

中高校生向けの数学の講義の工夫

城西大学 理学部 大島利雄

FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY, TOSHIO OSHIMA

1 はじめに

大学の教員として長年数学教育に携わってきたので、大学での一般数学教育に関わる講演を何度か行ってきた (cf. [3], [4] など). 一方、東京大学玉原セミナーハウスにおいて「群馬県高校数学キャンプ」や「高校生のための現代数学講座」で高校生への講義を何度か行った。これは毎年1つのテーマを決め、複数の東京大学の教員がそのテーマについて講義を行うというものである。これらの講義の配布プリントや講義動画が東京大学の数理科学研究科のホームページに公開されているので、詳しくはそれをご覧ください。

その他にも、高校生や中学生に対して今まで多くの講義を行ってきた。依頼を受けたほとんどは一コマの講義であった。聴講生の予備知識の判断があらかじめ難しいことが多く、また、参加者に中学1年生から高校3年生まで含まれるケースなどもある。このような場合に数学の内容を理解してもらうために、幾何的な問題や手法を使うことが多くあった。コンピュータを使った画像や動画、あるいは幾何模型などを用いることによって、いろいろなレベルの者に興味を持って理解してもらえることを実感してきた。幾何的内容として、カージオイド曲線 (心臓形) に関わる話やそれを一部含む話を何度か取り上げたことがある。ここではまずそれに関わる数学的事実を初等幾何で示してみよう。講義ではあまり触れられなかった内容である。さらに、今回のRIMS共同研究での大西俊弘氏の講演 [7] で出された問題に対する答を解説し、最後に初等幾何の証明の話をいくつか述べる。

2 カージオイド曲線

カージオイドは高校3年の教科書「数学 III」に、極座標を用いて

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

と表せる曲線として登場するが、次のような曲線としても現れる。

- (1) 円周上の点光源から出た光が、円周で反射した後の光線を描く (包絡線)
- (2) 円周上の一点を端点とする弦を直径とする円を描く (包絡線)
- (3) 固定した円周に沿って同じ半径の円を滑らずに転がすときの円上の一点の軌跡
- (4) 固定した円周上の一点から円に接する直線への垂線の足の軌跡
- (5) 円周上に中点をもつ直径と等しい長さの線分が、円周上の固定した点を通るときの線分の両端の軌跡
- (6) 放物線の焦点を原点としたときの (写像 $z \mapsto \frac{1}{z}$ による) 反転図形
- (7) 複素数平面の原点を通る円の写像 $z \mapsto z^2$ による変換

なお「ある点からある直線に下ろした垂線の足」とは、その点を通して直線に垂直な直線ともとの直線との交点」のことである。最近の高校の教科書にはこの言葉は現れない。

(1) から (7) までを動的に描画する十進 BASIC のコンピュータプログラムを作り、それを講義で使っている。それは、私のホームページ

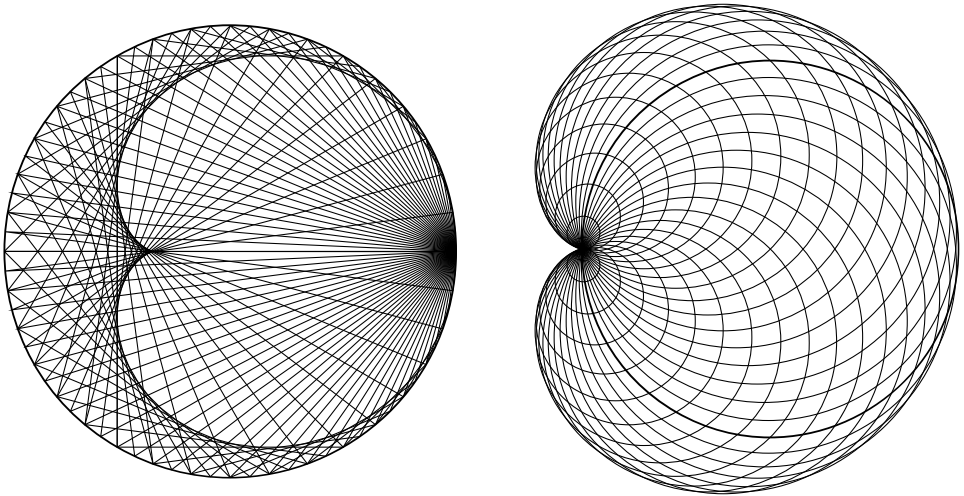
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html>

