# 枠付き曲面と枠付き曲線の一径数族

九州産業大学理工学部　福永 知則
Tomonori Fukunaga
Faculty of Science and Engineering,
Kyushu Sangyo University

特異点を持つ曲面は [1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22] など近年盛んに研究されている．著者らは特異点を持つ曲面の研究手法のひとつとして，論文 [7] において，枠付き曲面を導入した．一方，曲面は枠付き曲線の一係数族（[17]）として捉えることができる場合もある．本論文では，枠付き曲面と枠付き曲線の一径数族の関係について考察する．また，応用として，余階数 1 の特異点を持つ曲面をこれら二つの立場から考察する．本論文は高橋雅朋（室蘭工業大学）との共同研究 [8] に基づくものであり，詳しい証明などは [8] に譲ることにする．

## 1　準備

この節では，枠付き曲面と枠付き曲線の一径数族についての基本事項を紹介する．この節の内容に関する詳細は [7]，[17] を参照.

### 1.1　枠付き曲面

$U \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする．以下，特に断りのない限り，写像は $C^\infty$ 級とする．$\Delta = \{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in S^2 \times S^2 | \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ とする．但し，$\cdot$ はユークリッド空間の通常の内積とする．

**定義 1.1.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が枠付き曲面であるとは，$U$ 上で $\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ かつ $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s} = 0$ が成り立つことと定義する．また，$\boldsymbol{x}$ を枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ の枠付き底曲面と呼ぶ.

．$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s}$ とおくと，$\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交枠場になる．これを枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ の枠と呼ぶ.

枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，次の偏微分方程式系を得る.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_u \\ \boldsymbol{s}_u \\ \boldsymbol{t}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & f_1 \\ -e_1 & 0 & g_1 \\ -f_1 & -g_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_v \\ \boldsymbol{s}_v \\ \boldsymbol{t}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & f_2 \\ -e_2 & 0 & g_2 \\ -f_2 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}.$$

上記の関数 $a_i, b_i, e_i, f_i$ 及び $g_i$ $(i = 1, 2)$ を枠付き曲面の基本不変量と呼ぶ．また，上記の行列をそれぞれ $\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ と記し，基本行列と呼ぶ．

可積分条件より，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} a_{1,v} - b_1 g_2 = a_{2,u} - b_2 g_1, \\ b_{1,v} - a_2 g_1 = b_{2,u} - a_1 g_2, \\ a_1 e_2 + b_1 f_2 = a_2 e_1 + b_2 f_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} e_{1,v} - f_1 g_2 = e_{2,u} - f_2 g_1, \\ f_{1,v} - g_1 e_2 = f_{2,u} - g_2 e_1, \\ g_{1,v} - e_1 f_2 = g_{2,u} - e_2 f_1. \end{cases} \tag{1}$$

枠付き曲面の間の合同を次のように定義する．

**定義 1.2.** 二つの枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}), (\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{n}}, \widetilde{\boldsymbol{s}}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が合同であるとは，$A \in SO(3)$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が存在して，次が成立することである：

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(u, v) = A\boldsymbol{x}(u, v) + \boldsymbol{b}, \quad \widetilde{\boldsymbol{n}}(u, v) = A\boldsymbol{n}(u, v), \quad \widetilde{\boldsymbol{s}}(u, v) = A\boldsymbol{s}(u, v).$$

枠付き曲面に対して，次の基本定理が成り立つ．

**定理 1.3** (存在性定理 [7])**.** *$a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, 2$ を，可積分条件 (1) を満たす滑らかな関数とする．このとき，基本不変量が $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i$, $i = 1, 2$ となるような枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が存在する．*

**定理 1.4** (一意性定理 [7])**.** *$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}), (\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{n}}, \widetilde{\boldsymbol{s}}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面とし，その基本不変量はそれぞれ $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), (\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mathcal{F}}_2)$ であるとする．このとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ と $(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{n}}, \widetilde{\boldsymbol{s}})$ が枠付き曲面として合同であるためには，$(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ と $(\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mathcal{F}}_2)$ が一致することが必要十分である．*

枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}(u, v), \boldsymbol{n}(u, v), \boldsymbol{s}(u, v))$ と滑らかな写像 $\theta : U \to \mathbb{R}$ に対して， 写像の組 $(\boldsymbol{s}^\theta(u, v), \boldsymbol{t}^\theta(u, v)) \in \Delta$ を次のように定義する．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^\theta(u, v) \\ \boldsymbol{t}^\theta(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u, v) & -\sin\theta(u, v) \\ \sin\theta(u, v) & \cos\theta(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}(u, v) \\ \boldsymbol{t}(u, v) \end{pmatrix},$$

このとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}^\theta)$ は枠付き曲面となり，$\{\boldsymbol{n}(u, v), \boldsymbol{s}^\theta(u, v), \boldsymbol{t}^\theta(u, v)\}$ は $\boldsymbol{x}(u, v)$ に沿った枠となる．この枠を，$\{\boldsymbol{n}(u, v), \boldsymbol{s}(u, v), \boldsymbol{t}(u, v)\}$ を $\theta$ 回転させることにより得られる枠と呼ぶ．

## 1.2 枠付き曲線の一径数族

以下では，枠付き曲線の一径数族について解説をする．枠付き曲線の一径数族の詳細については [17]，またユークリッド空間内のフロンタルや枠付き曲線については [5, 9] を参照．

**定義 1.5.** $(\gamma,\nu_1,\nu_2):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $u$ について枠付き曲線の一径数族（$v$ について枠付き曲線の一径数族）であるとは，$(\gamma(\cdot,v),\nu_1(\cdot,v),\nu_2(\cdot,v))$ が各 $v$ に対して枠付き曲線 $((\gamma(u,\cdot),\nu_1(u,\cdot),\nu_2(u,\cdot))$ が各 $u$ に対して枠付き曲線) となることである.

