数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 70-76

非線形二階常微分方程式の緩減衰正値最小解の存在について

Existence of slowly decaying positive minimal solutions for some 2-nd order ODEs

岐阜大学・工学部 浅川秀一 (Hidekazu ASAKAWA)
(Faculty of Engineering, Gifu University)

1 問題の設定と主定理

次の非線形二階常微分方程式の正値解 u の存在について考える.

$$(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)Q(r)u(r) + \rho(r)K(r)u(r)^p = 0, \qquad (-\infty \le a < r < b \le +\infty) \tag{1}$$

ここで, p は $p > 0$ $(p \neq 1)$ なる定数とし, $1/\rho(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $K(\cdot)$ $(K \not\equiv 0)$ は $L^1_{loc}(a,b)$ に属する関数であって, $\rho(r) > 0$, $K(r) \ge 0$ a.e. $r \in (a,b)$ を満たすとする。

常微分方程式 (1) が、正値解 u をもつとしよう。$P(r) := K(r)u(r)^{p-1}$ とおけば、u は次の二階線形常微分方程式の正値解でもある。

$$(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)Q(r)u(r) + \rho(r)P(r)u(r) = 0, \qquad (a < r < b) \tag{2}$$

正値解は非振動解であるから、線形常微分方程式 (2) は、$r = a$ と $r = b$ で非振動でなければならない。したがって、常微分方程式 (1) の線形部分の二階常微分方程式:

$$(\rho(r)u'(r))' + \rho(r)Q(r)u(r) = 0, \qquad (a < r < b) \tag{3}$$

も $r = a$ と $r = b$ で非振動でなければならない。このとき、二階線形常微分方程式の主解 (principal solution) の理論 (Hartman [2] 等) によれば、常微分方程式 (3) は次のような正値解 ϕ をもつ。

$$\int_a^c \frac{1}{\rho(r)\phi(r)^2}\,dr = +\infty, \quad \int_c^b \frac{1}{\rho(r)\phi(r)^2}\,dr < +\infty. \tag{4}$$

ただし、$a < c < b$ である。したがって、以下では次の (H) を仮定する。

(H) 線形常微分方程式 (3) の (4) を満たす正値解 ϕ が存在する。

さて，関数 $\hat{\phi}(\cdot)$ を

$$\hat{\phi}(r) := \phi(r)\int_r^b \frac{1}{\rho(y)\phi(y)^2}\,dy \quad (a < r < b)$$

で定義しよう．簡単な計算からわかるように，$\hat{\phi}(\cdot)$ も線形方程式 (3) の正値解であり，

$$\int_a^c \frac{1}{\rho(r)\hat{\phi}(r)^2}\,dr < +\infty, \quad \int_c^b \frac{1}{\rho(r)\hat{\phi}(r)^2}\,dr = +\infty \tag{5}$$

を満たす．さらに、

$$\psi(r) := \phi(r) + \hat{\phi}(r) \tag{6}$$

とおくと、$\psi(\cdot)$ も線形方程式 (3) の正値解であり，

$$\int_a^b \frac{1}{\rho(r)\psi(r)^2}\,dr = 1 \tag{7}$$

を満たす．

つぎのような変数変換を考える。

$$w(t) := \frac{u(r)}{\psi(r)}, \tag{8}$$
$$t := \int_a^r \frac{1}{\rho(r)\psi(r)^2}\,dr = \frac{\phi(r)}{\psi(r)}.$$

変換 (8) により、常微分方程式 (1) の解 $u(r)$ は、$[0,1]$ 区間上の常微分方程式：

$$w''(t) + k(t)w(t)^p = 0, \quad (0 < t < 1) \tag{9}$$

の解 $w(t)$ に対応する。ここで、

$$k(t) := \rho(r)^2\psi(r)^{p+3}K(r)$$

である。また、次の関係が成り立つ。

$$\frac{u(r)}{\phi(r)} = \frac{w(t)}{t}, \qquad \frac{u(r)}{\hat{\phi}(r)} = \frac{w(t)}{1-t}.$$