に「教材」として公開してある。また十進 BASIC も公開されているプログラムで、図形描画や複素数や 1000 桁程度までの整数演算などが扱え、行番号不要、再帰呼び出し可能な特徴を持っていて、私の書いた「個数を数える」(cf. [7]) という本でも使っている。

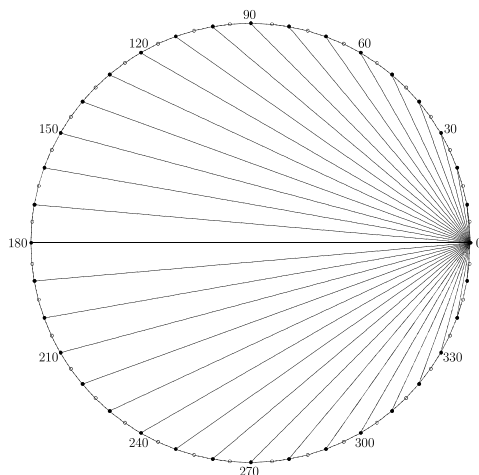
10 年ほど前に玉原国際セミナーハウスで行った「沼田市中中学生のための玉原数学教室」で“心臓形の話”という題目で講義をしたときは、このプログラムで (1) から (5) までの描画を行った。「光の反射」を説明して、そのあと (1) を描画する動画で綺麗なカージオイドが浮き出てきたのを見せたときは、「オー」という感嘆の声が発せられた。

同じ頃、筑波大学附属駒場校からも、2 コマ程度で私の研究内容に関わる話題で講演を、という依頼を受けた。そこで“超幾何関数”をテーマに選んで引き受けたが、聴講生には中学 1 年生から高校 3 年生までいる可能性がある、という情報を受けて、幾何学的説明を多く取り入れることにした。カージオイド曲線の話も含めた。複素数平面、一次分数変換による円々対応、解析接続、超幾何関数などを最後に順に話した。終了後、解析接続について熱心に質問をしてきた学生がいた。また、中学 1 年生にも大変好評であったことを聞いて安堵した。

以下は、(1) と (2) の描画例である。



私が高校のとき習った物理の授業で「(1)を実際に作図せよ」という課題がレポートとして課せられた。まだコンピュータが教育現場には存在しなかった時代である。コンパスと定規で描いていくと綺麗なカージオイドが浮き出てきて感激したことを覚えている。私がカージオイドを中高生向けの講義でよく取り上げる動機となっているかもしれない。それを体験してもらうため、右図のようなものを拡大してA4用紙に印刷して、講義の際に配布している。



その他、灘高等学校や、最近では城西大学での高校生対象の模擬講義“身の回りの生活の中に潜む数学”，ある女子大の附属校の中学3年と高校1年生が参加の講義などでこの話題を扱った。ほとんどの場合は、放物線に関する話も含めて講義をしている。地上で物を投げたときの軌跡が放物線であることを今時の学生（大学生も含む）のほとんどは知らない、という現実にも注意したい。

関連する話題としては、空のあるいはミルクティーなどが入ったコップに光が射すときに現れる不思議な曲線模様、レンズや反射鏡における焦点や収差、カージオイドアンテナの原理、パラボラアンテナや自動車のヘッドライトの反射板、物を出来るだけ遠くまで投げるやり方（初等幾何のみで説明する）、複素数平面での取り扱い、などを状況に応じて含めて、コンピュータにプロジェクトをつないで用いる講義としている。

