複素解析的不変量 κ の計算アルゴリズムについて

By

田島 慎一 *

§1. 序

本稿では, 複素解析と計算代数の観点から孤立特異点を持つ超曲面の κ-不変量について考察する. Grothendieck local duality の理論と local cohomology system の計算手法を用いることで, κ-不変量を求めるアルゴリズムを構成できることを紹介する.

1970 年代はじめに E. Brieskorn により, κ-不変量を表す公式を求めることが open problem として提起された ([1, 2]). このことが契機となり κ-不変量に興味が持たれ, 研究がはじまったようである. この κ-不変量は, 孤立特異点を持つ超曲面の Tjurina([17]) の意味での semi-versal deformation から構成される discriminant set を, generic な複素 2 次元の平面で切断することで得られる (複素の) 平面曲線の cusp の個数として定義される (B. Teissier の論文 [16] の第 3 章に詳しい説明がある). このように幾何学的に定義された概念であることから, 当初は, κ は特異点の位相的不変量であると予想されていたようである. しかし, 1973 年に発表された論文 [12] において, F. Pham は代数曲線に関する精緻な計算を行い, これにより κ は複素解析的不変量であるが位相的不変量ではないことを明らかにした. もし仮に位相的不変量であれば, 例えば半擬斉次孤立特異点をもつ超曲面の κ 不変量は対応する擬斉次孤立特異点をもつ超曲面のそれと同じであり, weight ベクトル等を用いて κ の値を表すような公式が存在してもおかしくはない. しかし, κ は複素解析的不変量であり位相的不変量ではない. したがって, κ を表す簡単な公式があるということは期待できない. これらのことから, F. Pham の発見により, 問題の設定自体が κ の値を表す公式ではなくその値を求める計算法を見出すという問題になったと考えられる.

さて, B. Iverson と Lê Dũng Tráng は 1974 年の論文 [5] において, $\mathbb{C}^2$ 内の平面曲線の germ の場合は, $\kappa+1$ が平面曲線の Milnor 数とその平面曲線の generic な polar curve の Millnor 数との和に等しいことを示した. この generic な polar curve 自体, 平面曲線の複素解析的不変量であり位相的不変量でない. つまり, B. Iverson と Lê Dũng Tráng の結果により, κ が位相的不変量でなく複素解析的不変量であることは, polar curve のもつ性質に依るものであることが明らかにされたことになる. その後, G.-M. Greuel は [3, 4] にお

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32S05; Secondary 13D45
Key Words: isolated hypersurface singularity, parametric local cohomology system
Supported by Grant-in Aid for Scientific Research 18K03320
*新潟大学自然科学系

いて, B. Iverson と Lê Dũng Tráng らの結果を一般の超曲面の場合に拡張し, さらに, 収束冪級数環において, あるイデアルを導入し, その colength として κ を表す式を得ている.

本稿では, この G.-M. Greuel の得た式に基づくことで, κ を求める計算アルゴリズムを構成することが可能となることを紹介する. 第 2 節では, G. -M. Greuel の得た式を紹介し, 与えられた超曲面の κ 不変量を求める計算法の概略をのべる. 第 3 節では, 特異点の変形族が与えられたときに, 複素解析的な不変量 κ の変形パラメータへの依存性を求めるアルゴリズムを構成することができることを紹介する.

§ 2.　Greuel の結果と local cohomology

この節では, まず, 議論の出発点となる Greuel の結果を思い出す.

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍とする. X における正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表し, その O における stalk を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す. いま, 超曲面 S は, X 上正則な関数 $f(x)$ の零点集合として与えられているとする : $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

座標を $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ とおき, $\delta = \det(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,2,...,n}$ と定める. 収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \delta$ が生成するイデアルを I_Δ で表す.

$$I_\Delta = (\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \delta) \subset \mathcal{O}_{X,O}.$$

ここで, 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ の添え字 i は $i = 2$ からはじまっていることに注意されたい.

G. -M. Greuel([3]) は 1977 年に次の結果を得ている.

Theorem 2.1. 超曲面 $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ は原点 O に孤立特異点を持つとする. 座標系 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ は S に対し *generic* であるとする. このとき

$$\kappa = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_\Delta)$$

が成り立つ.

G. -M. Greuel はこの結果を用いて, unimodal singularity の μ-constant deformation に対し κ 不変量を求め, その結果から κ の値が変形パラメータにどのように依存するか調べている.