$(\gamma,\nu_1,\nu_2):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を $u$ に関する枠付き曲線の一径数族とする．正則曲線の場合と同様にして，次のフレネ型の公式を得る.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\nu_{1u}(u,v)\\ \nu_{2u}(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}_u(u,v)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & \ell(u,v) & m(u,v)\\ -\ell(u,v) & 0 & n(u,v)\\ -m(u,v) & -n(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1(u,v)\\ \nu_2(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}(u,v)\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\nu_{1v}(u,v)\\ \nu_{2v}(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}_v(u,v)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & L(u,v) & M(u,v)\\ -L(u,v) & 0 & N(u,v)\\ -M(u,v) & -N(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1(u,v)\\ \nu_2(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}(u,v)\end{pmatrix},\\
\gamma_u(u,v) &= \alpha(u,v)\boldsymbol{\mu}(u,v),\\
\gamma_v(u,v) &= P(u,v)\nu_1(u,v)+Q(u,v)\nu_2(u,v)+R(u,v)\boldsymbol{\mu}(u,v),
\end{aligned}
$$

**定義 1.6.** 上記の写像の組 $(\ell,m,n,\alpha,L,M,N,P,Q,R)$ を $u$ に関する枠付き曲線の一径数族 $(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ の曲率と呼ぶ.

可積分条件より，次の式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
L_u(u,v) &= M(u,v)n(u,v)-N(u,v)m(u,v)+\ell_v(u,v),\\
M_u(u,v) &= N(u,v)\ell(u,v)-L(u,v)n(u,v)+m_v(u,v),\\
N_u(u,v) &= L(u,v)m(u,v)-M(u,v)\ell(u,v)+n_v(u,v),\\
P_u(u,v) &= Q(u,v)\ell(u,v)+R(u,v)m(u,v)-\alpha(u,v)M(u,v),\\
Q_u(u,v) &= -P(u,v)\ell(u,v)+R(u,v)n(u,v)-\alpha(u,v)N(u,v),\\
R_u(u,v) &= -P(u,v)m(u,v)-Q(u,v)n(u,v)+\alpha_v(u,v)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

**定義 1.7.** 二つの $u$ に関する枠付き曲線の一径数族 $(\gamma,\nu_1,\nu_2),(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が合同であるとは，$A\in SO(3)$ と $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ が存在して次が成り立つことである：

$$\widetilde{\gamma}(u,v)=A(\gamma(u,v))+\boldsymbol{a},\ \widetilde{\nu}_1(u,v)=A(\nu_1(u,v)),\ \widetilde{\nu}_2(u,v)=A(\nu_2(u,v)).$$

枠付き曲線の一径数族に対して，存在性定理と一意性定理が成り立つ.

**定理 1.8** (存在性定理 [17])**.** 可積分条件 (2) を満たす写像 $(\ell,m,n,\alpha,L,M,N,P,Q,R):U\to\mathbb{R}^{10}$ に対して，その曲率が $(\ell,m,n,\alpha,L,M,N,P,Q,R)$ となるような $u$ に関する枠付き曲線の一径数族 $(\gamma,\nu_1,\nu_2):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が存在する.

**定理 1.9** (一意性定理 [17])**.** $(\gamma,\nu_1,\nu_2),(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ を $u$ に関する枠付き曲線の一径数族とし，その曲率はそれぞれ $(\ell,m,n,\alpha,L,M,N,P,Q,R),(\widetilde{\ell},\widetilde{m},\widetilde{n},\widetilde{\alpha},\widetilde{L},\widetilde{M},\widetilde{N},\widetilde{P},\widetilde{Q},\widetilde{R})$ であるとする．このとき，$(\gamma,\nu_1,\nu_2)$ と $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2)$ が枠付き曲線の一径数族として合同であるためには，$(\ell,m,n,\alpha,L,M,N,P,Q,R)$ と $(\widetilde{\ell},\widetilde{m},\widetilde{n},\widetilde{\alpha},\widetilde{L},\widetilde{M},\widetilde{N},\widetilde{P},\widetilde{Q},\widetilde{R})$ が一致することが必要十分である.