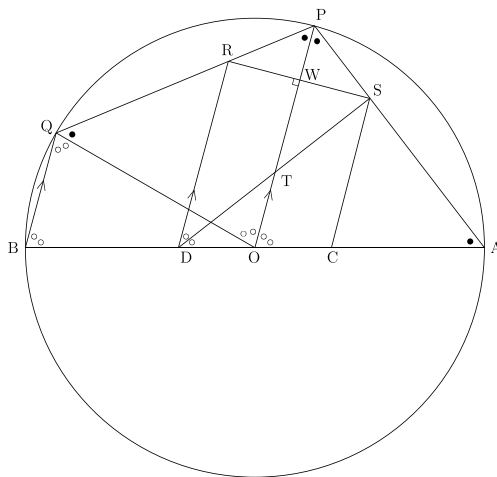
以下、(1)~(5)が同じ曲線となることを、初等幾何で示すことを目標とする。

AB を直径、中心を O とする半径 $\frac{3}{2}$ の円周上で、 A からある反時計回りに角度 θ 回った円周上の点を P 、さらに同じ角度回った点を Q とおく ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)。

OA 上 O から $\frac{1}{2}$ の距離の点を C 、 OB 上 O から $\frac{1}{2}$ の距離の点を D とおき、 D を通過して OP と平行な直線が直線 PQ と交わる点を R 、 R を通り OP に直交する直線と直線 AP との交点を S 、直線 OP と直線 RS の交点を W 、直線 OP と直線 DS の交点を T とおく。

$\angle OBQ + \angle OQB = \angle AOQ$ で
 $\angle QBO = \angle BQO$ であるから

$$\angle AOP = \angle POQ = \angle QBO$$



となり $BQ \parallel OP \parallel DR$ である。

また $\angle OAP = \angle OPA = \angle OPQ = \angle OQP$, $\triangle OPA \equiv \triangle OPQ$, $\triangle WPS \equiv \triangle WPR$ となるので $AP : AS = QP : QR = BO : BD = 3 : 2 = AO : AC$ である。

このことから $OP \parallel CS$, $CS = \frac{2}{3}OP = 1$ が分かり

$$OP \parallel DR \parallel BQ \parallel CS, \quad CA = CS = CD = 1, \quad \angle ASD = 90^\circ$$

を得る。

また直線 OP は RS の垂直二等分線で, $OC = OD$ あるから

$$\begin{aligned} TR = TS = TD, \quad \angle DRS = \angle CSR = 90^\circ, \quad \angle CDS = \angle CSD = \angle RDT, \\ \angle PTR = \angle PTS = \angle RDT = \frac{1}{2}\angle RDA = \frac{1}{2}\angle POA = \frac{1}{2}\angle POQ, \quad \angle PRT = 90^\circ. \end{aligned}$$

よって PQ は DS を直径とする円に R で接し, RS は C を中心とする半径 1 の円に接する。

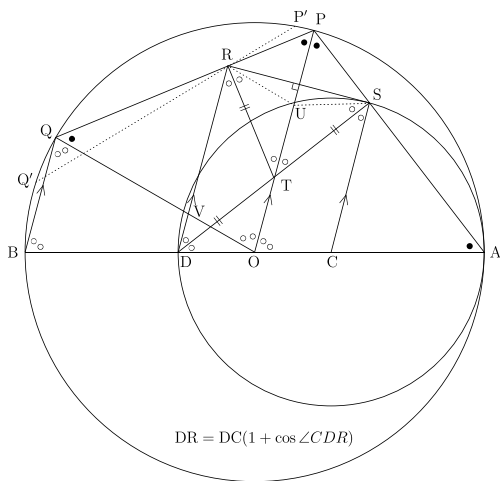
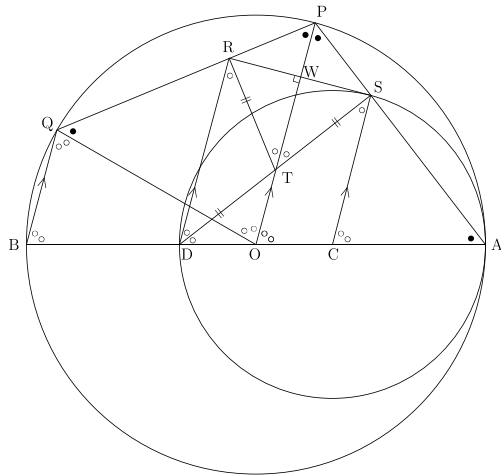
特に, DA を直径とする円の接線 (接点は S) に D から下ろした接線の足が R となる。よって P を動かしたときの R の軌跡は, DA を直径とする半径 1 の円と円周上の点を D としたときの (4) に対応するものとなることが分かる。

