

Oscillation theorems for 4-dimensional Emden-Fowler differential systems

愛媛大・理 内藤 学 (Manabu Naito)
Faculty of Science, Ehime University

1. 序

この論文の内容は、呉奮韜氏（東北師範大学・数学系，中国）との共同研究である。
ここでは，次の 1 階 4 次元微分方程式系

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_1' = a_1(t)|u_2|^{\lambda_1} \operatorname{sgn} u_2 \\ u_2' = a_2(t)|u_3|^{\lambda_2} \operatorname{sgn} u_3 \\ u_3' = a_3(t)|u_4|^{\lambda_3} \operatorname{sgn} u_4 \\ u_4' = -a_4(t)|u_1|^{\lambda_4} \operatorname{sgn} u_1 \end{cases}$$

を考える。ここで， $i = 1, 2, 3, 4$ に対して， λ_i は正の定数， $a_i(t)$ は区間 $[t_0, \infty)$ 上の連続関数で $a_i(t) > 0$ ($t \geq t_0$) と仮定する。

区間 $I \subset [t_0, \infty)$ で定義されたベクトル関数 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が I 上の (1.1) の解であるというのは， $\mathbf{u}(t)$ の各々の成分 $u_i(t)$ が I で定義された C^1 級の関数で，各 $t \in I$ において (1.1) が満たされることである。 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が無限区間 $[T, \infty)$ ， $T \geq t_0$ ，上の (1.1) の解であるとき，(1.1) における係数 $a_i(t)$ は $a_i(t) > 0$ ($t \geq t_0$) を満たすと仮定しているから， $\mathbf{u}(t)$ のある成分 $u_i(t)$ が非振動的 (nonoscillatory) ならば，他の成分も非振動的であり，また， $\mathbf{u}(t)$ のある成分 $u_i(t)$ が振動的 (oscillatory) ならば，他の成分も振動的である。ここでは，簡単のため，前者のとき (1.1) の解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ は非振動的 (nonoscillatory) であるといい，後者のとき (1.1) の解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ は振動的 (oscillatory) であるという。

我々の目的は，(1.1) が非振動的な解をもつための必要十分条件 (言い換えれば，対偶の命題として，(1.1) のすべての解が振動的であるための必要十分条件) を見出すことである。(1.1) の形の 1 階 4 次元微分方程式系は既に論文 [4] において

$$(1.2) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_i(t) dt = \infty, \quad i = 1, 2, 3$$

の場合と

$$(1.3) \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{\infty} a_1(t) dt = \infty, & \int_{t_0}^{\infty} a_2(t) dt < \infty, & \int_{t_0}^{\infty} a_3(t) dt = \infty, \\ \int_{t_0}^{\infty} a_1(t) \left(\int_t^{\infty} a_2(s) ds \right)^{\lambda_1} dt = \infty, & \int_{t_0}^{\infty} a_2(t) \left(\int_{t_0}^t a_3(s) ds \right)^{\lambda_2} dt = \infty \end{cases}$$

の場合が議論されているから、ここでは

$$(1.4) \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{\infty} a_1(t) dt = \infty, & \int_{t_0}^{\infty} a_2(t) dt < \infty, & \int_{t_0}^{\infty} a_3(t) dt = \infty, \\ \int_{t_0}^{\infty} a_1(t) \left(\int_t^{\infty} a_2(s) ds \right)^{\lambda_1} dt < \infty, & \int_{t_0}^{\infty} a_2(t) \left(\int_{t_0}^t a_3(s) ds \right)^{\lambda_2} dt < \infty \end{cases}$$

の場合を考察する.

微分方程式系 (1.1) についての結果を述べる前に、系 (1.1) は単独微分方程式

$$(1.5) \quad (r_3(t)(r_2(t)(r_1(t)u')'))' + p(t)|u|^{\beta-1}u = 0$$

および

$$(1.6) \quad (r(t)|u''|^{\alpha-1}u'')' + p(t)|u|^{\beta-1}u = 0$$

を含む形であり、(1.5) についての振動理論については内藤 [5], 北村 [3] などの、(1.6) についての振動理論については Wu [8], 内藤-Wu [7], 加茂-宇佐美 [1, 2] などの研究があることを注意しておく. ここで、(1.5), (1.6) において、 α, β は正の定数、 $r_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $r(t), p(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上の正値連続関数である.