次に枠付き曲線の一径数族の枠の回転を考える．$(\gamma, \nu_1, \nu_2) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を $u$ に関する枠付き曲線の一径数族とする．このとき，滑らかな写像 $\theta : U \to \mathbb{R}$ に対して $(\nu_1^\theta(u,v), \nu_2^\theta(u,v)) \in \Delta$ を次で定義する．

$$\begin{pmatrix} \nu_1^\theta(u,v) \\ \nu_2^\theta(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u,v) & -\sin\theta(u,v) \\ \sin\theta(u,v) & \cos\theta(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(u,v) \\ \nu_2(u,v) \end{pmatrix}.$$

$(\gamma, \nu_1^\theta, \nu_2^\theta) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は $u$ に関する枠付き曲線の一径数族になることがわかる．また，$\{\nu_1^\theta(u,v), \nu_2^\theta(u,v), \boldsymbol{\mu}(u,v)\}$ は $\gamma(u,v)$ に沿った枠になる．この枠を $\{\nu_1(u,v), \nu_2(u,v), \boldsymbol{\mu}(u,v)\}$ を $\theta(u,v)$ 回転することによって得られる枠と呼ぶ．

## 2　枠付き曲面と枠付き曲線の一径数族の関係

この節では，枠付き曲面が枠付き曲線の一径数族となるための条件，及び枠付き曲線の一径数族が枠付き曲面となるための条件について述べる．

### 2.1　枠付き曲面が枠付き曲線の一径数族となる条件

この節では，枠付き曲面が与えられたときに，それが枠付き曲線の一径数族となるための条件を述べる．まず，枠付き曲面の基本不変量 $\mathcal{G}$ の定義から，次の補題が示せる．

**補題 2.1.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面とし，$\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ をその枠とする．このとき，次が成り立つ．

(1)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ が $u$ に関して枠付き曲線の一径数族であるためには，$U$ 上で $a_1(u,v) = 0$ であることが必要十分である．

(2)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$ が $u$ に関して枠付き曲線の一径数族であるためには，$U$ 上で $b_1(u,v) = 0$ であることが必要十分である．

(3)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ が $v$ に関して枠付き曲線の一径数族であるためには，$U$ 上で $a_2(u,v) = 0$ であることが必要十分である．

(4)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$ が $v$ に関して枠付き曲線の一径数族であるためには，$U$ 上で $b_2(u,v) = 0$ であることが必要十分である．

上記の補題より，次の定理が示せる．

**命題 2.2.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面とし，$\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ をその枠とする．このとき，次が成り立つ．

(1)　$U$ 上で $k_1(u,v)a_1(u,v) + k_2(u,v)b_1(u,v) = 0$ となる $(k_1(u,v), k_2(u,v)) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U)$ で，任意の $(u,v) \in U$ に対して $(k_1(u,v), k_2(u,v)) \neq (0,0)$ となるものが存在するならば，関数 $\theta(u,v), \varphi(u,v) \in C^\infty(U)$ が存在して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}^\theta)$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}^\varphi)$ は $u$ に関して枠付き曲線の一径数族になる．

(2)　$U$ 上で $k_1(u,v)a_2(u,v) + k_2(u,v)b_2(u,v) = 0$ となる $(k_1(u,v), k_2(u,v)) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U)$ で，任意の $(u,v) \in U$ に対して $(k_1(u,v), k_2(u,v)) \neq (0,0)$ となるものが存在するならば，関数 $\theta(u,v), \varphi(u,v) \in C^\infty(U)$ が存在して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}^\theta)$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}^\varphi)$ は $v$ に関して枠付き曲線の一径数族になる．

証明. (1) 関数 $\theta(u,v) \in C^\infty(U)$ を

$$(\cos\theta(u,v), \sin\theta(u,v)) = \left(\frac{k_1(u,v)}{\sqrt{k_1(u,v)^2 + k_2(u,v)^2}}, \frac{-k_2(u,v)}{\sqrt{k_1(u,v)^2 + k_2(u,v)^2}}\right)$$

を満たすように定義する．このとき，

$$\begin{aligned} a_1^\theta(u,v) &= \cos\theta(u,v)a_1(u,v) - \sin\theta(u,v)b_1(u,v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_1(u,v)^2 + k_2(u,v)^2}}\left(k_1(u,v)a_1(u,v) + k_2(u,v)b_1(u,v)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

従って，補題 2.1 より，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}^\theta)$ は $u$ に関して枠付き曲線の一径数族になる．また，関数 $\varphi(u,v) \in C^\infty(U)$ を

$$(\cos\varphi(u,v), \sin\varphi(u,v)) = \left(\frac{k_2(u,v)}{\sqrt{k_1(u,v)^2 + k_2(u,v)^2}}, \frac{k_1(u,v)}{\sqrt{k_1(u,v)^2 + k_2(u,v)^2}}\right)$$

を満たすように定義する．このとき，

$$\begin{aligned} b_1^\varphi(u,v) &= \sin\varphi(u,v)a_1(u,v) + \cos\varphi(u,v)b_1(u,v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_1(u,v)^2 + k_2(u,v)^2}}\left(k_1(u,v)a_1(u,v) + k_2(u,v)b_1(u,v)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

従って，補題 2.1 より，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}^\varphi)$ は $u$ に関して枠付き曲線の一径数族になる．

(2) の証明も (1) と同様. □

なお，次の例が示すように，枠付き底曲面 $\boldsymbol{x}(u,v)$ から必ずしも $u$ または $v$ に関する枠付き曲線の一径数族が得られるとは限らない．