S を通り AB と平行な直線と OP の交点を U とおくと, $UR = US = UT = OT = \frac{1}{2}$ かつ $\angle PUR = \angle PUS = \angle AOP$ となる。

O を中心とする直径 1 の円を固定し, CA を直径とする半径 1 の円を固定円の円周上時計回りに滑らずに接点が T となるまでまわすと, 円は $2\angle OAP$ だけ回転して中心は U となり, A は R に移る。

よって P を動かすと R は DC を直径とする半径 $\frac{1}{2}$ の固定した円の円周に沿って, CA を直径とする同じ半径の円が滑らずに転がっていくときに A が動いていく点が描く (3) に対応した軌跡を描く。

直線 DR と OQ の交点を V とおくと, $\angle QOA = \angle RUS$. よって $OV \parallel UR$ で, $OV = UR = \frac{1}{2}$, $VR = OU = CS = 1$.



よって CD を直径とする円と中点 V で交わる長さ 2 の線分が円上の点 D を通るとき、 R はその線分の端点となる。よって P を動かすと、 R は、 DC を直径とする半径 1 の円上の固定点 D を通る長さ 2 の線分が、その線分の中点が円上にあるように動くときの線分の端点の軌跡 (5) を描く。

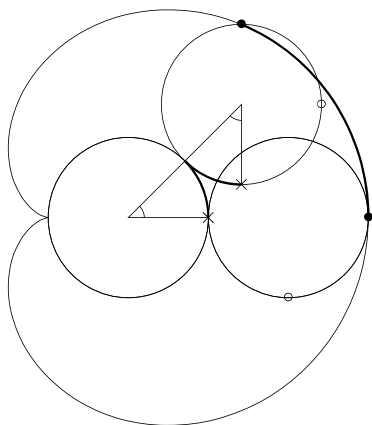
四角形 CSR は長方形であるから $DR = RV + DV = 1 + \cos \angle CDR$ 。

P, Q と同様に P', Q' を円周上にとる。 P' は P に十分近いとする。 $P'Q'$ を 1:2 に内分する点を R' 、 PQ と $P'Q'$ との交点を R'' おくと、 $\angle QPP' = \angle QQ'P'$ であるから $\triangle PP'R''$ と $\triangle Q'Q'R''$ は相似となる。また $\angle QOQ' = 2\angle POP'$ である。

