Minkowski Convex Body Theorem towards Pólya's Visibility Problem via Mathematica

N. Hirata-Kohno, Y. Ishii, Y. Kurimoto, K. Kurishima,
K. Suzuki, Y. Suzuki (Nihon Univ.) and Y.Washio
(Buzan-J.H.S., Nihon Univ.)
日本大学大学院理工学研究科数学専攻　栗島昂大，鈴木雄大，栗本裕太，石井夕紀子，
日本大学理工学部　鈴木潔光，平田典子，日本大学豊山女子中高 鷲尾勇介

Abstract

In the present notes, we study the visibility problem, frequently called orchard problem, due to G Pólya. We explain here the concept of the problem and mathematical contributions for solving it from the viewpoint of Diophantine approximation, based on Minkowski's convex body theorem. We employ Mathematica to see the phenomena which happen in behaviors of the line of sight in the orchard. We also discuss the condition of Pólya's solution.

Mathematics Subject Classification [2010]: 11H06, 11Y55, 11A55, 11K60

1 Pólya's Visibility Problem

本稿においては，G. Pólya の Visibility 問題もしくは Orchard 問題という名のもとにて知られる著名な問題を概説し，数の幾何学における Minkowski の凸体定理を用いた解答と，Pólya の定理の条件に関する考察について述べる．

Orchard とは果樹園の意である．Visibility 問題は，Pólya(1887–1985) と G. Szegő(1895–1985) が 1924 年に初版を執筆した演習書 Problems and Theorems in Analysis の第 II 巻 [11]（第 I 巻の原本は Grundlehren Math. Wissenschaften 193 巻，第 2 巻の原本は同じく 216 巻として刊行されており，その加筆修正版の 1976/1978 年の英訳本）における第 8 部 第 5 章 151 ページ Miscellaneous Problems の問題 239 である．この演習書には解答も掲載されており，複素解析学を主軸とした近代数学への興味を喚起する基本的な問題集として，ヨーロッパでは数学を学ぶ学部生の多くが小脇に抱えて歩くような本であった（我が国の解析概論のようなものであろう）．

問題 239 の解答はもともと 1918 年の Pólya の論文 [10] において提唱されたもので，演習書には A. Speiser の方法によるものが掲載されているが，連分数の素養のある者にとっては自然で平易な証明である．Visibility 問題は数学の導入に適した題材であり，初心者向けの数学の導入本として著された A. Yaglom & I. Yaglom [14] による問題集においても紹介されたが，そこでは古典的定理である Minkowski の第一凸体定理 [6][12] の応用による解答が与えられている．ま

た R. Honsberger [4] による数学の入門書 Mathematical Gems では，H. F. Blichfeldt の補題を用いた証明（本質的には Minkowski の凸体定理と同じ考察）が述べられ，広く知られるものとなった．

T. T. Allen [1] および S. P. Kruskal [5] によっても Visibility 問題は再考されている．Allen は初等幾何学と三角関数を用いた別証明と Pólya の解答における果樹園の半径が整数という仮定の緩和を試みた．また Kruskal は Stern-Brocot wreath を用いた別証明（本質的には連分数による考察と言って良い）および整数格子以外の平行四辺形型の格子に対する拡張を考えている．

本稿では $\mathbb{R}^n$ の点に対し，その各座標が全て有理整数であるものを格子点と称することにする．$\mathbb{R}^n$ の格子点全体の集合を整数格子と呼び，$\mathbb{Z}^n$ で表す．

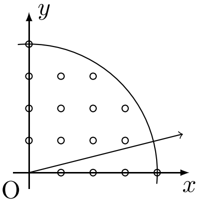
Definition 1 (果樹園) R，r を正の実数とする．$\mathbb{R}^2$ において，原点 O を中心とする半径 R の円を Γ とおく．Γ の内部および周上を果樹園とみなし，O 以外の $\mathbb{R}^2$ の格子点全てに対して半径 r の円を底面とする円柱形の木を，円の中心が格子点上に重なるように植えるものとする．

Visibility 問題

R を正整数と仮定する．果樹園の中心である原点 O に立って，水平方向に視線を向けて果樹園の外側を見ようとするときに，木の半径 r がどのような大きさならば，いかなる方向を見ても木にさえぎられて果樹園の外側が見えなくなるか．一方，ある方向を向けば，木にさえぎられること無しに果樹園の外側が見えるような，木の半径 r はどのようなものか．