**例 2.3.** 関数 $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}} \cos\frac{1}{u^2}\cos\frac{1}{v^2}, e^{-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}} \sin\frac{1}{u^2}\sin\frac{1}{v^2}, 0\right) & (uv \neq 0) \\ (0,0,0) & (uv = 0) \end{cases}$$

このとき，$\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^2$ 上 $C^\infty$ である．また，$\boldsymbol{n}(u,v) = (0,0,1)$, $\boldsymbol{s}(u,v) = (1,0,0)$ と定めれば，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ は枠付き曲面になる．

次に，$\boldsymbol{x}$ が $u$ に関しても $v$ に関しても枠付き曲線の一径数族にならないことを示す．$uv \neq 0$ のとき，

$$\boldsymbol{x}_u(u,v) = \frac{e^{-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}}}{u^3}\left(\left(\cos\frac{1}{u^2} + \sin\frac{1}{u^2}\right)\cos\frac{1}{v^2}, \left(\sin\frac{1}{u^2} - \cos\frac{1}{u^2}\right)\sin\frac{1}{v^2}, 0\right)$$

であるから，$\cos(1/v^2)\sin(1/v^2) \neq 0$ となる $v$ に対して，$\lim_{u\to 0+0} \boldsymbol{x}_u(u,v)/|\boldsymbol{x}_u(u,v)|$ は存在しない．よって，$\boldsymbol{x}(u,v)$ は $u$ に関して枠付き曲線の一径数族にならない（[6]）．また，$v$ に関しても同様の計算で枠付き曲線の一径数族にならないことがわかる．特に，$\boldsymbol{x}(u,v)$ は $(0,0)$ の近傍で枠付き曲線の一径数族にはならない．

枠付き曲面が枠付き曲線の一径数族になるときに，枠付き曲面の基本不変量と枠付き曲線の一径数族の曲率の関係は次のようになることが直接計算により示せる．

**補題 2.4.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面とし，基本不変量が

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \begin{pmatrix} 0 & b_1(u,v) \\ a_2(u,v) & b_2(u,v) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{F}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & e_1(u,v) & f_1(u,v) \\ -e_1(u,v) & 0 & g_1(u,v) \\ -f_1(u,v) & -g_1(u,v) & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2(u,v) & f_2(u,v) \\ -e_2(u,v) & 0 & g_2(u,v) \\ -f_2(u,v) & -g_2(u,v) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であるとする．このとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ の $u$ に関する枠付き曲線の一径数族としての曲率を

$$(\alpha(u,v), \ell(u,v), m(u,v), n(u,v), L(u,v), M(u,v), N(u,v), P(u,v), Q(u,v), R(u,v))$$

とおくと，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(\alpha(u,v), \ell(u,v), m(u,v), n(u,v), L(u,v), M(u,v), N(u,v), P(u,v), Q(u,v), R(u,v)) \\
&= (b_1(u,v), e_1(u,v), f_1(u,v), g_1(u,v), e_2(u,v), f_2(u,v), g_2(u,v), 0, a_2(u,v), b_2(u,v)).
\end{aligned}
$$

## 2.2 枠付き曲線の一径数族が枠付き曲面となる条件

この節では，前節とは逆に，枠付き曲線の一径数族が与えられたとき，それが枠付き曲面になるための条件について述べる．

まず，$u$ に関する枠付き曲線の一径数族 $(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_1^u(u,v), \nu_2^u(u,v)) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が与えられたときに，$\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ が枠付き底曲面となるための条件を，$(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_1^u(u,v), \nu_2^u(u,v))$ の曲率を用いて表す．枠付き曲線の一径数族の曲率の定義及び枠付き曲面の定義により，次の補題が従う．

**補題 2.5.** $(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_1^u(u,v), \nu_2^u(u,v)) : U \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を $u$ に関して枠付き曲線の一径数族とし，その曲率を

$$(\alpha^u(u,v), \ell^u(u,v), m^u(u,v), n^u(u,v), L^u(u,v), M^u(u,v), N^u(u,v), P^u(u,v), Q^u(u,v), R^u(u,v))$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

(1) $(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_1^u(u,v), \nu_2^u(u,v))$ が枠付き曲面であるためには，$U$ 上で $P^u(u,v) = 0$ となることが必要十分である．

(2) $(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_2^u(u,v), \nu_1^u(u,v))$ が枠付き曲面であるためには，$U$ 上で $Q^u(u,v) = 0$ となることが必要十分である．

この補題より次の命題が従う．

**命題 2.6.** $(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^u(u,v),\nu_2^u(u,v)):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $u$ に関する枠付き曲線の一径数族であるとする．このとき，次が成り立つ：$U$ 上で $k_1(u,v)P^u(u,v)+k_2(u,v)Q^u(u,v)=0$ となる $(k_1(u,v),k_2(u,v))\in C^\infty(U)\times C^\infty(U)$ で，任意の $(u,v)\in U$ に対して $(k_1(u,v),k_2(u,v))\neq(0,0)$ となるものが存在するならば，関数 $\theta(u,v),\varphi(u,v)\in C^\infty(U)$ が存在して，関数 $(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^{u,\theta}(u,v),\nu_2^{u,\theta}(u,v))$ 及び $(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_2^{u,\varphi}(u,v),\nu_1^{u,\varphi}(u,v))$ は枠付き曲面になる．

