

# Properties of Various Surfaces by Contact with a Standard Cuspidal Edge

標準カस्प辺との接触による様々な曲面の性質について

神戸大学理学研究科 山本 健生

Yoshiki Yamamoto

Graduate School of Science, Kobe University

December 6, 2018

## 概要

近年、特異点を含む曲面を「高さ関数」や「距離二乗関数」で調べる研究が多く発表されている。高さ関数は平面との近似を測り、距離二乗関数は球との近似を測っている。本稿では、この2つの手法と同様に標準カस्प辺との近似を測ることによって、特異点を含む曲面の形や性質を調べている。

Recently, there are many studies about singularities by using height functions and distance squared functions. Height function investigates approximation with the plane, and distance squared function do with the sphere. In this paper, like previous two methods, we study classification of critical point of function which investigates approximation with standard cuspidal edge.

## 1 導入

微分幾何学において、曲面の性質を調べるために他の基本的な曲面との接触を測ることは重要な手法の1つである。有名な手法として「高さ関数」と「距離二乗関数」の2つが挙げられる。例えば、高さ関数は平面との接触を測る。 $f: (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \mathbf{0})$  を正則曲面芽とすると、高さ関数  $H$  は次の式で与えられる。

$$H: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, (u, v, \mathbf{x}) \mapsto \langle f(u, v), \mathbf{x} \rangle.$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbf{R}^3$  のユークリッド内積である。この  $H$  を用いると、次が成り立つ。

- $H$  が指数0か2のモース関数の時、 $\mathbf{x}$  は  $\nu$  と平行で、かつ  $K > 0$  (楕円点)。
- $H$  が指数1のモース関数の時、 $\mathbf{x}$  は  $\nu$  と平行で、かつ  $K < 0$  (双曲点)。
- $H$  が退化した臨界点を持つとき、 $\mathbf{x}$  は  $\nu$  と平行で、かつ  $K = 0$  (放物点)。

この時、 $K$  は  $f$  のガウス曲率であり、 $\nu$  は  $f$  の単位法線ベクトルである。 $H$  の定義より、 $f$  が平面で  $\mathbf{x}$  が  $\nu$  と平行の時、 $H$  は常に0となる。

同様にして、距離二乗関数は球との接触を測っている。この2つの関数は、どれだけ平面や球に近いかを計算することにより、正則曲面  $f$  の形状や不変量を導くことができる。

特異点を持つ曲面として、ホイットニーの傘やカスプ辺、燕の尾などが挙げられる。これらの形状や不変量を研究する場面でも「高さ関数」や「距離二乗関数」は用いられている ([2, 3, 4, 5, 6])。他の基本的な図形との近似を測る研究もあるが、これらはすべて特異点を持たないものとの近似を調べている ([7])。筆者の知る限り、特異点を持つ曲面を特異点を持つ曲面で近似する研究はほとんど行われていない。そこで本稿では同様の考えのもと、特異点を持つ標準カスプ辺との近似を測ることによって、ホイットニーの傘やカスプ辺を調べる。

## 2 準備

### 2.1 関数の特異点

$f: (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$  を 2 変数関数芽とする。関数芽  $f$  と  $g: (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$  が  $\mathcal{R}$ -同値であるとは、微分同相写像芽  $\phi: (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \mathbf{0})$  が存在して  $f \circ \phi = g$  が成り立つときをいう。原点が  $f$  の臨界点であるとき、この特異点の種類を  $\mathcal{R}$ -同値の下で分類したい。しかしながら、2 変数関数の関数芽同値類は無限に存在することが知られている。そこで、ここでは単純と呼ばれる特異点のみに制限して考えることにする。特異点が単純であるとは、関数芽  $f$  の近傍  $U$  が存在して  $U$  が有限の  $\mathcal{R}$ -同値類しか含まないときをいう。

表 1 は単純特異点の一覧である。これは Arnol'd によって与えられた ([1])。

表 1: 単純特異点の一覧

名称	標準形	$\text{codim}(\mathcal{R}, f)$
$A_k (k \geq 1)$	$u^2 \pm v^{k+1}$	$k$
$D_k (k \geq 4)$	$u^2 v \pm v^{k-1}$	$k$
$E_6$	$u^3 \pm v^4$	6
$E_7$	$u^3 + uv^3$	7
$E_8$	$u^3 + v^5$	8