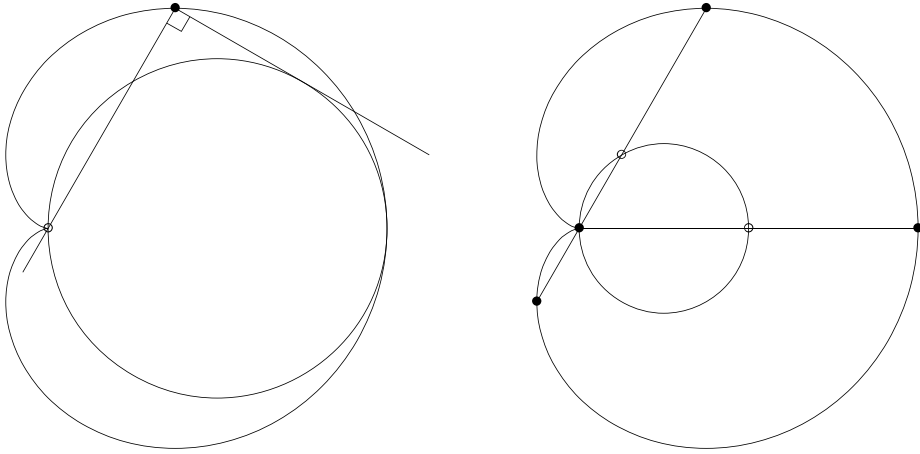
P' が P に十分近いときは、 $\frac{QQ'}{P'P} = \frac{Q'R''}{P'R''}$ 、 $\frac{QR''}{Q'R''}$ はそれぞれ 2, 1 に十分近い。よって P' を P に近づけたときに PQ と $P'Q'$ の交点が近づく PQ の 1:2 の内分点 R が心臓形上の点と考えてよい。以上の考察から、(1)~(5) が同じ曲線になることが分かる。

今、 $\angle AOP < \angle AOP'$ とすると、 $2PP' > QQ'$ であるが (\because 弧 QQ' の中点を Q'' とすると $QQ'' = Q''Q = PP'$)、 $\frac{PR''}{QR''} > \frac{P'R''}{Q'R''} = \frac{PP'}{Q'Q} > \frac{1}{2}$ となって、 R は (両端を除いた) 線分 PR'' 上にあることが分かる。より正確には、 $x = PP'$ おくと、 $QQ' = 2x\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}$ となるので、 $\frac{QQ'}{PP'} = 2\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}$ である。一方、 $\angle R''P'P$ は P' に依存しない値で 90° より真に大きいから、 $PR'' > P'R'' + \epsilon x$ となる P' に寄らない正数 ϵ が存在する (P から直線 $R''P'$ に垂線を下ろしてみると分かる)。よって、 $x > 0$ が十分小さいときは $\frac{P'R''}{Q'R''} = \frac{P'R'' PR''}{PR'' Q'R''} = \frac{P'R'' PP'}{PR'' QQ'} < \frac{1}{2}$ となる。よって R' は、(両端を除いた) 線分 $Q'R''$ 上にある。このことから、直線 PQ は R の軌跡であるカージオイドの点 R における接線で、カージオイドは直線 PQ より原点側にあることが分かる。

注意: (1) において、円周上にない点光源から発せられる光や平行光線の場合もカージオイドではないが、同種の包絡線が現れる。



左は、固定した円周に沿って同じ半径の円を滑らずに転がすときの円上の一点の軌跡 (3) を、次の左の図は、三角定規の内角が直角の頂点を挟む両辺のうち、一方が固定した円に接し、他方がその円周上の固定した点を通るように動かしたときの頂点の軌跡 (4)、右の図は固定した円の直径の 2 倍の長さの定規 (線分) を、円周上の固定点を通り、かつ中点が円周上に来るように動かしたとき、その定規の両端の軌跡 (5)、を示している。



注意: この節の図の多くは、数式処理システム Risa/Asir 上のライブラリ `os_muldif.rr` (cf. [2, 6]) によって出力した TikZ 形式の \TeX のソースを用いて描いた。

3 固定した点を通して動くある 2 本の直線の交点の軌跡

より正確には、「定められた線分を 2 つに分割し、それらを底辺とする 2 つの三角形を定められた三角形と相似（一方は裏返し）に描いたとき、線分の両端と三角形の頂点を結ぶ 2 直線の交点の軌跡」について考察する。正三角形の場合に GeoGebra の LocusEquation コマンドを使っての計算について大西俊弘氏の講演 [7] があり、「より一般（特に正多角形）の場合はそのコマンドでは解けないがどうなるのであろうか？」と問題提起された。一般的な答が分かったので、その共同研究集会の最後に結果のみ述べたが、ここで解説する。

xy 平面上の点 $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (a, b)$ を頂点とする三角形 OAB を考え ($b > 0$), $B' = (1 - a, b)$ とおく。