もう少し正確に述べると，次のようになる．

Visibility 問題　R を正整数と仮定する．$r \geq \rho$ ならばいかなる方向を見ても半径 R の果樹園の外側が見えず，$r < \rho$ ならばある方向においては，木にさえぎられること無しに果樹園の外側が見えるような正の実数を ρ とおく．この ρ を R を用いて表せ．



Pólya の定理　(1918, [10])

R を正整数とする．Visibility 問題に対し，次が成立する．

(1) $r > \dfrac{1}{R}$ ならば，原点 O からどの方向を見ても，木にさえぎられて果樹園の外側を見ることはできない．

(2) $r < \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ ならば，ある方向において，木にさえぎられること無しに原点 O から果樹園の外側を見ることができる．

Pólya の証明では残念ながら，ρ が $\dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ と $\dfrac{1}{R}$ の間にあることしか得られないのである．

さて，ここで起こる自然な発想は以下のとおりである．

1. この ρ を R の関数で正確に表すことは可能であろうか？
2. Pólya の証明でも，また Yaglom & Yaglom，Honsberger の証明でも，R を正整数とするという仮定が本質的に用いられている．この仮定を R を正の実数まで緩めることは可能か？
3. 高次元ではどうなるか？

2 Minkowskiの第一凸体定理による証明

まずは Pólya の定理を証明しよう．ここでは [4] による証明（R が正整数の場合）を紹介する．

Definition 2 (凸集合) $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 K が凸集合であるとは，K の任意の *2* 点 x, y 及び $0 \leq t \leq 1$ を満たす任意の実数 t に対し，点 $tx + (1-t)y$ が K に属するときに言うものとする．

Minkowski の第一凸体定理　([6][12][13])
K を $\mathbb{R}^n$ の有界な凸集合で，原点に関して点対称であり，通常の意味での面積をもち，その面積が 2^n より大きいものと仮定する．このとき K 内には原点とは異なる格子点が必ず存在する．

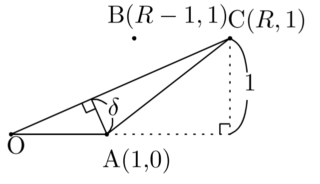
Minkowski の第一凸体定理は整数論の多くの分野で本質的な寄与を果たす．その精密化に相当する Minkowski の第二凸体定理が，2014 年のフィールズ賞受賞者である，M. Bhargava によって授賞対象の仕事に本質的に用いられたことは記憶に新しい．

Pólya の定理の証明
まず (1) の「果樹園の外側を見ることはできない」ほうを示す．$r \geq \dfrac{1}{2}$ のとき果樹園内の木は互いに接するので $r < \dfrac{1}{2}$ として良い．また $R = 1, 2$ のときは自明なので $R \geq 3$ として良い．$r = \dfrac{1}{R} + \epsilon < \dfrac{1}{2}$ を満たすように正実数 ϵ をとる．半径 R の円周上の点 P および，果樹園である円 O の中心 O に関し P と点対称な点 P′ をとり，点 P における円 O の接線 FPG，点 P′ における円 O の接線 DP′E を $\overrightarrow{\mathrm{DP'}} = \overrightarrow{\mathrm{P'E}} = \overrightarrow{\mathrm{FP}} = \overrightarrow{\mathrm{PG}}$, $\mathrm{DE} = \mathrm{EG} = \frac{2}{R} + \epsilon$ を満たすようにとる．このとき DEGF は長方形すなわち凸集合であり，その面積は $2R \times \left(\dfrac{2}{R} + \epsilon\right) = 4 + 2R\epsilon > 4 = 2^2$ を満たす．Minkowski の第一凸体定理より，長方形 DEGF 内には点 O とは異なる格子点が存在する．その点を Q，また点 O に関して Q と対称な点を Q′ とおく．Q′ も格子点である．$2r = \frac{2}{R} + 2\epsilon > \frac{2}{R} + \epsilon$ より，Q と Q′ が果樹園内にある場合は点 O から点 P，P′ を見ることはできない．従って視線 OP は必ずブロックされる．一方，長方形 DEGF は果樹園内に含まれるとは限らないので，果樹園外に点 Q が存在する場合があると仮定する．OQ$= d$ とおく．点 Q が DEGF 内にあることと $r < \dfrac{1}{2}$ に注意すると

$$R < d \leq \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{R} + \frac{\epsilon}{2}\right)^2} < \sqrt{R^2 + r^2} < \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} < \sqrt{R^2 + 1}$$