この特異点の階層は図 1 で表される。

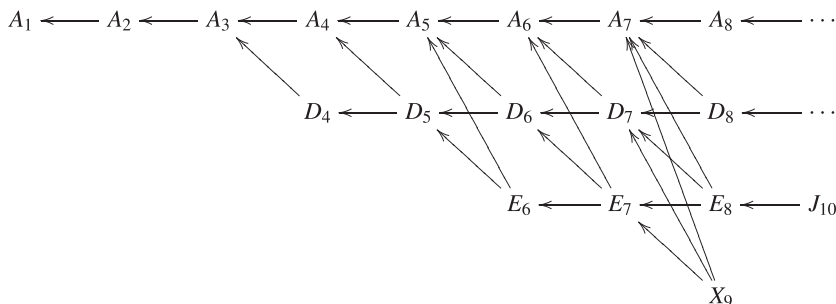


図 1 2 変数関数特異点の階層

また、単純ではない特異点を次の 2 種類に分けておく。

**Def 1.**  $F : (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$  を 2 変数関数芽とする。この時、

- $j^3 f(\mathbf{0})$  が  $u^3$  と  $\mathcal{R}$ -同値で単純ではないとき、 $F$  を  $J_{10}$ -族と呼ぶ。
- $j^3 f(\mathbf{0}) = 0$  のとき、 $F$  を  $X_9$ -族と呼ぶ。

## 2.2 曲面の特異点

点  $p$  が曲面の特異点であるとは、曲面  $f : (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \mathbf{0})$  の微分の階数が 1 以下になる点である。また、2 つの写像芽  $f, g : (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \mathbf{0})$  が  $\mathcal{A}$ -同値であるとは、 $\phi : (\mathbf{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \mathbf{0})$ ,  $\psi : (\mathbf{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \mathbf{0})$ :微分同相写像芽が存在して、 $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = g$  が成り立つことである。この  $\mathcal{A}$ -同値のもとで有名な曲面の特異点を挙げる。

- ホイットニーの傘  $f(u, v) = (u, uv, v^2)$  と  $\mathcal{A}$ -同値のもの
- カスプ辺  $f(u, v) = (u, v^2, v^3)$  と  $\mathcal{A}$ -同値のもの
- 燕の尾  $f(u, v) = (u, 4v^3 + 2uv, 3v^4 + uv^2)$  と  $\mathcal{A}$ -同値のもの

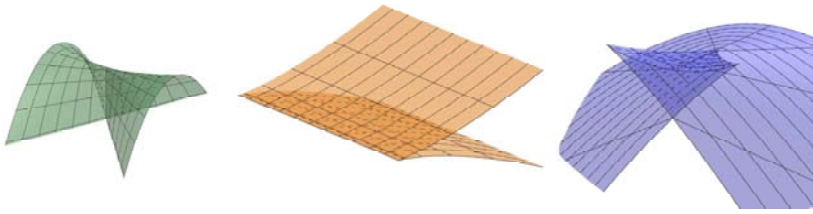


図 2 ホイットニーの傘/カスプ辺/燕の尾

特に、 $f_{cstd}(u, v) = (u, v^2, v^3)$  をここでは標準カスプ辺と呼ぶことにする。(図 2 中央)

また、ホイットニーの傘とカスプ辺の一般式は次のように書くことができる。([10, 14])  
座標  $(u, v)$  と 3 次元等長写像  $T$  が存在して、  
 $f$  がホイットニーの傘であるとき、

$$T \circ f(u, v) = \left( u, uv + \sum_{k=3}^n \frac{b_k}{k!} v^k, \sum_{k=2}^n \sum_{i+j=k} \frac{a_{i,j}}{i!j!} u^i v^j \right) + O(u, v)^{n+1} \quad (1)$$

ただし  $a_{02} \neq 0$ 。

$f$  がカスプ辺であるとき、

$$T \circ f(u, v) = \left( u, \frac{a_{20}}{2} u^2 + \frac{a_{30}}{6} u^3 + \frac{1}{2} v^2, \frac{b_{20}}{2} u^2 + \frac{b_{30}}{6} u^3 + \frac{b_{12}}{2} uv^2 + \frac{b_{03}}{6} v^3 \right) + H(u, v) \quad (2)$$

ここで、

$$H(u, v) = \left( 0, u^4 h_1(u), u^4 h_2(u) + u^2 v^2 h_3(u) + uv^3 h_4(u) + v^4 h_5(u, v) \right)$$

であり,  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$  は滑らかな関数である. また,  $b_{03} \neq 0$  かつ  $b_{20} \geq 0$ .