$u(r)$ が正値解であれば、$w(t)$ も正値解であり、微分方程式 (9) より、$w(\cdot)$ は上に凸な関数であるから、次の極限が ($+\infty$ も含めれば) 必ず存在する。

$$\lim_{r\to a}\frac{u(r)}{\phi(r)}=\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t}\quad (\in (0,+\infty]), \tag{10}$$

$$\lim_{r\to b}\frac{u(r)}{\hat{\phi}(r)}=\lim_{t\to 1}\frac{w(t)}{1-t}\quad (\in (0,+\infty]). \tag{11}$$

方程式 (1) の正値解 u に対し，極限 (10) が有限値 のとき ($+\infty$ のとき) 、$r=a$ で急減衰 ($r=a$ で緩減衰) と呼ぶことにしよう。また、極限 (11) が有限値 のとき ($+\infty$ のとき) 、$r=b$ で急減衰 ($r=b$ で緩減衰) と呼ぶことにする。

常微分方程式 (1) は、楕円型偏微分方程式の球対称解の満たす常微分方程式といってもよいであろう。楕円型偏微分方程式の正値球対称解の存在については、$r=a$ と $r=b$ でともに急減衰な解を考えることが多く、それについては広範な研究がなされている。ここでは、$r=a$ では急減衰で $r=b$ では緩減衰である正値解の存在について考えたい。この場合、$r=a$ で急減衰という条件は、$r=a$ に於ける境界条件的な拘束条件となるのに対して、$r=b$ で緩減衰という条件は、$r=b$ に於いてそのような役割を果たしてはくれないことを注意しておく。実際、正値解 u が $r=a$ で急減衰ということを、微分方程式 (9) の方でみれば、

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t}\quad \in (0,+\infty)$$

であり、$w\in C^1[0,1)$ のもとでは $w(0)=0$ という $t=0$ に於ける境界条件である。一方、正値解 u が $r=b$ で緩減衰ということを、微分方程式 (9) の方でみると、

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{1-t}=+\infty$$

であり、例えば、$w(1)>0$ であれば、これは常に成立する。すなわち、$r=b$ で正値解 u を拘束する条件とはなっていない。したがって、$r=b$ では、単に緩減衰というだけでなく、より細かな u の増大度に関する条件を課す方が得策と思われる。以下のような”境界条件”を考えることにする。

$$\lim_{r\to a}\frac{u(r)}{\phi(r)}>0,\qquad \lim_{r\to b}\frac{u(r)}{\phi(r)}=\beta. \tag{12}$$

ただし，β は与えられた正の定数とする．$r=b$ の方の条件は、微分方程式 (9) でみれば、

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t}=w(1)=\beta(>0)$$

であり、境界条件の役割を果たし得るものとなっている。また、

$$\lim_{r\to b}\frac{u(r)}{\hat{\phi}(r)}=\lim_{r\to b}\frac{u(r)}{\phi(r)}\lim_{r\to b}\frac{\phi(r)}{\hat{\phi}(r)}=\beta\times+\infty=+\infty$$

であって、$r=b$ で緩減衰の十分条件にもなっている。

結果を述べる前に、正値最小解の定義を述べておこう。$\underline{u}$ が方程式 (1) & (12) の正値最小解とは、$\underline{u}$ が (1) & (12) の正値解であって、方程式 (1) & (12) の任意の正値解 u に対して、$u\geq\underline{u}$ が成り立つことである。

定理 1. 条件 (H) と

$$\int_a^b \rho(r)\phi(r)^p\hat{\phi}(r)K(r)\,dr:=\kappa<+\infty \tag{13}$$

を仮定する。

(I) $0<p<1$ のとき、任意の $\beta>0$ に対して、方程式 (1) & (12) の正値最小解 $\underline{u}(\cdot;\beta)$ が存在する。