が成り立つ．従って $R^2 < d^2 < R^2 + 1$．Q は格子点ゆえ d^2 は整数になるが R^2 と $R^2 + 1$ の間に整数は存在しないので矛盾し，点 Q は果樹園外にはない．以上より $r > \dfrac{1}{R}$ ならば点 O から果樹園の外側をみることはできない．

次に (2) の主張，つまり「ある方向においては果樹園の外側が見える」を示そう．



果樹園内の 2 点 A(1, 0)，B$(R - 1, 1)$ を考え，果樹園の中心 O から，果樹園外の点 C$(R, 1)$ への半直線 OC をかく．2 点 A，B はともに半直線 OC からの距離が等しい．その距離を δ とする．3 点 O，A，C を頂点とする三角形の面積 S を 2 通りに表すことによって $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ が得られる．このとき点 A を中心とする半径 δ の円と原点からの視線 OC は接する．C の座標のとり方から A が OC に最も近い格子点である事実に注意すると，$r < \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ ならば果樹園の外側を見ることができる． □

Honsberger の証明は Blichfeldt の 1914 年の補題を用いたものであるが，実は Minkowski の第一凸体定理は Blichfeldt の補題からも導出できるため，本質的には上述の証明と同じである．ただ，Blichfeldt の補題は凸集合であることを必要としないので，ここに紹介をしておこう．Blichfeldt の補題の証明は [2][12] に（やや異なる形は [13] に）ある．下記の D は整数格子と考えれば良い．

Blichfeldt の補題　(1914, [2][12])
$\phi \neq D \subset \mathbb{R}^n$ を，$\mathbb{R}^n$ の任意の格子点 $\mathbf{g}$ に対して，$D + \mathbf{g} = D$ を満たすものする．n 次元単位立方体 U^n と D の共通部分の元の個数がちょうど N 個であると仮定する．K は $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合で，正の面積 $\mu(K)$ をもつものとする．このとき，ある $\mathbf{x} \in U^n$ が存在して，集合 $K + \mathbf{x}$ が $N \cdot \mu(K)$ 個以上の D の点を含むようにすることができる．また K が有界閉集合ならば，ある $\mathbf{x} \in U^n$ が存在して，集合 $K + \mathbf{x}$ が $N \cdot \mu(K)$ 個より多くの D の点を含むようにできる．

3　Pólya の定理の条件について

Allen によって下記の定理が得られている．また，やや悪くなるが，Kruskal の別証明による条件および，Minkowski の定理に基づく我々の考察について言及する．

Allen の定理　(1986, [1])
(1) 果樹園の半径 R を正実数とする．$\lambda \in \mathbb{Z}$ を，互いに素な 2 個の正整数の 2 乗の和すなわち，$a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\gcd(a, b) = 1, \lambda = a^2 + b^2$ と表されるような正整数で，はじめて $\lambda > R^2$ となる数とする．このとき Visibility 問題における ρ に対して $\rho = \dfrac{1}{\lambda}$ が成立する．
(2) 果樹園の半径 R が正整数のとき，特に $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ が成立する．

証明

まず，$\mathrm{P}(x,\ y)\in\mathbb{Z}^2$ を $x>0, y>0, \gcd(x,\ y)=1$ を満たすようにとり，固定する．果樹園の木はすべて半径 r であるとする．原点 O から $\mathrm{P}(x,\ y)$ を，点 P 以前の木に邪魔されないで見ることができるための条件が

$$r<\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1a}$$

であり，また点 P 以前の木に邪魔されて見えなくなる条件が

$$r\geq\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1b}$$

となることを示そう．

半径 r の円同士が接しないよう，$r<\dfrac{1}{2}$ と仮定して良い．

原点 O と点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を通る半直線と，その半直線の上側と下側に存在する格子点 $(x',\ y')$，$(x'',\ y'')$ を $\dfrac{y'}{x'}>\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{y''}{x''}<\dfrac{y}{x}$ を満たすようにとる．半直線とこれらの点との距離 r'，r'' はそれぞれ

$$r'=\frac{|y'x-x'y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y'x-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2a}$$

$$r''=\frac{|x''y-y''x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x''y-y''x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2b}$$