線分 OA 上に点 $T = (t, 0)$ をとり, $\triangle OAB$ と相似な $\triangle TAB_t$, $\triangle OAB'$ (すなわち $\triangle AOB$) と相似な $\triangle OTB'_t$ を $y \geq 0$ 上で考える。 T が動くとき、直線 OB_t と直線 AB'_t の交点の軌跡を求めよう。

$B_t = (t + a(1 - t), b(1 - t))$, $B'_t = ((1 - a)t, bt)$ となり、2 直線

$$\begin{cases} y = \frac{b(1-t)}{t+a(1-t)}x, \\ y = \frac{bt}{(1-a)t-1}(x-1) \end{cases}$$

の交点 P_t は

$$(X, Y) = \left(\frac{t(a + (1 - a)t)}{1 - 2(1 - a)t(1 - t)}, \frac{bt(1 - t)}{1 - 2(1 - a)t(1 - t)} \right)$$

となる。これから t を消去すると

$$b^2 X^2 + (1 - a^2) Y^2 - b^2 X + abY = 0.$$

すなわち

$$b^2 \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + (1 - a^2) \left(Y - \frac{ab}{2(1 - a^2)} \right)^2 = \frac{b^2}{4(1 - a^2)}.$$

$|a| < 1$ のときは、上で定義される楕円の $y > 0$ の部分.

なお、直線 OB はこの楕円の接線となることに注意.

この楕円の一部が円弧となる条件は

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad OA = OB$$

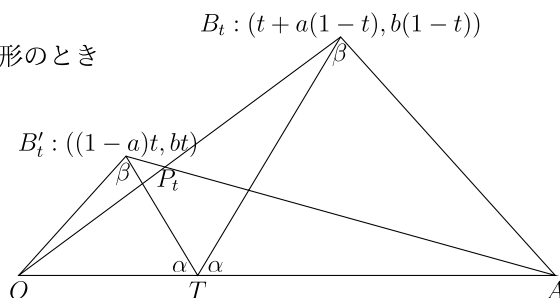
であり、たとえば OAB が正三角形のとき

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

や、 OAB が $OA = OB$ の直角三角形のとき

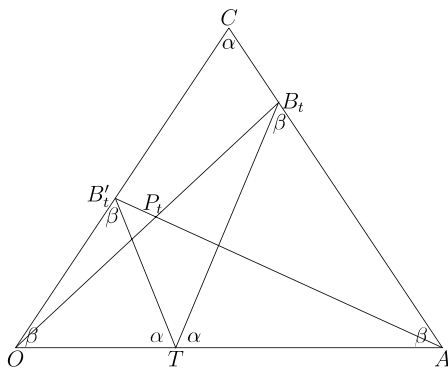
$$a = 0, \quad b = 1.$$

さらに、 O と頂点とする正多角形があって A, B が O に隣り合う2つの頂点ならばこの仮定は満たされる.



なお、軌跡が円弧になる場合は、以下のように初等幾何で証明できる.

C を頂点とし頂角が $\angle AOB (= \alpha)$ とおく) の二等辺三角形 OCA を考える ($CO = CA$). 底辺 OA 上に点 T をとり、辺 AC (またはその延長上) に点 B_t を、辺 OC (またはその延長上) に上に点 B'_t を、 $\angle ATB_t = \angle OTB'_t = \alpha$ となるようにとり、直線 OB_t と AB'_t の交点を P_t とおくと $\angle OP_t A = 180^\circ - \alpha$ となる.



[証明] $TO = TB'_t$, $TB_t = TA$, $\angle OTB_t = \angle B'_t TA$ より三角形 OTB_t と $B'_t TA$ は合同. よって

$$\begin{aligned} \angle OP_t A &= 180^\circ - \angle B_t OA - \angle B'_t AO = 180^\circ - \angle B_t OT - \angle OB_t T \\ &= \angle OTB_t = 180^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

注意: 一般の場合は、 y 軸方向のスケール変換で $OA = OB$ となるようにできるので、軌跡が楕円の一部になることが分かる.

