (擬) 固有とは限らない関数の (強) 安定性について調べ，その十分条件を与えた．以下で種々の安定性の定義，およびそれらの間の関係を説明した後，[3] の結果を紹介する．

## 2. 種々の安定性

$f \in C^\infty(N,P)$ に対しその臨界点集合を $\Sigma(f) \subset N$，臨界値集合を $\Delta(f) \subset P$ と表す．$X, Y$ を第二可算公理を満たす位相空間，$g : X \to Y$ を連続写像とする．このとき $Z(g) \subset Y$ を以下で定義する：

$$Z(g) := \left\{ \lim_{n\to\infty} g(x_n) \in Y \;\middle|\; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \text{集積点を持たない } X \text{ の点列} \right\}.$$

$Z(g)$ 内の点を $g$ の**非固有点**という．$g : X \to Y$ が固有であることと $Z(g) = \emptyset$ となることは同値である．また $f \in C^\infty(N,P)$ が擬固有であることと $Z(f) \cap \Delta(f) = \emptyset$ となることは同値である ([2])．可微分多様体 $N$ に対し，その自己微分同相全体の空間を $\mathrm{Diff}(N)$ と表す．

**定義 2.1.** $f \in C^\infty(N,P)$ に対し，$f$ の開近傍 $\mathcal{U} \subset C^\infty(N,P)$ と連続写像 $\theta_1 : \mathcal{U} \to \mathrm{Diff}(N)$ と $\theta_2 : \mathcal{U} \to \mathrm{Diff}(P)$ で，任意の $g \in \mathcal{U}$ に対し

$$\theta_2(g) \circ g \circ \theta_1(g) = f$$

となるものが存在するとき，$f$ は**強安定**であるという．

[1] $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ が固有となるような $f(\mathrm{Crit}(f))$ の開近傍 $U \subset P$ が存在するとき，$f$ は擬固有であるという．

$N$ 上のベクトル束 $E$ に対し，その切断全体の集合を $\Gamma(E)$ で表し，$S \subset N$ に対し $E$ の切断の $S$ における芽全体の集合を $\Gamma(E)_S$ と表す．

**定義 2.2.** $f \in C^\infty(N, P)$ に対し以下の等式が成立するとき，$f$ は**無限小安定**であるという：

$$\Gamma(f^*TP) = tf(\Gamma(TN)) + \omega f(\Gamma(TP)).$$

ただし $tf : \Gamma(TN) \to \Gamma(f^*TP)$，$\omega f : \Gamma(TP) \to \Gamma(f^*TP)$ はそれぞれ $tf(\xi) = df \circ \xi$, $\omega f(\eta) = \eta \circ f$ で定義される写像である．また任意の $y \in \Delta(f)$ と任意の有限集合 $S \subset f^{-1}(y)$ に対し以下の等式が成立するとき，$f$ は**局所安定**であるという：

$$\Gamma(f^*TP)_S = tf(\Gamma(TN)_S) + \omega f(\Gamma(TP)_{\{y\}}).$$

**注意 2.3.** 局所安定性は他の安定性に比べ確かめるのが容易である ([4] を参照)．例えば関数 $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ が局所安定であるための必要十分条件は $f$ が Morse 関数であること，つまり

- 任意の $x \in \Sigma(f)$ とその周りの座標近傍 $(U, \varphi)$ に対し，$x$ における Hesse 行列 $\left(\dfrac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(x))\right)_{i,j}$ が正則であり，
- $f|_{\mathrm{Crit}(f)}$ が単射

であることと同値である．

強安定性，無限小安定性，局所安定性はいずれも Mather により導入された概念であり，[4] において固有な写像に対しては，これらは全て通常の安定性と同値な性質であることが示されている．以下では固有とは限らない可微分写像 $f \in C^\infty(N, P)$ について考える．まず以下は定義より明らかである：

A. $f$ が無限小安定であれば局所安定．

B. $f$ が強安定であれば安定．

また [4] において以下が示されている：

C. $f$ が安定であれば局所安定．

まずこれらの主張の逆はいずれも成立しない，ということを例をあげることにより確かめる．A の逆が成立しないことをみるために，以下を用いる：

**定理 2.4** ([4])**.** $f$ が無限小安定であることと，$f$ が局所安定でかつ $f|_{\Sigma(f)}$ が固有であることは同値である．

**例 2.1** ((局所) 安定 $\not\Rightarrow$ 無限小安定)．関数 $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を $f_1(x) := \exp(x)\sin x$ で定義する．このとき $f_1^{(k)}(x) = 2^{k/2}\exp(x)\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{4}\right)$ であるから，

$$\Sigma(f_1) = \left\{ \frac{(4n+3)\pi}{4} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