となる．$\gcd(x,\ y)=1$ より，半直線から最も近い点 $(x',\ y')$，$(x'',\ y'')$ について，

$$y'x-x'y=+1 \tag{3a}$$

$$x''y-y''x=+1 \tag{3b}$$

となるので，その 2 点と半直線の距離は

$$r'=r''=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

である．ここで X, Y を未知数とする連立方程式

$$Yx-Xy=+1 \tag{3a*}$$

$$Xy-Yx=+1 \tag{3b*}$$

を考える．(3a*) と (3b*) のつの解を x'，y' とすると，無限個の全ての解は，

$$(kx+x',\ ky+y'),\qquad (kx+x'',\ ky+y'')\qquad\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

と表せる．このとき，原点と点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を通る半直線 OP とこれらの点の距離はすべて (4) で与えられた $r'(=r'')$ に等しく，特に，$(x',\ y'), (x'',\ y'')$ も解である．

ここで

$$0\leq x'<x \tag{5a}$$

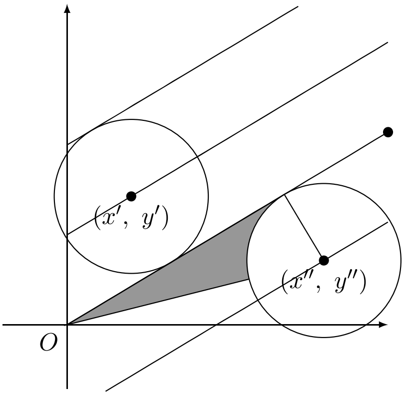
$$0\leq y''<y \tag{5b}$$

となる 2 点 $(x',\ y')$，$(x'',\ y'')$ について考える．$(kx+x',\ ky+y')$，$(kx+x'',\ ky+y'')$ の形の点のうち，$0\leq x'<x$，$0\leq y''<y$ にはそれぞれちょうど一つの点しか存在しないことが分かる．

その2点 A$(x',\ y')$,B$(x'',\ y'')$ に対し，A を中心とする半径 r' の円 $\mathcal{A}$ を考える．また B を中心とする半径 $r' = r''$ の円 $\mathcal{B}$ を考えると，視線である原点 O と P$(x,\ y)$ を通る半直線 OP は $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ にそれぞれ接することになる．

即ち，OP に最も近い格子点について，それらを中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の円が OP に接することがわかるので，この $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ よりも木の半径 r が小さければ点 P は原点 O から見える．

あとはこの点 P が果樹園の外にあるための条件を考えれば良い． □



Kruskal の条件　(2008, [5])
果樹園の半径 R を正実数とする．このとき Visibility 問題における ρ は

$$\frac{1}{R+1} < \rho < \frac{1}{R}$$

を満たす．

$\dfrac{1}{R+1} < \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ であることに注意しよう．$\rho < \dfrac{1}{R+1}$ ならば「見える」という条件は Pólya の定理より厳しくなってしまうが，しかし Stern-Brocot wreath (sequence) を用いた別証明であり，果樹園の半径 R が正整数という条件を緩和したことになる．ただし，まだ 2 次元の場合にとどまっている．

Pólya の定理の (1) の果樹園の外側を見ることはできない証明において Minkowski の第一凸体定理を用いるとき，長方形内の格子点が果樹園外にあるかもしれない可能性を排除するために，R が整数であることが必要であったことに注目し，我々は長方形の代わりに原点から等距離にある 2 直線の内側と果樹園の共通部分の面積を考えた．R が大きい場合は先行研究の条件に近い値が得られ，高次元版を考えるために有効である．この考察はあらためて別の機会に述べることとする．

4　Mathematica 動的教材と授業実践

Mathematica は動的教材の作成に向いている数学ソフトウェアであり，我々は木の半径 r の変化に応じて，視線の様子を観察できるような視覚的動画教材を次のように提案して，授業で実践した．