さて, κ を表すこの式を見ると, イデアル I_Δ のスタンダード基底をもとめれば標準的な方法で κ を求めることが出来そうに見える. しかし実際には, κ の計算はそれほど容易ではない. 計算にもちいる座標系は *generic* である必要があることが問題を困難にしている. この *genericity* は, 実際には $\Gamma = \{x \in X \mid \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\}$ なる polar variety Γ の *genericity* に他ならない. 言い換えれば, *genericity* の背景には, Nash blow-up あるいは limiting tangent space がある ([9]). このため, *generic* という条件をみたす座標系を (数学的な保証つきで間違いなく) 見つけるということが, 難しい.

この問題に対処するために, 固定されたひとつの座標系 $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ を用いて計算するのではなく, パラメータ $u_2,u_3,...,u_n$ を用いた線形の座標変換

$$z_1=x_1-u_2x_2-u_3x_3-\cdots-u_nx_n,\ z_2=x_2,\ z_3=x_3,\ \cdots,\ z_n=x_n$$

を考える. これを用いて $h(x_1,x_2,...,x_n)=f(x_1+u_2x_2+u_3x_3+\cdots+u_nx_n,x_2,x_3,...,x_n)$ とする, これらのパラメータ付きで h からさだまるイデアル I_Δ のスタンダード基底計算を行えば, *generic* な $u_2,u_3,...,u_n$ に対する $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_\Delta)$ の値が求める真の κ を与えることになる. と考えるのは自然である.

現在, 局所環におけるスタンダード基底計算は, Mora のアルゴリズムを用いるのが標準的であるが, Mora の方法で入力がパラメータを含むような場合を扱うような計算プログラムは実装されていない. それに対し, local cohomology を用いた計算法 ([14]) は, [6, 7, 8] においてパラメータを含むような場合を扱えるように拡張されている. 論文 [8] に与えた parametric local cohomology system を利用すると [7] あるいは [10] と同様にして, 剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/I_\Delta$ の (Grothendieck local duality の意味での) 双対空間を求め, その次元を計算することでパラメータ付きの場合も $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_\Delta)$ の値を求めることができる. この問題の場合, パラメータ空間 u において, open dense な stratum の上だけで, local cohomology 計算を行えば κ の値を求めるにはそれで十分である. したがって, 係数にパラメータ u をもつ local cohomology 計算において係数は u に関し多項式ではなく有理関数であるとして計算をして良いことになる. 有理関数係数での local cohomology 計算を行うことで計算の効率化が図れる. これにより κ を効率よく求めることができる ([10]).

§3. 特異点の変形族 f_t に対する κ_t の計算法

序において述べたように, κ は特異点の位相的不変量ではなく複素解析的不変量である. したがって, G. -M. Greuel が [3, 4] において研究したように, 位相的に同型であるが複素解析的には同型とは限らない特異点の族が与えられたとき, 対応する κ の族が変形パラメータにどのように依存しているかを求めることが問題として重要になる. この節では, $t=(t_1,t_2,...,t_m)$ をパラメータに持つ $f_t(x)$ であり, 超曲面 $f_t(x)=0$ が原点 O に孤立特異点を持つものが与えられた時, 超曲面 $f_t(x)=0$ が定める κ の値 κ_t を求める方法について述べる.

まず最初に, 前の節と同様に, パラメータ $u_2,u_3,...,u_n$ を用いた線形の座標変換

$$z_1=x_1-u_2x_2-u_3x_3-\cdots-u_nx_n,\ z_2=x_2,\ z_3=x_3,\ \cdots,\ z_n=x_n$$

を f_t に施し, $h_t(x_1,x_2,...,x_n)=f_t(x_1+u_2x_2+u_3x_3+\cdots+u_nx_n,x_2,x_3,...,x_n)$ と定める. 次に $\delta_t=\det(\dfrac{\partial^2 h_t}{\partial x_i\partial x_j})_{i,j=1,2,...,n}$ とおきパラメータ付きのイデアル

$$I_{\Delta_t}=(\frac{\partial h_t}{\partial x_2},\frac{\partial h_t}{\partial x_3},\cdots,\frac{\partial h_t}{\partial x_n},\delta_t)$$