また, ホイットニーの傘の focal conic は

$$\{(y, z) \mid -z^2 - 2a_{11}yz + (a_{20}a_{02} - a_{11}^2)y^2 - a_{02}y = 0\}$$

で表される.

### 3 結果

本稿ではホイットニーの傘とカスプ辺について考える.  $f$  をホイットニーの傘もしくはカスプ辺とする. 2次元単位球面  $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\}$  を用いて,  $\Delta = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S^2 \times S^2 \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0\}$  とおく. この時, 関数  $F$  を

$$F : \mathbf{R}^2 \times \Delta \rightarrow \mathbf{R} \quad (3)$$

$$(u, v, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto \langle f(u, v), \mathbf{z} \rangle^2 - \langle f(u, v), \mathbf{y} \rangle^3$$

と定める. この状況では,  $\mathbf{y} = (0, 1, 0), \mathbf{z} = (0, 0, 1)$  であり,  $f$  が標準カスプ辺のとき  $F$  が常に 0 となる. すなわち,  $F$  は標準カスプ辺からどれくらい離れているかを表している. この  $F$  を計算することにより, ホイットニーの傘やカスプ辺の標準カスプ辺との近似に関する性質を調べることができる. 本稿では, この  $F$  を用いて得られたホイットニーの傘とカスプ辺の近似の性質や形, 不変量などをまとめている.

$\Delta$  の定義より, 3つのパラメーター  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  は次のように表すことができる.

$$\mathbf{y} = (-\cos \beta \sin \gamma, \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) \quad (4)$$

$$\mathbf{z} = (-\sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha \cos \beta)$$

これはカスプ辺を飛行機に見立てた時の, 回転角に相当する. それぞれ,  $\alpha$  がロール角,  $\beta$  がヨー角,  $\gamma$  がピッチ角に相当する. (図3参照)

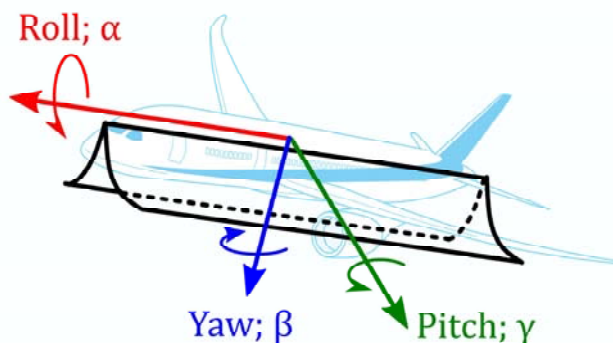


図3  $\alpha, \beta, \gamma$  の幾何学的意味

以上の表現を用いて  $F$  を計算すると, 次の定理が得られる.

定理 2.  $f$  がカस्प辺, もしくはホイットニーの傘であるとき,

- $\sin \beta \neq 0$  ならば  $j^2 F(0) \sim_{\mathcal{R}} u^2$ . さらに,
  - \*  $\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \neq 0$  ならば  $j^6 F(0) \sim_{\mathcal{R}} u^2 \pm v^6$
  - \*  $\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma = 0$  ならば  $j^6 F(0) \sim_{\mathcal{R}} u^2$
- $\sin \beta = 0$  ならば  $j^2 F(0) \sim_{\mathcal{R}} 0$ . さらに,
  - \*  $\sin \alpha \sin \gamma \neq 0$  ならば  $j^4 F(0) \sim_{\mathcal{R}} u^3 \pm v^4$
  - \*  $\sin \alpha = 0$  かつ  $\sin \gamma \neq 0$  ならば  $j^4 F(0) \sim_{\mathcal{R}} u^3$
  - \*  $\sin \gamma = 0$  ならば  $j^3 F(0) \sim_{\mathcal{R}} 0$

より高い次数まで調べると次の定理が得られる.