2. 定理

最初にこの論文の基礎となる定理を述べておく. それは、微分方程式系 (1.1) の非振動的な解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ の成分の符号に関するものである. $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が (1.1) の解ならば、 $-\mathbf{u}(t) = (-u_1(t), -u_2(t), -u_3(t), -u_4(t))$ も (1.1) の解であるから、我々は非振動的な解 $\mathbf{u}(t)$ の第 1 成分 $u_1(t)$ は終局的に正値であるとして一般性を失わない:

$$(2.1) \quad u_1(t) > 0 \quad \text{for all large } t.$$

定理 2.1. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える. $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が (1.1) の非振動的な解であり (2.1) を満たしていれば、次の 4 つのうちの 1 つが起こる: 十分大きなすべての t に対して

$$(2.2) \quad u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0, \quad u_3(t) < 0, \quad u_4(t) < 0;$$

$$(2.3) \quad u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0, \quad u_3(t) > 0, \quad u_4(t) > 0;$$

$$(2.4) \quad u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0, \quad u_3(t) < 0, \quad u_4(t) > 0;$$

$$(2.5) \quad u_1(t) > 0, \quad u_2(t) < 0, \quad u_3(t) > 0, \quad u_4(t) > 0.$$

以下、この節では、絶えず (1.4) を仮定しておく。方程式系 (1.1) の非振動的な解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ で (2.2) ~ (2.5) を満たすものの存在性について、それぞれ、次のことが知られている (これらの一部は既に報告した [6])。

定理 2.2. 積分条件

$$(2.6) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_2(s) \left[\int_{t_0}^s a_3(r) \left\{ \int_{t_0}^r a_4(q) \left(\int_{t_0}^q a_1(p) dp \right)^{\lambda_4} dq \right\}^{\lambda_3} dr \right]^{\lambda_2} ds < \infty$$

が成立していれば、方程式系 (1.1) は (2.2) を満たす解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつ。

定理 2.3. 方程式系 (1.1) が (2.3) を満たす解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件は

$$(2.7) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_4(s) \left(\int_{t_0}^s a_1(r) dr \right)^{\lambda_4} ds < \infty$$

が成立することである。

定理 2.4. 方程式系 (1.1) が (2.4) を満たす解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件は

$$(2.8) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_3(s) \left(\int_s^{\infty} a_4(r) dr \right)^{\lambda_3} ds < \infty$$

が成立することである。

定理 2.5. 積分条件

$$(2.9) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_3(s) \left[\int_s^{\infty} a_4(r) \left\{ \int_r^{\infty} a_1(q) \left(\int_q^{\infty} a_2(p) dp \right)^{\lambda_1} dq \right\}^{\lambda_4} dr \right]^{\lambda_3} ds < \infty$$

が成立していれば、方程式系 (1.1) は (2.5) を満たす解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつ。

定理 2.3, 定理 2.4 では、(2.3), (2.4) を満たす非振動的な解の存在が、それぞれ、必要十分条件の形で明確に得られている (しかも、 λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) について何も前提となる条

件が課せられていない). しかし, 定理 2.2, 定理 2.5 では, それぞれ, (2.2), (2.5) を満たす非振動的な解の存在性の十分条件しか得られていない. そこで, 次に, (2.2), (2.5) を満たす非振動的な解の存在性の必要条件を求めてみる. このときには, λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) について或る前提を置かなければならない.

定理 2.6. (i) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 < 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.2) を満たす非振動的な解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件は (2.6) が成立することである.

(ii) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 > 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.2) を満たす非振動的な解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもてば

$$(2.10) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_3(s) \left[\int_{t_0}^s a_4(r) \left\{ \int_{t_0}^r a_1(q) dq \right\}^{\lambda_4} dr \right]^{\lambda_3} \left(\int_s^{\infty} a_2(r) dr \right)^{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4} ds < \infty$$

が成立する.

定理 2.7. (i) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 < 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.5) を満たす非振動的な解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもてば

$$(2.11) \quad \int_{t_0}^{\infty} a_4(s) \left\{ \int_s^{\infty} a_1(r) \left(\int_r^{\infty} a_2(q) dq \right)^{\lambda_1} dr \right\}^{\lambda_4} \left(\int_{t_0}^s a_3(r) dr \right)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4} ds < \infty$$

が成立する.

(ii) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 > 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.5) を満たす非振動的な解 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件は (2.9) が成立することである.