を考える．これらはすべて, 2 種類のパラメータ t と u に依存していることに注意する．いま

$$V=\{x\in X \mid \frac{\partial h_t}{\partial x_2}(x)=\frac{\partial h_t}{\partial x_3}(x)=\cdots=\frac{\partial h_t}{\partial x_n}(x)=\delta_t(x)=0\}$$

とおく．この共通零点集合 V もパラメータ u,t に依存している．そのため, V の原点 O での局所次元もパラメータ値によって零次元でない場合も起こりうることになる．

さて, 論文 [8] にある parametric local cohomology system を求めるアルゴリズムは, 基本的に原点を孤立した零点として持つようなパラメータ付きイデアルに対し, 対応するパラメータ付き loocal cohomology class のなすベクトル空間の基底を, その基本的構造が一定であるようにパラメータ空間の分割を行いながら求めるように設計してある．したがって, このアルゴリズムを用いるまえに, あらかじめ, パラメータ付きのイデアルの局所次元判定を行う必要がある．

パラメータ付きイデアルの局所次元判定は, 論文 [11] に与えたアルゴリズムを用いて行う．これによりまず, 零次元とならないようなパラメータ空間の strata を求める．次に, この strata の補集合において, 論文 [8] に与えたアルゴリズムを実行し, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_{\Delta_t})$ のパラメータ依存性を求める．ここまでの計算によってパラメータ空間の分割として得られた u,t 空間における各 startum では, $\mathrm{dem}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_{\Delta_t})$ の値は一定である, この u,t 空間の分割から, (大雑把に言えば) u にかんしては *genericity* を持つような t 空間の分割を行い, κ_t を求めることになる．多少, 技術的なので詳細は省くが, 以上により, 複素解析的な不変量 κ の変形パラメータ依存性を求めることが可能となる

References

[1] E. Brieskorn, Exposés au Séminaires Shih Weishu, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1969–1970.

[2] E. Brieskorn, Vue d'ensemble sur les problèmes de monodromie, Astérisque **7** et **8** (1973), 393–413.

[3] G.-M. Greuel, Die Zahl der Spitzen und die Jacobi-Algebra einer isolierten Hyperflächensingularität, Manuscripta Math. **21** (1977), 227–241.

[4] G.-M. Greuel, Ergänzung und Berichtigung zu : Die Zahl der Spitzen und die Jacobi-Algebra einer isolierten Hyperflächensingularität, Manuscripta Math. **25** (1978), 205–208.

[5] B. Iversen et Lê Dũng Tráng, Calcul du nombre de cusps dans la déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'hypersurface complexe, Bull. S. M. France **102** (1974), 99–107.

[6] K. Nabeshima and S. Tajima, Computing Tjurina stratifications of μ-constant deformations via parametric local cohomology systems, Applicable Algebra in Engineering, Computation and Computing. **27** (2016), 451–467.

[7] K. Nabeshima and S. Tajima, Computing μ^*-sequences of hypersurface isolated singularities via parametric local cohomology systems, Acta Mathematica Vietnamica. **42**(2) (2017), 279–288.

[8] K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric

standard bases for zero-dimensional ideals, Journal of Symbolic Computation, **82** (2017), 91–122.

[9] K. Nabeshima and S. Tajima, A new method for computing limiting tangent spaces of isolated hypersurface singularity via algebraic local sohomology, Advanced Studies in Pure Mathematics **78** (2018), 331-344.

[10] K. Nabeshima and S. Tajima, Alternative algorithms for computing generic μ^*-sequences and local Euler obstructions of isolated hypersurface singularities, to appear in Journal of Algebra and its Applications. 2019

[11] K. Nabeshima and S. Tajima, Testing zero-dimensionality of varieties at a point, submitted

[12] F. Pham, Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3, Astérisque **7**et **8** (1973), 363–392.

[13] J.-J. Risler, Sur les déformations équisingulières d'idéaux, Bull. S. M. France **101** (1973), 3–16.

[14] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, J. Symbolic Computation, **44** (2009), 435–448

[15] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, in Several Topics on Real and Complex Singularities, 2014, 189–200, World Scientific

[16] B. Teissier, Cycles évanescentes, sections planes, et conditions de Whitney, Astérisque **7** et **8** (1973), 285–362.

[17] G. N. Tjurina, Locally semi-universal flat deformation of isolated singularities of complex spaces, Math. USSR Izvestija **3** (1970), 967–999.