定理 3.  $\sin \beta = \sin \gamma = 0$ , すなわち  $j^3 F(0) \sim_{\mathcal{R}} 0$  と仮定する.

- $f$  がカस्प辺のとき,
  - \*  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , すなわち  $\mathbf{y} = (0, 1, 0), \mathbf{z} = (0, 0, 1), b_{20} = 0$  ならば  $j^4 F(0) = 0$
  - \* さらに,  $a_{20} = b_{30} = b_{12} = 0, b_{03} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  ならば  $j^6 F(0) = 0$ .
- $f$  がホイットニーの傘のとき,
  - \*  $a_{20} = 0$  もしくは  $(a_{11} - \cot \alpha)^2 = a_{20}a_{02}$  ならば  $j^4 F(0) \sim_{\mathcal{R}} \pm u^4$
  - \*  $(a_{11} - \cot \alpha)^2 > a_{20}a_{02}$  ならば  $j^4 F(0) \sim_{\mathcal{R}} \pm u^2 v^2$
  - \*  $(a_{11} - \cot \alpha)^2 < a_{20}a_{02}$  ならば  $j^4 F(0) \sim_{\mathcal{R}} \pm(u^4 + 2u^2 v^2 + v^4)$

$f$  を正則曲面としても同様の結果が得られる. ここでは, ホイットニーの傘の場合の証明を記す.  
(カस्प辺でもほぼ同様に示せる)

*Proof.*  $j^2 F(0) = \sin^2 \beta u^2$  であるから,  $\sin \beta$  の値によって特異点の種類が変化する.

- $\sin \beta \neq 0 \Rightarrow (1)$ .
- $\sin \beta = 0 \Rightarrow (2)$ .

(1) もし  $\sin \beta \neq 0$  ならば,  $F$  は  $A_k$ -特異点である. 次の座標変換を考える.

$$\tilde{u} = \langle f, \mathbf{z} \rangle, \quad \tilde{v} = v$$

このとき, ある  $g$  が存在して,

$$u = g(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = \tilde{v}$$

と書ける. すると,  $F = \tilde{u}^2 - \langle f(g(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{v}), \mathbf{y} \rangle^3$  であるから,  $a_0, a_1, a_2$  が存在して,

$$\langle f(g(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{v}), \mathbf{y} \rangle = a_0(\tilde{v}) + a_1(\tilde{v})\tilde{u} + a_2(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}^2 \quad (5)$$

が成り立つ. よって,  $b_1$  が存在して  $F = \tilde{u}^2(1 - b_1(\tilde{u}, \tilde{v})) - a_0(\tilde{v})^3 + 3a_0(\tilde{v})^2 a_1(\tilde{v})\tilde{u}$  と書き換えできる.

さらに次の座標変換を行うと,

$$\tilde{u} = \sqrt{1 - b_1(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{u}, \quad \tilde{v} = \tilde{v}$$

$b_2$  が存在して  $F = \tilde{u}^2 - a_0(\tilde{v})^3 + 3a_0(\tilde{v})^2 a_1(\tilde{v})\tilde{u} b_2(\tilde{u}, \tilde{v})$  とできる. よって, 正整数  $k$  が存在して,

$$a_0(\tilde{v}) = a_{0k} \tilde{v}^k + \cdots \quad (a_{0k} \neq 0)$$

であれば,  $F$  は  $A_{3k-1}$ -特異点である. また, (5) より,

$$\langle f(g(0, \tilde{v}), \tilde{v}), \mathbf{y} \rangle = a_0(\tilde{v})$$

が成り立つ. 一方, 陰関数  $\langle f(u, v), \mathbf{z} \rangle = 0$  を考えると,  $u$  による偏微分は  $\langle f, \mathbf{z} \rangle_u = \langle f, \mathbf{z} \rangle_{\tilde{u}} \tilde{u}_u + \langle f, \mathbf{z} \rangle_{\tilde{v}} \tilde{v}_u = \sin \beta \neq 0$ . であるから, 陰関数定理より  $h(v)$  が存在して

$$\langle f(h(v), v), \mathbf{z} \rangle = 0 \quad (6)$$

が成り立つ. 定義より,  $\tilde{u} = \langle f(g(\tilde{u}, \tilde{v}), v), \mathbf{z} \rangle$  であるから,  $\tilde{u} = 0$  の場合を考えると

$$\langle f(g(0, \tilde{v}), v), \mathbf{z} \rangle = 0 \quad (7)$$

が得られる. よって, (6) と (7) を比較することにより,  $g(0, \tilde{v}) = h(\tilde{v})$  が分かる. これは  $a_0(\tilde{v})$  が  $\mathbf{y}$ -方向への  $\mathbf{z}^\perp$  での  $f$  の切り口の高さ関数になっていることを示している.