証明．$u$ に関する枠付き曲線の一径数族 $(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^{u,\theta}(u,v),\nu_2^{u,\theta}(u,v)):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ に対して $P^{u,\theta}(u,v)=P^u(u,v)\cos\theta(u,v)-Q^u(u,v)\sin\theta(u,v)$, $Q^{u,\theta}(u,v)=P^u(u,v)\sin\theta(u,v)+Q^u(u,v)\cos\theta(u,v)$ であることに注意する．命題 2.2 と同様にして $U$ 上で $P^{u,\theta}(u,v)=0$ となる $\theta(u,v)\in C^\infty(U)$ 及び $U$ 上で $Q^{u,\varphi}(u,v)=0$ となる $\varphi(u,v)\in C^\infty(U)$ を構成することができる． □

次に，$\boldsymbol{x}(u,v)$ が $u$ と $v$ 両方に関する枠付き曲線の一径数族になっているときに，枠付き底曲面になるための条件を考える．次の定理が得られる．

**定理 2.7.** 関数 $\boldsymbol{x}(u,v):U\to\mathbb{R}^3$ に対して $(\nu_1^u(u,v),\nu_2^u(u,v)),(\nu_1^v(u,v),\nu_2^v(u,v))\in\Delta$ が存在して，それぞれ，$(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^u(u,v),\nu_2^u(u,v)):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $u$ に関する枠付き曲線の一径数族，$(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^v(u,v),\nu_2^v(u,v)):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ が $v$ に関する枠付き曲線の一径数族になっているとする．$\boldsymbol{\mu}^u(u,v)=\nu_1^u(u,v)\times\nu_2^u(u,v)$, $\boldsymbol{\mu}^v(u,v)=\nu_1^v(u,v)\times\nu_2^v(u,v)$ とおく．このとき，次の (1), (2) のいずれかが成り立てば，$\boldsymbol{x}(u,v)$ は枠付き底曲面，即ちある $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})\in\Delta$ が存在して，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は枠付き曲面になる．
(1) $\boldsymbol{\mu}^u(u,v)$ と $\boldsymbol{\mu}^v(u,v)$ は $U$ の各点で一次従属，即ち $k_1(u,v)\boldsymbol{\mu}^u(u,v)+k_2(u,v)\boldsymbol{\mu}^v(u,v)=0,(u,v)\in U$ となる $(k_1(u,v),k_2(u,v))\in C^\infty(U)\times C^\infty(U)$ で，$(k_1(u,v),k_2(u,v))\neq(0,0)$, $(u,v)\in U$ となるものが存在する．
(2) $\boldsymbol{\mu}^u(u,v)$ と $\boldsymbol{\mu}^v(u,v)$ は $U$ の各点で一次独立，即ち $k_1(u,v)\boldsymbol{\mu}^u(u,v)+k_2(u,v)\boldsymbol{\mu}^v(u,v)=0,(u,v)\in U$ となる $(k_1(u,v),k_2(u,v))\in C^\infty(U)\times C^\infty(U)$ は，$(k_1(u,v),k_2(u,v))=(0,0)$, $(u,v)\in U$ のみ．

証明．(1) $\boldsymbol{n}(u,v)=\nu_1^u(u,v)$, $\boldsymbol{s}(u,v)=\boldsymbol{\mu}_1^u(u,v)$ とおくと，$\boldsymbol{x}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{n}(u,v)=0$, $\boldsymbol{x}_v(u,v)\cdot\boldsymbol{n}(u,v)=\alpha^v(u,v)\boldsymbol{\mu}^v(u,v)\cdot\nu_1^u(u,v)=(-k_1(u,v)/k_2(u,v))\alpha^v(u,v)\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\cdot\nu_1^u(u,v)=0$. また，$\boldsymbol{n}(u,v)\cdot\boldsymbol{s}(u,v)=\nu_1^u(u,v)\cdot\boldsymbol{\mu}^u(u,v)=0$ であるから，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は枠付き曲面．
(2) $\boldsymbol{n}(u,v)=\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)/|\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)|$, $\boldsymbol{s}(u,v)=\boldsymbol{\mu}^u(u,v)$ とおくと，$\boldsymbol{x}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{n}(u,v)=\alpha^u(u,v)\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\cdot(\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)/|\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)|)=0$ ,$\boldsymbol{x}_v(u,v)\cdot\boldsymbol{n}(u,v)=\alpha^v(u,v)\boldsymbol{\mu}^v(u,v)\cdot(\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)/|\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)|)=0$. また，$\boldsymbol{n}(u,v)\cdot\boldsymbol{s}(u,v)=(\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)/|\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\boldsymbol{\mu}^v(u,v)|)\cdot\boldsymbol{\mu}^u(u,v)=0$. 従って $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}):U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は枠付き曲面． □

一方，次の具体例が示すように，枠付き曲線の一径数族は必ずしも枠付き底曲面であるとは限らない．

**例 2.8.** (交差帽子) $\boldsymbol{x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x}(u,v)=(u+v,(u+v)v,v^2)$ と定める．これは標準的な交差帽子 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(u,v)=(u,uv,v^2)$ に対して，パラメーター変換 $\phi(u,v)=(u+v,v)$ を施したものであることに注意する．この $\boldsymbol{x}(u,v)$ が $u$,$v$ 両方に関して枠付き曲線の一径数族であるこ