であり，$f_1$ が Morse 関数であることは容易に確かめられる．一方，

$$\lim_{n\to-\infty} f_1\left(\frac{(4n+3)\pi}{4}\right) = 0$$

であるから，$Z(f_1|_{\Sigma(f_1)}) = \{0\} \neq \emptyset$ である．よって定理 2.4 より $f_1$ は無限小安定ではない ($f_1|_{\Sigma(f_1)}$ が固有であることと，$Z(f_1|_{\Sigma(f_1)}) = \emptyset$ であることは同値である)．

B および C の逆が成立しないことをみるために次の定理を用いる：

**定理 2.5** ([2])．$f \in C^\infty(N,P)$ が強安定であれば $f$ は擬固有である．

**定理 2.6** ([1])．局所安定な関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ に対し，$L(f) \subset \mathbb{R}$ を以下で定義する：

$$L(f) := \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ or } y = \lim_{x\to-\infty} f(x) \right\}.$$

このとき $f$ が安定であることと，$\Delta(f) \cap (Z(f|_{\Sigma(f)}) \cup L(f)) = \emptyset$ であることは同値である．

**例 2.2** (安定 $\not\Rightarrow$ 強安定)．$f_2 \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を $f_2(x) := f_1(\exp(x))$ で定義する ($f_1$ は例 2.1 で定義した関数)．このとき $f_2$ の導関数は次のようになる：

$$f_2'(x) = \exp(x) f_1'(\exp(x)),\;\; f_2''(x) = \exp(x)\left\{\exp(x) f_1''(\exp(x)) + f_1'(\exp(x))\right\}.$$

よって例 2.1 での計算結果より

$$\Sigma(f_2) = \left\{ \log\left(\frac{(4n+3)\pi}{4}\right) \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

であることがわかり，さらに $f_2$ は Morse 関数であることもわかる．また $L(f_2) = \{0\}$，$Z(f_2|_{\Sigma(f_2)}) = \emptyset$ であることも容易に示せる．$0 \notin \Delta(f_2)$ であるから定理 2.6 より $f_2$ は安定である．一方 $Z(f_2) = \mathbb{R}$ であるから特に $Z(f_2) \cap \Delta(f_2) \neq \emptyset$．よって $f_2$ は擬固有でないから定理 2.5 より $f_2$ は強安定ではない．

$Z(f_2|_{\Sigma(f_2)}) = \emptyset$ であるから $f_2$ は無限小安定でもある．よってこの例は安定かつ無限小安定であったとしても，強安定であるとは限らないことも示している．

次に C の逆が成立しないことを確かめる．

**例 2.3** (局所安定 $\not\Rightarrow$ 安定，[4] も参照)．$h : (-1,1) \to \mathbb{R}$ を $h(x) = x(4x^2-3)$ で定義し，$f_3 \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を $f_3(x) = h\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)$ とする．このとき $\Sigma(f_3) = \{\pm 1\}$ であり，$f_3(\pm 1) = \mp 1$．また $x = \pm 1$ において $f_3''(x) \neq 0$ であるから $f_3$ は Morse 関数 (局所安定) である．一方 $L(f_3) = \{\pm 1\}$ であるから $\Delta(f_3) \cap L(f_3) \neq \emptyset$．よって定理 2.6 より $f_3$ は安定ではない．

以上より A，B，C の逆がいずれも成立しないことがわかったが，上の例は安定性と無限小安定性が独立な性質であることも示している．実際例 2.3 の $f_3$ は無限小安定である ($\Sigma(f_3)$ は有限集合であるから $Z(f_3|_{\Sigma(f_3)}) = \emptyset$) から無限小安定であっても安定であるとは限らないことがわかるし，例 2.1 の $f_1$ は安定である ($L(f_1) = Z(f_1|_{\Sigma(f_1)}) = \{0\}$ であるが $0 \notin \Delta(f_1)$) から安定であっても無限小安定であるとは限らないことがわかる．

結局 4 つの安定性の関係については，以下の問題を残し全て先行研究からわかることになる：

**問題 2.7.** $f \in C^\infty(N, P)$ が強安定であれば無限小安定となるか？

この問題が難しい原因の一つとして，強安定性のみを保証する確かめやすい条件が知られていない，ということがあげられる ([2] において強安定性と無限小安定性を同時に保証する条件は与えられている)．後の節でみるが，この問題は著者が得た定理により否定的に解決される (系 3.5)．