特に,  $k = 2$  の時は  $\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \neq 0$  ならば  $A_5$ -特異点である.

(2) もし  $\sin \beta = 0$  の時,  $j^3 F(\mathbf{0}) = \sin^3 \gamma u^3$  である. よって,

- $\sin \gamma \neq 0 \Rightarrow (3)$ .

- $\sin \gamma = 0 \Rightarrow (4)$ .

(3) このとき,  $j^4 F(\mathbf{0}) = \sin^3 \gamma u^3 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha a_{02}^2$  であるから,

- $\sin \gamma \neq 0 \Rightarrow E_6$ -特異点.

- $\sin \gamma = 0 \Rightarrow J_{10}$ -特異点族.

(4)  $j^3 F(\mathbf{0}) = 0$  が  $\sin \beta = \sin \gamma = 0$  よりわかる. (すなわち  $X_9$ -特異点族). よって,  $F$  の 4-jet は 4 次のみで,

$$\begin{aligned} j^4 F(\mathbf{0}) &= \frac{1}{4} \sin^2 \alpha a_{20}^2 u^4 + (\sin^2 \alpha a_{11} a_{20} - \sin \alpha \cos \alpha a_{20}) u^3 v \\ &\quad + \{(\sin \alpha a_{11} - \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha a_{20} a_{02}\} u^2 v^2 \\ &\quad + (\sin^2 \alpha a_{11} a_{02} - \sin \alpha \cos \alpha a_{02}) u v^3 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha a_{02}^2 v^4. \end{aligned} \quad (8)$$

と表される. この特異点の種類は  $\alpha, a_{20}, a_{11}$  and  $a_{02}$  によって決まる. その手法は [12] に基づく.  $a_{20} = 0$  の時, 次の座標変換を考えると,

$$\tilde{u} = (a_{11} - \cot \alpha)u, \quad \tilde{v} = (a_{11} - \cot \alpha)u + \frac{a_{02}}{2}v$$

$j^4 F(\mathbf{0}) = \pm \tilde{u}^4$  とできる. 同様にして,  $(a_{11} - \cot \alpha)^2 = a_{20} a_{02}$  の時も

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|a_{20}|}u \pm \sqrt{|a_{02}|}v), \quad \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|a_{02}|}v)$$

という座標変換によって  $j^4 F(\mathbf{0}) = \pm \tilde{u}^4$  にすることができる.

次に  $(a_{11} - \cot \alpha)^2 \neq a_{20} a_{02}$  の時を考える.  $k^2 = \frac{(a_{11} - \cot \alpha)^2}{a_{20} a_{02}}$  とおくと,  $k^2 > 1$  の時は,

$$u = \tilde{u} + \frac{1}{4(k^2 - 1)} \tilde{v} \quad v = (\sqrt{k^2 - 1} - k) \tilde{u} - \frac{\sqrt{k^2 - 1} + k}{4(k^2 - 1)} \tilde{v}$$

と座標変換すると  $j^4 F(\mathbf{0}) = \tilde{u}^2 \tilde{v}^2$  となる.

逆に  $k^2 < 1$  の時は

$$u = \tilde{u} - \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \tilde{v} \quad v = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \tilde{v}$$

によって  $j^4 F(\mathbf{0}) = \tilde{u}^4 + 2\tilde{u}^2 \tilde{v}^2 + \tilde{v}^4$  とできる.

□

この時,  $F$  の特異点の階層は図4のようになる.