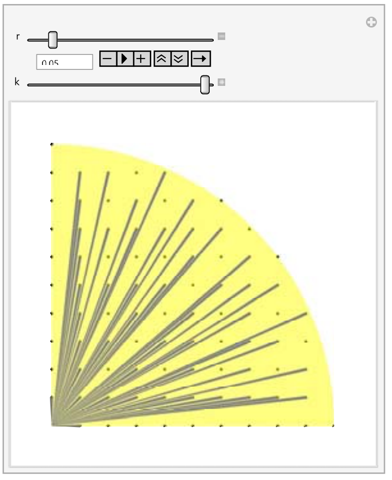


図 1: $r < \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ のときの果樹園

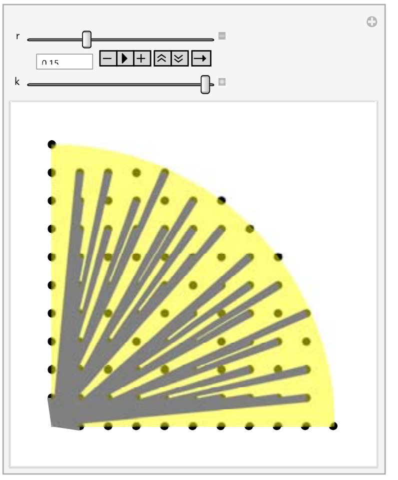


図 2: $r > \frac{1}{R}$ のときの果樹園

図 1，図 2 は $R = 10$ の場合に，それぞれの木の半径が $r = \dfrac{1}{20} < \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$，$r = \dfrac{3}{20} > \dfrac{1}{R}$ としたときの果樹園の様子を表す Mathematica の画像である．黄色が視線の部分であり，黄色が原点から果樹園の外まで続いていれば，原点から果樹園の外側を見ることができるということを表す．木の半径を $0 < r < \frac{1}{2}$ の範囲で実際にスクロールを手で動かして様子を観察できるため，証明の考察や理解において効果を発揮すると考えられる．授業における実践についてはアンケートをとったが，Mathematica が効果的であったと回答した者が 77.3%であった．また 3 次元の場合の画像を紹介したが，その反応は興味を喚起するものであったと言えよう．

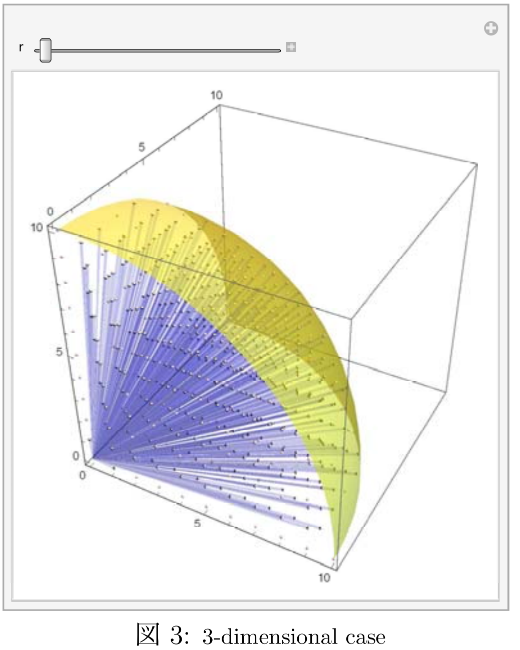


図 3: 3-dimensional case

5 Related Number Theoretical Questions

木の半径が 0 であっても視線が目指す点より前の格子点にぶつかれば，果樹園の外は見えないと考えられる．このことをもう少し詳しく見てみよう．以下正整数のみを考える．

格子点 $(m_1, m_2, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ が $\gcd(m_1, m_2, \cdots, m_n) = 1$ を満たす場合は，その格子点への視線は，それよりも前の格子点に邪魔されない．

従って，先の Allen の考察にもあったように，整数が互いに素という条件を考えることが必須である．さてここで 2 個の正整数 m_1, m_2 が $\gcd(m_1, m_2) = 1$ となる Asymptotic density ($Q \to \infty$ のときの漸近的な平均位数) はどのような数であろうかという問題を考えてみよう．これは即ち，Q 以下の互いに素な正整数座標を持つ格子点 $(m_1,\ m_2) \in \mathbb{Z}^2 : \gcd(m_1, m_2) = 1,$ $1 \le m_1 \le Q,\ 1 \le m_2 \le Q$ に原点からひいた線分の個数は何本であろうか，という考察である．

これは整数論で古くから知られていることなのである [3][8][9].