とを示す．まず，$u$ に関して枠付き曲線の一径数族であることを示す．$\boldsymbol{x}_u(u,v)=(1,v,0)$ であるから，$\boldsymbol{\mu}^u(u,v)=(1/\sqrt{1+v^2})(1,v,0)$, $\nu_1^u(u,v)=(1/\sqrt{1+v^2})(-v,1,0)$, $\nu_2^u(u,v)=\boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\nu_1^u(u,v)$ とおくと，$(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^u(u,v),\nu_2^u(u,v)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $u$ に関する枠付き曲線の一径数族になる．

次に $v$ に関して枠付き曲線の一径数族であることを示す．$\boldsymbol{x}_v(u,v)=(1,u+2v,2v)$ であるから，$\boldsymbol{\mu}^v(u,v)=(1/\sqrt{1+(u+2v)^2+4v^2})(1,u+2v,2v)$, $\nu_1^v(u,v)=(1/\sqrt{1+(u+2v)^2})(-(u+2v),1,0)$, $\nu_2^v(u,v)=\boldsymbol{\mu}^v(u,v)\times\nu_1^v(u,v)$ とおくと，$(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^v(u,v),\nu_2^v(u,v)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ は $v$ に関する枠付き曲線の一径数族になる．

ところが，交差帽子はフロンタルでない事が知られている (例えば，[4] 参照)．枠付き底曲面はフロンタルであるので，従って，$\boldsymbol{x}(u,v)$ は枠付き底曲面ではない．

## 3　余階数 1 の特異点

この節では，余階数 1 の特異点を持つ曲面に関して，枠付き曲面及び枠付き曲線の一径数族の立場から考察する．点 $(0,0)$ において余階数 1 の特異点を持つ曲面 $\boldsymbol{x}:U\to\mathbb{R}^3$ は，パラメータ変換により原点の周りで $\boldsymbol{x}(u,v)=(u,f(u,v),g(u,v)),\ f,g\in C^\infty(U)$ の形で表せることに注意する．

**定理 3.1.** 曲面 $\boldsymbol{x}:U\to\mathbb{R}^3$ が $\boldsymbol{x}(u,v)=(u,f(u,v),g(u,v)),\ f,g\in C^\infty(U)$ の形で与えられているとする．このとき，次が成り立つ．
(1)　曲面 $\boldsymbol{x}(u,v)$ は $u$ に関して枠付き曲線の一径数族になる．
(2)　曲面 $\boldsymbol{x}(u,v)$ がある原点の近傍上で $v$ に関して枠付き曲線の一径数族になるためには，ある原点の近傍 $U_0$ と，$k_1(u,v)f_v(u,v)+k_2(u,v)g_v(u,v)=0$, $(k_1(u,v),k_2(u,v))\neq(0,0)$, $(u,v)\in U_0$ となる関数 $(k_1(u,v),k_2(u,v))\in C^\infty(U_0)\times C^\infty(U_0)$ が存在することが必要十分である．

証明．(1)　$\boldsymbol{x}_u(u,v)=(1,f_u(u,v),g_u(u,v))$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^u(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{1+f_u(u,v)^2+g_u(u,v)^2}}(1,f_u(u,v),g_u(u,v)),\\
\nu_1^u(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{1+f_u(u,v)^2}}(-f_u,1,0),\\
\nu_2^u(u,v) &= \boldsymbol{\mu}^u(u,v)\times\nu_1^u(u,v)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+g_u^2}\sqrt{1+f_u^2}}(-g_u(u,v),-f_u(u,v)g_u(u,v),1+f_u(u,v)^2)
\end{aligned}
$$

とおけば，$(\boldsymbol{x}(u,v),\nu_1^u(u,v),\nu_2^u(u,v))$ は $u$ に関する枠付き曲線の一径数族になる．
(2)　$\boldsymbol{x}_v(u,v)=(0,f_v(u,v),g_v(u,v))$ である．

十分であることを示す．全ての $(u,v)\in U_0$ に対して $k_1(u,v)f_v(u,v)+k_2(u,v)g_v(u,v)=0$, $(k_1(u,v),k_2(u,v))\neq(0,0)$ となる $(k_1(u,v),k_2(u,v))$ が存在することより，$\nu_1^v(u,v)=(1/\sqrt{k_1(u,v)^2+k_2(u,v)^2})(0,k_1(u,v),k_2(u,v))$, $\nu_2^v(u,v)=(1,0,0)$, $\boldsymbol{\mu}^v(u,v)=\nu_1^v(u,v)\times\nu_2^v(u,v)=(1/\sqrt{k_1(u,v)^2+k_2(u,v)^2})(0,k_2(u,v),-k_1(u,v))$ と定義することができる．こ