## 3. 主結果

本節では [3] で得られた結果を紹介する．

**定義 3.1.** 開集合 $V \subset N$ の補空間 $N \setminus V$ がコンパクトであるとき，$V$ を $N$ の **end の近傍**と呼ぶ．$f \in C^\infty(N, P)$ とする．$y \in P$ に対し以下が成立するとき，$f$ は $y$ において **end-trivial** であるという：任意のコンパクト集合 $K \subset N$ に対し，$y$ の開近傍 $W \subset P$ と，$K \subset N \setminus V$ なる $N$ の end の近傍 $V \subset N$ が存在し次の 2 条件が成立：

- $f^{-1}(y) \cap V$ に $f$ の臨界点は存在しない (このとき $f^{-1}(y) \cap V$ は $N$ の部分多様体であることに注意).
- 微分同相 $\Phi : (f^{-1}(y) \cap V) \times W \to f^{-1}(W) \cap V$ で，$f \circ \Phi = p_2 : (f^{-1}(y) \cap V) \times W \to W$ となるものが存在する．

$f \in C^\infty(N, P)$ に対し $\tau(f) = \{y \in P \mid f \text{ は } y \text{ において end-trivial}\}$ とする．

**定理 3.2** ([3, Theorem 1.1])**.** $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ を局所安定な (つまり Morse) 関数とする．

1. $f(\mathrm{Crit}(f)) \subset \tau(f)$ なら $f$ は安定である．
2. $f$ が強安定であることと，$f$ が擬固有であることは同値である．

**注意 3.3.** 前節で説明した通り，一般に強安定な写像は擬固有であることが知られている (定理 2.5)．我々が実際に示したのは $P = \mathbb{R}$ の場合この逆が成立する，ということである．

$\mathbb{R}$ 上の Morse 関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対しては安定であるための必要十分条件が知られていた (定理 2.6) が，これについて以下が成立する：

**命題 3.4.** $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対し定理 2.6 の条件，つまり $\Delta(f) \cap (Z(f|_{\Sigma(f)}) \cup L(f)) = \emptyset$ と $\Delta(f) \subset \tau(f)$ は同値である．

命題 *3.4* の証明．$f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ に対し $\tau(f) = \mathbb{R} \setminus (Z(f|_{\Sigma(f)}) \cup L(f))$ であることを示せば十分であるのでこれを示す．$y \in \tau(f)$ とする．このとき end の近傍 $V \subset \mathbb{R}$，十分小さい正数 $\varepsilon > 0$，微分同相 $\Phi : (f^{-1}(y) \cap V) \times W \to f^{-1}(W) \cap V$ (ただし $W = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$) が存在し，$f \circ \Phi = p_2$ が成立する ($K = \emptyset$ として仮定を適用した)．特に $f^{-1}(W) \cap V$ 内に $f$ の臨界点は存在しない．一方 $y \in Z(f|_{\Sigma(f)})$ とすると，集積点を持たない $\Sigma(f)$ 上の点列 $\{x_i\}$ で $\lim_{n\to\infty} f(x_i) = y$ となるものが存在する．特に十分大きい $m$ に対し $f(x_m) \in W$ となる．また $\{x_i\}$ は集積点を持たず $\mathbb{R} \setminus V$ がコンパクトであるから，十分大きい $m$ に対し $x_m \in V$ が成立する．よって結局矛盾するので $y \notin Z(f|_{\Sigma(f)})$ である．

$y \in L(f)$ と仮定する．このとき $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$ としても一般性は崩れない．この仮定より $r > 0$ で，$x \geq r$ なら $f(x) \in V \cap f^{-1}(W)$ となるものが存在する．ここで $f(r) < y$ と仮定してもやはり一般性は崩れない．$f^{-1}(W) \cap V$ の連結成分で $r$ を含むものを $I$ とする．$f \circ \Phi$ は射影であるから $f|_I$ は $W$ への微分同相となる．$f^{-1}(W) \cap V$ 内に $f$ の臨界点は存在しないから，$I$ 上 $f' > 0$ であり，$f$ は単調増加であることがわかる．特に $f(I) \subset (y-\varepsilon, y)$ となるが，これは $f|_I$ が微分同相 (特に全射) であることに反する．よって $y \notin L(f)$ であり，結局 $\tau(f) \subset \mathbb{R} \setminus (Z(f|_{\Sigma(f)}) \cap L(f))$ が示された．