(II) $p>1$ のとき、$\Lambda\in[\beta(p,\kappa),+\infty)$ が存在して、任意の $\beta\in(0,\Lambda)$ に対して、方程式 (1) & (12) の正値最小解 $\underline{u}(\cdot;\beta)$ が存在する。ただし、

$$\beta(p,\kappa):=\frac{p-1}{p}(p\kappa)^{\frac{1}{1-p}}.$$

いずれの場合にも、正値最小解 $\underline{u}(\cdot;\beta)$ は、β に関して単調増加である。

$r=b$ では緩減衰であるような常微分方程式 (1) の正値解の存在については、草野・内藤学 [3] や柳田・四ッ谷 [5] 等にある。$a=0$, $b=+\infty$, $\rho(r)=r^{N-1}e^{\frac{r^2}{4}}$, $Q(r)\equiv\lambda$, $K(r)\equiv 1$ としたとき、方程式 (1) は自己相似解の楕円型方程式の球対称解が満たす常微分方程式であり、内藤雄 [4] では、自己相似解の楕円型方程式について無限遠で与えられた増大度の緩減衰であるような正値最小解の存在等について詳しく調べている。

2 証明の粗筋

前節の議論からわかるように、変数変換 (8) を用いることによって、方程式 (1) & (12) の正値解 u の存在は,

$$
\begin{aligned}
&w''(t)+k(t)w(t)^p=0, \quad (0<t<1)\\
&w(0)=0, \quad w(1)=\beta
\end{aligned}
\tag{14}
$$

の正値解 $w\in C[0,1]\cap C^1[0,1)$ の存在に帰着される. このとき、$k(\cdot)$ は, $k\not\equiv 0$ なる非負値の $L^1_{loc}(0,1)$-関数であり、条件 (13) は,

$$
\int_0^1 t^p(1-t)k(t)dt := \kappa < +\infty \tag{15}
$$

となる. 定理 1 を境界値問題 (14) の結果に焼き直すと次のようになる。

定理 2. $k(\cdot)$ は, $k\not\equiv 0$ なる非負値の $L^1_{loc}(0,1)$-関数で条件 (15) を満たすとする。

(I) $0<p<1$ のとき、任意の $\beta>0$ に対して、境界値問題 (14) の正値最小解 $\underline{w}(\cdot;\beta)\in C[0,1]\cap C^1[0,1)$ が存在する。

(II) $p>1$ のとき、$\Lambda\in[\beta(p,\kappa),+\infty)$ が存在して、任意の $\beta\in(0,\Lambda)$ に対して、境界値問題 (14) の正値最小解 $\underline{w}(\cdot;\beta)\in C[0,1]\cap C^1[0,1)$ が存在する。

いずれの場合にも、正値最小解 $\underline{w}(\cdot;\beta)$ は、β に関して単調増加である。

変換 (8) により、解の大小関係が保存されることに注意すれば、定理 2 から定理 1 が導かれることは明らかであろう。以下に、定理 2 の証明の要点を述べておく。

グリーン関数を用いて表示すれば、$w\in C[0,1]$ が境界値問題 (14) の解であることは、$\frac{w(t)}{t}\in L^\infty(0,1)$ かつ

$$
\begin{aligned}
w(t) =& L_\beta[w](t) \\
\equiv& \beta t+(1-t)\int_0^t sk(s)w(s)^p\,ds + t\int_t^1 (1-s)k(s)w(s)^p\,ds
\end{aligned}
\tag{16}
$$

と同値である。$w_0(t):=c_0t$ $(c_0>0)$ として、

$$
w_{n+1}:=L_\beta[w_n], \qquad c_{n+1}:=\beta+\kappa c_n^p \qquad (n\in\mathbf{N})
$$