のとき，$\boldsymbol{x}_v(u,v)\cdot\nu_1^u(u,v) = (k_1(u,v)f_v(u,v)+k_2(u,v)g_v(u,v))/\sqrt{k_1(u,v)^2+k_2(u,v)^2} = 0$, $\boldsymbol{x}_v(u,v)\cdot\nu_2^v(u,v) = \nu_1^v(u,v)\cdot\nu_2^v(u,v) = 0$ であるから，$(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_1^v(u,v), \nu_2^v(u,v))$ は $U_0$ 上で $v$ に関する枠付き曲線の一径数族である．

必要であることを示す．$(\boldsymbol{x}(u,v), \nu_1^v(u,v), \nu_2^v(u,v))$ が $U_0$ 上で $v$ に関する枠付き曲線の一径数族であるとする．

$$\nu_1^v(u,v) = (\nu_{11}^v(u,v), \nu_{12}^v(u,v), \nu_{13}^v(u,v)), \quad \nu_2^v(u,v) = (\nu_{21}^v(u,v), \nu_{22}^v(u,v), \nu_{23}^v(u,v))$$

とおく．$\boldsymbol{x}_v(u,v)\cdot\nu_1^v(u,v) = \nu_{12}^v(u,v)f_v(u,v)+\nu_{13}^v(u,v)g_v(u,v) = 0$, $\boldsymbol{x}_v(u,v)\cdot\nu_2^v(u,v) = \nu_{22}^v(u,v)f_v(u,v)+\nu_{23}^v(u,v)g_v(u,v) = 0$ である．ここで，$(\nu_{12}^v(0,0), \nu_{13}^v(0,0)) \neq (0,0)$ であれば，原点の近傍 $U_0$ を選びなおすことにより，全ての $(u,v)\in U_0$ で $(\nu_{12}^v(u,v), \nu_{13}^v(u,v)) \neq (0,0)$ と出来る．従って，$(k_1(u,v), k_2(u,v)) = (\nu_{12}^v(u,v), \nu_{13}^v(u,v))$ とすれば求める条件を満たす．$(\nu_{12}^v(0,0), \nu_{13}^v(0,0)) = (0,0)$ となるときは，$\nu_1^v(0,0) = (1,0,0)$ であるから，$\nu_1^v(0,0)\cdot\nu_2^v(0,0) = 0$ より，$(\nu_{22}^v(0,0), \nu_{23}^v(0,0)) \neq (0,0)$. 従って，$(0,0)$ のある近傍上 $U_0$ 上で $(\nu_{22}^v(u,v), \nu_{23}^v(u,v)) \neq 0$ とできる．従って，$(k_1(u,v), k_2(u,v)) = (\nu_{22}^v(u,v), \nu_{23}^v(u,v))$ とすればよい． □

また，曲面 $\boldsymbol{x}(u,v) = (u, f(u,v), g(u,v))$ にパラメータ変換 $\phi(u,v) = (u+v, v)$ を施すことにより，$\boldsymbol{x}(u,v) = (u+v, \tilde{f}(u,v), \tilde{g}(u,v))$ と表示することができる．このパラメータを用いた曲面に対して，上記の定理と同様にして次の系が成り立つ．

**系 3.2.** 曲面 $\boldsymbol{x}: U \to \mathbb{R}^3$ が $\boldsymbol{x}(u,v) = (u+v, f(u,v), g(u,v))$, $f, g \in C^\infty(U)$ の形で与えられているとする．このとき，$\boldsymbol{x}(u,v)$ は $u$ 及び $v$ に関して枠付き曲線の一径数族になる．

証明．定理 3.1(1) と同様の方法で，枠付き曲線の一径数族を構成できる． □

曲面 $\boldsymbol{x}(u,v) = (u, f(u,v), g(u,v))$ に対して，パラメータ変換 $\phi(u,v) = (u+v, v)$ を施すと，$\boldsymbol{x}\circ\phi(u,v) = (u+v, \widetilde{f}(u,v), \widetilde{g}(u,v))$ を得る．定理 3.1 と同様にして次が成り立つ．

**系 3.3.** $\boldsymbol{x}: U \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x}(u,v) = (u+v, f(u,v), g(u,v))$ の形で与えられた滑らかな曲面とする．このとき，滑らかな写像 $(\nu_1^u, \nu_2^u): U \to \Delta$ 及び $(\nu_1^v, \nu_2^v): U \to \Delta$ が存在して，$(\boldsymbol{x}, \nu_1^u, \nu_2^u)$ 及び $(\boldsymbol{x}, \nu_1^v, \nu_2^v)$ はそれぞれ $u$ 及び $v$ に関する枠付き曲線の一径数族になる．

定理 3.1 (2) と同様の構成方法により，次の命題が得られる (cf. [15, Proposition 3.4]).