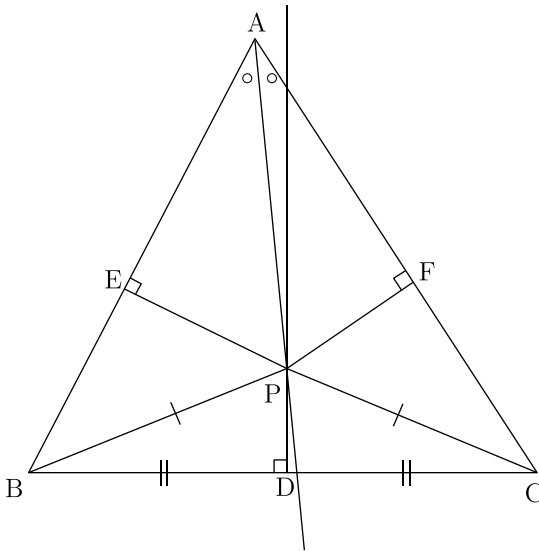
4 初等幾何の定理

では初等幾何における3つの有名な定理を紹介しよう。

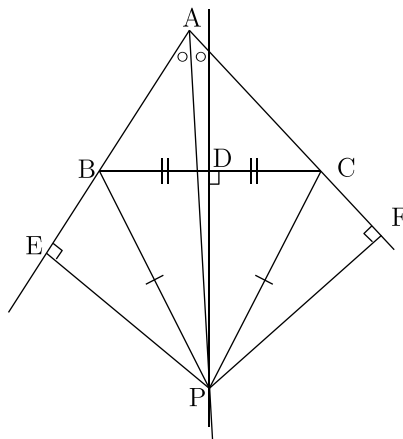
定理. 三角形の2つの辺は長さが等しい.

[証明] $\triangle ABC$ の底辺 BC の中点を D とし, BC の垂直二等分線と $\angle A$ の二等分線との交点を P とする. さらに P から AB, AC に下ろした垂線の足を, それぞれ E, F とおく. $\triangle AEP$ と $\triangle AFP$ は斜辺の長さが等しい直角三角形で, さらに $\angle EAP = \angle FAP$ が成り立つので合同である. よって, $AE = AF, PE = PF$ が分かる.

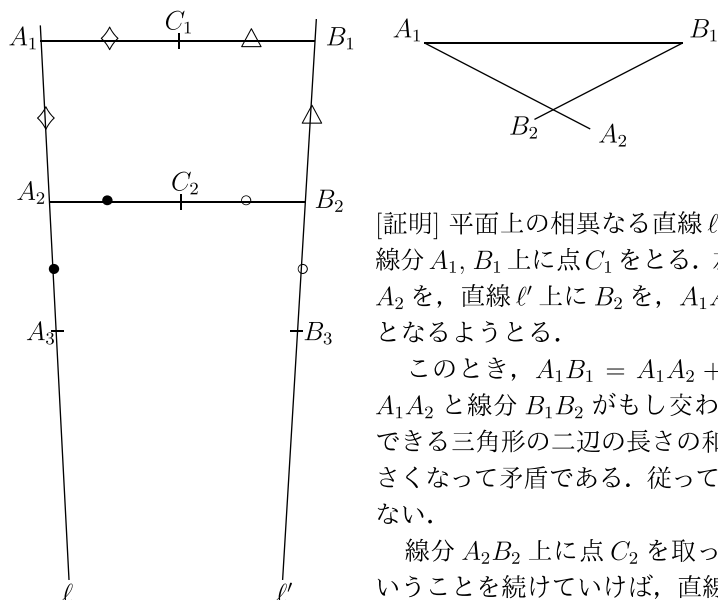
PD は BC の垂直二等分線であるから, $PB = PC$ が成り立つ. $\triangle PEB$ と $\triangle PFC$ は斜辺とその他の一辺の長さが等しい直角三角形であるから合同となる. 特に $EB = FC$ である. よって $AE = AF$ とあわせて, $AB = AC$ が得られる.