としよう。L_β の定義より、帰納的に

$$0 \le w_{n+1}(t) \le t(\beta + \kappa c_n^p) = c_{n+1}t \tag{17}$$

が得られる。$0 < p < 1$ のときは、

$$\beta + \kappa c_0^p \le c_0$$

であれば、$c_n \le c_0$ $(n \in \mathbf{N})$ が成り立つ。また、$p > 1$ のときは、

$$\beta \le \beta(p, \kappa)$$

とし、$c_0 := (\kappa p)^{\frac{1}{1-p}}$ とおけば、$c_n \le c_0$ $(n \in \mathbf{N})$ が成り立つ。いづれの場合にも、

$$0 \le w_{n+1}(t) \le w_n(t) \le c_0 t \qquad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ。$\{w_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が単調減少であるから、

$$\hat{w}(t) := \lim_{n\to+\infty} w_n(t)$$

と定義する。$\int_0^1 t(1-t)t^p k(t)dt < +\infty$ であるから、

$$0 \le k(t)w_n(t)^p \le c_0^p t^p k(t) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

に注意すれば、$n \to +\infty$ とき、

$$w_n \to \hat{w} \qquad \text{in } C[0,1]$$

がわかる。また、ルベーグの収束定理を用いれば、$n \to +\infty$ とき、

$$L_\beta[w_n] \to L_\beta[\hat{w}] \qquad \text{in } C[0,1]$$

が示せる。よって、次の補題を得る。

補題 3. 定理 2 と同じ仮定のもとで、以下のことが成り立つ。

(I) $0 < p < 1$ のとき、任意の $\beta > 0$ に対して、境界値問題 (14) の正値解 $\hat{w}(\cdot;\beta) \in C[0,1] \cap C^1[0,1)$ が存在する。

(II) $p > 1$ のとき、任意の $\beta \in (0, \beta(p,\kappa)]$ に対して、境界値問題 (14) の正値解 $\hat{w}(\cdot;\beta) \in C[0,1] \cap C^1[0,1)$ が存在する。

$\Lambda \in [0, +\infty]$ を次のように定義する。

$\Lambda := \sup\{\beta > 0 \mid$ (14) は $C[0,1] \cap C^1[0,1)$ に属する正値解をもつ。$\}$

補題 3 と零点比較定理から、次のことがわかる。

(I) $0 < p < 1$ のとき、$\Lambda = +\infty$.

(II) $p > 1$ のとき、$\Lambda \in [\beta(p, \kappa), +\infty)$.

さて、$\beta \in (0, \Lambda)$ とし、$v_0(t) := \beta t$ とおこう。$n \in \mathbf{N}$ に対して、関数 v_n を

$$v_{n+1} = L_\beta[v_n]$$

で帰納的に定義する。このとき、

$$\beta t \le v_n(t) \le v_{n+1}(t) \le \overline{w}(t)$$

が成り立つ。ただし、$\overline{w}$ は Λ の定義より存在する $\beta = \alpha$ $(\alpha \in [\beta, \Lambda])$ とした境界値問題 (14) の正値解である。補題 3 の直前の議論と同様にして、$\underline{w} \in C[0,1]$ があって、$n \to +\infty$ のとき、

$$\begin{aligned} v_n &\to \underline{w} && \text{in } C[0,1] \\ L_\beta[v_n] &\to L_\beta[\underline{w}] && \text{in } C[0,1] \end{aligned}$$

がわかる。これより、$\underline{w}$ は境界値問題 (14) の正値解である。また、境界値問題 (14) の任意の正値解 w に対して $w(t) \ge v_0(t)$ であることに注意すれば、$\underline{w}$ が定理 2 の正値最小解であることも示される。

参考文献

[1] A. Haraux, F. B. Weissler; Indiana Univ. Math. J. 31 (1982) 167–189.

[2] P. Hartman; *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston 1982.

[3] T. Kusano, M. Naito; Funkcial. Ekvac. 30 (1987) 269–282.

[4] Y. Naito; 数理解析研究所講究録 1309 (2003) 254–257.

[5] E. Yanagida, S. Yotsutani; Japan J. Indust. Appl. Math. 18 (2001)