**命題 3.4.** $\boldsymbol{x}: U \to \mathbb{R}^3$ を滑らかな曲面とし，$p \in U$ を $\boldsymbol{x}$ の余階数 1 の特異点とする．$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}(u,v) = (u, f(u,v), g(u,v))$ の形で与えられているとする．このとき，滑らかな関数 $\boldsymbol{n}: U \to S^2$ が存在して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ がルジャンドルはめ込みとなるためには，任意の $(u,v)\in U$ に対し $(k_1(u,v), k_2(u,v)) \neq (0,0)$ かつ $k_1(u,v)f_v(u,v)+k_2(u,v)g_v(u,v) = 0$ を満たす滑らかな関数 $k_1, k_2: U \to \mathbb{R}$ が存在することが必要十分である．

証明．任意の $(u,v)\in U$ に対して $k_1(u,v)f_v(u,v)+k_2(u,v)g_v(u,v) = 0$ とする．$\boldsymbol{n}: U \to S^2$ を

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{(-k_1(u,v)f_u(u,v)-k_2(u,v)g_u(u,v), k_1(u,v), k_2(u,v))}{\sqrt{(k_1(u,v)f_u(u,v)+k_2(u,v)g_u(u,v))^2+k_1^2(u,v)+k_2^2(u,v)}}.$$

と定義すると，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ はルジャンドル曲面になる．

逆に，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) : U \to \mathbb{R}^3 \times S^2$ がルジャンドル曲面であるとする．このとき，$\boldsymbol{n}(u,v) = (n_1(u,v), n_2(u,v), n_3(u,v))$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_u(u,v) \cdot \boldsymbol{n}(u,v) &= n_1(u,v) + f_u(u,v)n_2(u,v) + g_u(u,v)n_3(u,v) = 0,\\
\boldsymbol{x}_v(u,v) \cdot \boldsymbol{n}(u,v) &= f_v(u,v)n_2(u,v) + g_v(u,v)n_3(u,v) = 0.
\end{aligned}$$

ここで，$n_2(u,v) = n_3(u,v) = 0$ とすると, $n_1(u,v) = 0$ となり $\boldsymbol{n}(u,v) \in S^2$ に矛盾する．従って， $(n_2(u,v), n_3(u,v)) \neq (0,0)$ かつ $f_v(u,v)n_2(u,v) + g_v(u,v)n_3(u,v) = 0$ が成り立つ. □

定理 3.1 (2) と命題 3.4, から次の系が得られる．

**系 3.5.** $\boldsymbol{x} : (U,p) \to \mathbb{R}^3$ を滑らかな写像芽とし， $p$ を余階数 1 の特異点とする．$\boldsymbol{x}$ は $p$ の周りで $\boldsymbol{x}(u,v) = (u, f(u,v), g(u,v))$ の形で与えられているとする．このとき，以下は同値である．
(1) 滑らかな写像芽 $(\nu_1^v, \nu_2^v) : (U,p) \to \Delta$ が存在して，$(\boldsymbol{x}, \nu_1^v, \nu_2^v)$ は $v$ に関する枠付き曲線の一径数族となる．
(2) 滑らかな写像芽 $\boldsymbol{n} : (U,p) \to S^2$ が存在して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ はルジャンドル曲面になる．
(3) 滑らかな写像芽 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : (U,p) \to \Delta$ が存在して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ は枠付き曲面になる．

# 参考文献


[1] V. I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts.* Mathematics and Its Applications **62** Kluwer Academic Publishers (1990).

[2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol.* I, Birkhäuser, 1986.

[3] T. Fukui, Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail. *Preprint.*(2017)

[4] T. Fukui, M. Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella-a differential geometric approach via blowing up. *J. Singul.* **4** (2012), 35–67.

[5] T. Fukunaga, M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves. *J. Geometry.* **104** (2013), 297–307.

[6] T. Fukunaga, M. Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves. J. Geometry. **108**(2017), 763–774

[7] T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space. to appear in Bulletin of the Brazillian Mathematical Society, New Series.

[8] T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces and one-parameter families of framed curves in the Euclidean 3-space, *preprint.*

[9] S. Honda, M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.* **16** (2016), 265–276.

[10] G. Ishikawa, *Singularities of Curves and Surfaces in Various Geometric Problems.* CAS Lecture Notes 10, Exact Sciences, 2015.

[11] S. Izumiya, M. C. Romero-Fuster, M. A. S. Ruas, F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint.* World Scientific Pub. Co Inc. 2015.

[12] S. Izumiya, K. Saji, The mandala of Legendrean dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces. *J. singl.* **2** (2010), 92–127.

[13] L. F. Martins, J.J. Nuno-Ballesteros, Contact properties of surfaces in $\mathbb{R}^3$ with corank 1 singularities. *Tohoku Math. J.* **67**(1) (2015), 105–124.

[14] L. Martins, K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges. *Canad. J. Math.* **68** (2016), 445–462.

[15] J. J. Nuño-Ballesteros, Unfolding plane curves with cusps and nodes. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **145** (2015), 161–174.

[16] R. Oset Sinha, K. Saji, On the geometry of folded cuspidal edges. *To appear in Rev. Mat. Complut.* (2018).

[17] D. Pei, M. Takahashi and H. Yu, Envelopes of one-parameter families of framed curves. *Preprint.* (2018).

[18] K. Saji, Normal forms of swallowtail and its applications. *Internat. J. Math.* **29** (2018), 1850046, 17 pp.

[19] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, The geometry of fronts. *Ann. of Math. (2)* **169** (2009), 491–529.

[20] M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, *Contemp. Math.***675** (2016), 337–355.

[21] K. Teramoto, Parallel and dual surfaces of cuspidal edges. *Differential Geom. Appl.* **44** (2016), 52–62.

[22] J. M. West, The differential geometry of the cross cap. Ph.D. thesis, The University of Liverpool, 1995.