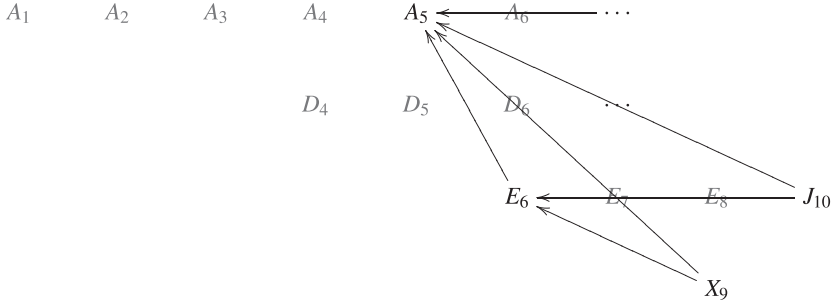


図4 ホイットニーの傘の特異点階層

focal conic が双曲線の時,  $g_1, g_2 (g_1 < g_2)$  を focal conic の漸近線の傾きとおく. [4] の命題 3.4 より,  $g_1 = a_{11} - \sqrt{a_{20}a_{02}}$  と  $g_2 = a_{11} + \sqrt{a_{20}a_{02}}$  である. また,  $-\cot \alpha$  は標準カスプ辺の極限法平面を  $yz$ -平面に射影したときの直線の傾きである. さきに示した定理より, focal conic についての系が得られる.

- Corollary 4.**
- $j^4 F(\mathbf{0})$  が  $\pm u^4$  と  $\mathcal{R}$ -同値のとき, focal conic は放物線か双曲線. さらに,
    - \*  $a_{20} = 0$  ならば放物線.
    - \*  $a_{20} \neq 0$ , すなわち  $(a_{11} - \cot \alpha)^2 = a_{20}a_{02}$  ならば双曲線で,  $-\cot \alpha = g_1$  or  $g_2$  が成り立つ.
  - If  $j^4 F(\mathbf{0})$  が  $\pm u^2 v^2$  と  $\mathcal{R}$ -同値のとき, focal conic は楕円か双曲線. さらに,
    - \*  $a_{20}a_{02} < 0$  ならば楕円.
    - \*  $a_{20}a_{02} > 0$  ならば双曲線で,  $-\cot \alpha < g_1$  or  $g_2 < -\cot \alpha$  が成り立つ.
  - $j^4 F(\mathbf{0})$  が  $\pm(u^4 + 2u^2 v^2 + v^4)$  と  $\mathcal{R}$ -同値のとき, focal conic は双曲線で,  $g_1 < -\cot \alpha < g_2$  が成り立つ.

参考文献

[1] V. I. Arnold, *Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups  $A_k, D_k, E_k$  and Lagrangian singularities*, Funkcional. Anal. Prilozen. **6** (1972), no. 4, 3–25.  
 [2] J. W. Bruce and J. M. West, *Functions on cross-caps*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 19–39.

- [3] T. Fukui and M.Hasegawa, *Height functions on Whitney umbrellas* , RIMS Kokyuroku Bessatsu **B38** (2013), 153-168.
- [4] T. Fukui and M.Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella - a differential geometric approach via blowing up* , J.Singularity. **4** (2012), 35-67.
- [5] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Flat surface along cuspidal edges*, J. Singularity **16** (2017) 73-100.
- [6] S. Izumiya, K. Saji and K. Teramoto, *Flat surfaces along swallowtails*, arXiv:1709.06133.
- [7] S. Izumiya and S. Otani, *Flat Approximations of surfaces along curves*, Demonstr. Math. **48** (2015), No.2. 217-241.
- [8] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross cap*, Selecta Math. online first, DOI:10.1007/s00029-013-0134-6.
- [9] R. Oset Sinha and F.Tari, *On the flat geometry of the cuspidal edge*, arXiv:1610.08702
- [10] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges* , Canadian. J. Math. **68** (2016), 445-462.
- [11] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian Curvature and Mean Curvature Near Non-degenerate Singular Points on Wave Fronts*, Geometry and topology of manifolds, Springer Proc. Math. Stat., **154** (2016), 247-281.
- [12] E.L.Rees, *Graphical Discussion of the Roots of a Quartic Equation* , American Math. Monthly **29**(1922) No.2 51-55.
- [13] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169**(2009), 491-529.
- [14] J.M. West, *The differential geometry of the cross-cap*, Ph.D. thesis, Liverpool University 1995.