注意: なお, 右図のように BC の垂直二等分線と $\angle A$ の二等分線が $\triangle ABC$ の外で交わる場合も, 証明は同様である.



定理. 平面上の相異なる直線は交わらない



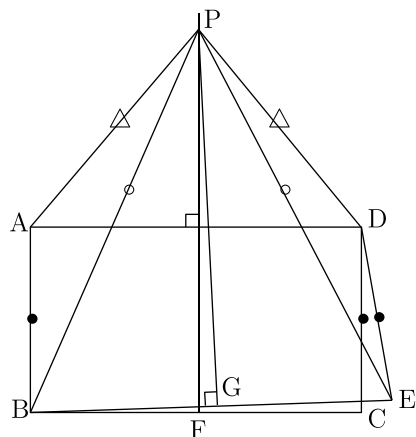
[証明] 平面上の相異なる直線 ℓ, ℓ' 上に点 A_1, B_1 をとり、線分 A_1, B_1 上に点 C_1 をとる. 左の図のように直線 ℓ 上に A_2 を、直線 ℓ' 上に B_2 を、 $A_1A_2 = A_1C_1, B_1B_2 = B_1C_1$ となるようにとる.

このとき、 $A_1B_1 = A_1A_2 + B_1B_2$ であるから、線分 A_1A_2 と線分 B_1B_2 がもし交わったとすると、そのときできる三角形の二辺の長さの和が他の一辺の長さより小さくなって矛盾である. 従って、 A_1A_2 と B_1B_2 は交わらない.

線分 A_2B_2 上に点 C_2 を取って同様の議論を行う、ということをしていけば、直線 ℓ と ℓ' とが交わらないことが示される.

注意: 「 A_nB_n ($n = 1, 2, \dots$) の長さが小さくなっていくので、有名な“アキレスと亀”の論理と同じでおかしい」という人がいたら、この証明を理解していないことになる. 点 C_n をうまく取っていけば、そのようなことは容易に避けられるからである.

定理. 直角と鈍角は等しい.



[証明] 長方形 $ABCD$ の一辺 DC の長さに等しい線分 DE を、右図のように長方形の外に引く. BC の垂直二等分線と BE の垂直二等分線の交点を P とする.

BC の垂直二等分線は AD の垂直二等分線だから $PA = PD$. また P は BE の垂直二等分線上にあるから $PB = PE$. また、 $AB = DC = DE$ であるから、 $\triangle PAB$ と $\triangle PDE$ は三辺が等しいので合同である.

特に $\angle PAB = \angle PDE$ であるが、 $\angle PAD = \angle PDA$ であるから、 $\angle DAB = \angle ADE$ となる.

注意: 私は高校生の頃に、この例のような定理（幾何の問題でないものも含め）に興味を持って集めた. 数学の間違いを沢山集めた本 [1] が出版されているのを最近知りました.

参考文献

- [1] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (堀江太郎 訳), 数学まちがい大全集, 化学同人, 2015 年, ISBN 978-4-7598-1618-1.
- [2] 大島利雄, Risa/Asir による曲線と関数グラフの描画, 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録 **1955** (2015), 102–113.
- [3] 大島利雄, 【特別講演】大学の数学教育における数式処理と T_EX の活用, 数式ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **1978** (2015), 1–11.
- [4] 大島利雄, 計算尺を使った数学教育, 数式ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **2067** (2018), 1–10.
- [5] 大島利雄, 個数を数える, 数学書房, 2019 年, ISBN 978-4-903342-27-6.
- [6] 大島利雄, os_muldif.rr, 数式処理 Risa/Asir のライブラリ, 2008–2019, <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html>
- [7] 大西俊弘, GeoGebra の LocusEquation コマンドについて, 数式処理とその周辺分野の研究での講演, 京都大学数理解析研究所, 2019 年 8 月.