3. 系

上記の結果を単独方程式 (1.6) に適用してみよう. ここで, (1.6) において, α, β は正の定数, $r(t), p(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上の正值連続関数である. まず, (1.6) は方程式系

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_1' = |u_2| \operatorname{sgn} u_2 \\ u_2' = \frac{1}{(r(t))^{1/\alpha}} |u_3|^{1/\alpha} \operatorname{sgn} u_3 \\ u_3' = |u_4| \operatorname{sgn} u_4 \\ u_4' = -p(t) |u_1|^\beta \operatorname{sgn} u_1 \end{cases}$$

に書き直されることに注意する. これは (1.1) で

$$a_1(t) \equiv 1, \quad a_2(t) = \frac{1}{(r(t))^{1/\alpha}}, \quad a_3(t) \equiv 1, \quad a_4(t) = p(t);$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = \beta$$

の場合である。簡単のため、(1.6)における $r(t)$ は条件

$$(3.2) \quad 0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)}{t^k} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)}{t^k} < \infty \quad \text{for some } k \in \mathbf{R}$$

を満たしていると仮定する。このとき、条件 (1.4) は $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ に帰着される。定理 2.2 ~ 定理 2.7 を (3.1) に適用して次の結果を得る。

系 3.1. 単独方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し、 $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする。さらに、 $\alpha > \beta$ とする。このとき

(i) (1.6) が (2.2) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$(3.3) \quad \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{t^k} \int_{t_0}^t (t-s) s^\beta p(s) ds \right)^{1/\alpha} dt < \infty.$$

(ii) (1.6) が (2.3) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$(3.4) \quad \int_{t_0}^{\infty} t^\beta p(t) dt < \infty.$$

(iii) (1.6) が (2.4) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$(3.5) \quad \int_{t_0}^{\infty} tp(t) dt < \infty.$$

(iv) (1.6) が (2.5) を満たす解をもつための必要条件は

$$(3.6) \quad \int_{t_0}^{\infty} t^{\frac{\beta}{\alpha} + (-\frac{k}{\alpha} + 2)\beta} p(t) dt < \infty.$$

ところが、 $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ かつ $\alpha > \beta$ の下では、(3.4) ならば (3.3); (3.5) ならば (3.3); (3.6) ならば (3.3) であることが証明できる。よって、(1.6) が非振動的な解をもてばいつでも (3.3) が成り立つ。逆に、(3.3) が成り立っていれば、系 3.1 の (i) によって、[(2.2) を満たす] 非振動的な解をもつ。従って、次の系を得る。

系 3.2. 方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し、 $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする。さらに、 $\alpha > \beta$ とする。このとき、方程式 (1.6) が非振動的な解をもつための必要十分条件は (3.3) が成り立つことである。

同様に我々は次を得る。

系 3.3. 単独方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し、 $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする。さらに、 $\alpha < \beta$ とする。このとき

(i) (1.6) が (2.2) を満たす解をもつための必要条件は

$$(3.7) \quad \int_{t_0}^{\infty} t^{(-\frac{k}{\alpha}+1)\beta} \left(\int_{t_0}^t s^{\beta} p(s) ds \right) dt < \infty.$$

(ii) (1.6) が (2.3) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$(3.4) \quad \int_{t_0}^{\infty} t^{\beta} p(t) dt < \infty.$$

(iii) (1.6) が (2.4) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$(3.5) \quad \int_{t_0}^{\infty} tp(t) dt < \infty.$$

(iv) (1.6) が (2.5) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$(3.8) \quad \int_{t_0}^{\infty} t^{1+(-\frac{k}{\alpha}+2)\beta} p(t) dt < \infty.$$

系 3.4. 方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し, $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする. さらに, $\alpha < \beta$ とする. このとき, 方程式 (1.6) が非振動的な解をもつための必要十分条件は (3.8) が成り立つことである.

引用文献

- [1] K.-I. Kamo and H. Usami, Oscillation theorems for fourth-order quasilinear ordinary differential equations, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **39**(2002), 385–406.
- [2] 加茂 憲一, 宇佐美 広介, 4階準線形常微分方程式の振動定理, 京都大学数理解析研究所講究録 1254 「関数方程式の解のダイナミクスとその周辺」, pp. 1–7, 2002.
- [3] Y. Kitamura, Characterization of oscillation of fourth order functional differential equations with deviating arguments, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **124**(1980), 345–365.
- [4] T. Kusano, M. Naito and Wu F., On the oscillation of solutions of 4-dimensional Emden-Fowler differential systems, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **11**(2001), 685–719.
- [5] M. Naito, On positive solutions of fourth order nonlinear differential inequalities, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **117**(1978), 79–113.

- [6] 内藤 学, On the asymptotic behavior of solutions of 4-dimensional Emden-Fowler differential systems, 京都大学数理解析研究所講究録 1309 「関数方程式と数理モデル」, pp. 222–228, 2003.
- [7] M. Naito and Wu F., On the existence of eventually positive solutions of fourth order quasilinear differential equations, submitted for publication.
- [8] Wu F., Nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations, Funkcial. Ekvac., 45(2002), 71–88.