$y \in \mathbb{R} \setminus (L(f) \cup Z(f|_{\Sigma(f)})$ とコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ を任意にとる．$y \notin Z(f|_{\Sigma(f)})$ であるから $M > 0$ と $y$ を含む有界な開区間 $I \subset \mathbb{R}$ が存在し，$f^{-1}(\bar{I}) \cap \Sigma(f) \cap ((-\infty, -M) \cup (M, \infty)) = \emptyset$ が成り立つ．必要なら $M$ を十分大きくとり，$K \subset [-M, M]$ となるようにする．さらに必要なら $I$ を十分小さく取り直し，$\bar{I} \cap L(f) = \emptyset$ も成り立つようにする．$M', M'' \geq M$ を，$f^{-1}(I) \cap ((-\infty, -M') \cup (M'', \infty)) = \sqcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda)$ としたとき ($\mathbb{R}$ の開集合は開区間の非交和となることに注意) $a_\lambda = M''$ となる $\lambda$ や $b_{\lambda'} = -M'$ となる $\lambda'$ が存在しないようにとる．制限写像 $f|_{(a_\lambda,b_\lambda)} : (a_\lambda, b_\lambda) \to I$ を考える．この制限写像は臨界点を持たないから局所微分同相であり，さらに単調である．以下単調増加であるとする (単調減少の場合も同様に扱えばよい)．$b_\lambda = \infty$ とすると，$I$ の有界性と $f|_{(a_\lambda,b_\lambda)}$ の単調性から $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在し，この極限値は $\bar{I}$ に含まれるが，一方仮定より $\bar{I} \cap L(f) = \emptyset$ であるから $b_\lambda \neq \infty$ であることがわかる．同様にして $a_\lambda \neq -\infty$ である．$f(a_\lambda) \notin f^{-1}(I) \cap ((-\infty, -M') \cup (M'', \infty))$ であるが，十分小さい $\varepsilon$ に対し $f(a_\lambda + \varepsilon) \in f^{-1}(I) \cap ((-\infty, -M') \cup (M'', \infty))$ であることと $a_\lambda \neq M''$ であることから $f(a_\lambda) \in \bar{I} \setminus I$，つまり $f(a_\lambda)$ は開区間 $I$ の端点である．同様にして $f(b_\lambda)$ も $I$ の端点であることがわかるから，中間値の定理より $f|_{(a_\lambda,b_\lambda)} : (a_\lambda, b_\lambda) \to I$ は全射，よって微分同相であることがわかる．

$z \in f^{-1}(y) \cap ((-\infty, -M') \cup (M'', \infty))$ に対し $\lambda(z) \in \Lambda$ を $z \in (a_\lambda, b_\lambda)$ となるようにとる (このような $\lambda(z)$ は唯一つであることに注意)．写像 $\Phi : f^{-1}(y) \cap ((-\infty, -M') \cup (M'', \infty)) \times I \to f^{-1}(I) \cap ((-\infty, -M') \cup (M'', \infty))$ を次のように定義する：

$$\Phi(z, t) = (f|_{(a_{\lambda(z)}, b_{\lambda(z)})})^{-1}(t).$$

この写像は微分同相であり，$f \circ \Phi = p_2$ となることが容易に確かめられる．よって $f$ は $y$ において end-trivial であり，$y \in \tau(f)$ であることがわかった．$\square$

前節でも述べた通り，強安定性が無限小安定性の十分条件になるか，は知られていな

かったが，定理 3.2 により，十分条件にはならないことを示す例を与えることができる：

**系 3.5** ([3, Theorem 4.1])**.** 関数 $f(x) = \exp(-x^2)\sin x$ は強安定ではあるが無限小安定ではない**.**

また定理 3.2 の系として，Nash 関数 (半代数的な $C^\infty$ 級関数) の安定性について以下を示すことができる：

**系 3.6** ([3, Theorem 4.2])**.** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を Nash 関数，$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をその勾配とし，$\lim_{n\to\infty} \nabla f(x_n) = 0$ なる $\mathbb{R}^n$ 内の収積点を持たない点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が存在しないと仮定する**.** このとき $f$ は安定である**.**

この系より関数 $g_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ が安定であることがわかるが，これは Mather の結果や [1] や [2] などの先行研究の結果からは従わないことに注意する．

## 参考文献


[1] A. Dimca, *Morse functions and stable mappings*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 24 (1979), no. 9, 1293–1297.

[2] A. du Plessis and H. Vosegaard, *Characterisation of strong smooth stability*, Math. Scand, **88**(2001), 193–228.

[3] K. Hayano, *Stability of non-proper functions*, preprint, available at arXiv:1809.02332.

[4] J. N. Mather, *Stability of $C^\infty$ mappings. V. Transversality*, Advances in Math. **4**(1970), 301–336.