一般に Q 以下の n 個の正整数が $\gcd(m_1, m_2, \cdots, m_n) = 1$ となる個数に対し， $Q \to \infty$ としたときの Asymptotic density を求めてみよう．

まず $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ を $0 \le m_1 \le Q,\ 1 \le m_2 \le Q$ を満たすものとする．
$F_Q := \left\{ \dfrac{m_1}{m_2} \in \mathbb{Q} \mid 0 \le \dfrac{m_1}{m_2} \le 1,\ 0 \le m_1 \le Q,\ 1 \le m_2 \le Q \right\}$ とおく．

F_Q は分子も分母も 1 以上 Q までとした既約分数の集合 $\cup\{0\}$ である．F_Q の個数を数えて $Q \to \infty$ のときの極限を考えよう．F_Q は Farey Sequence (Farey 数列) と呼ばれるものであり，連分数やディオファントス近似論では古くからおなじみの概念である．分母を止めてカウントする点がポイントである．

まず，Farey 数列 F_Q 内の連続 2 分数を $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ とすると $bc - ad = 1$ が成立することが知られている [12]．既約分数の個数 $\#F_Q$ の Asymptotic density は下記で与えられる．

定理 (J. Sylvester, D. N. Lehmer, around 1900, [3])
既約分数の個数 $\#F_Q$ に対し $\quad \dfrac{\#F_Q}{Q^2} \sim \dfrac{3}{\pi^2} \qquad (Q \to \infty).$

Corollary 1 ([3])
2 個の正整数が互いに素になる *Asymptotic density* は

$$\frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

である．

定理 (J. E. Nymann, 1972, [8][9]) n 個の正整数が最大公約数 1 になる Asymptotic density は

$$\frac{1}{\zeta(n)}$$

である．

ここでオイラー関数（Euler の totient 関数）およびメビウス（Möbius）関数を定めよう．

Definition 3 (Euler function, Möbius function)
$\varphi(m) :=$「m と互いに素な 1 以上 m 以下の整数の個数」

$$\textit{Möbius function } \mu(n) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (\text{ある素数 } p \text{ に対し } p^2|m) \\ (-1)^k & (p_i \text{は互いに異なる素数で } n = p_1 p_2 \cdots p_k) \end{cases}$$

下記は，オイラー関数を扱うにあたり重要な反転公式である．メビウス関数の面目躍如であろう．

Lemma 1

$$\text{(i) } m = \sum_{d|m} \varphi\left(\frac{m}{d}\right) = \sum_{d|m} \varphi(d)$$

$$\text{(ii) } \varphi(m) = m \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{dd'=m} d'\mu(d)$$

では簡単に Corollary 1 の証明の概略を述べよう．

Proof of Corollary 1 互いに素な 2 正整数の組数は $\Phi(Q) := \varphi(1) + \cdots + \varphi(Q)$ で与えられる．

この数 $\Phi(Q)$ が $\Phi(Q) = \dfrac{3Q^2}{\pi^2} + O(Q \log Q)$ を満たすことを示せば良い．O は Landau 記号である．

まず

$$\begin{aligned}
\Phi(Q) &= \sum_{m=1}^{Q} m \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} \\
&= \sum_{dd'=1} d'\mu(d) + \sum_{dd'=2} d'\mu(d) + \cdots + \sum_{dd'=Q} d'\mu(d) \\
&= \sum_{dd' \le Q} d'\mu(d) \\
&= \sum_{d|Q} \mu(d) \sum_{d'=1}^{[Q/d]} d'
\end{aligned}$$

である．次に $\zeta(s)$ を Riemann の zeta 関数として

$$\begin{aligned}
\Phi(Q) &= \sum_{d|Q} \mu(d) \sum_{d'=1}^{[Q/d]} d' \overset{\text{(A)}}{=} \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{Q} \mu(d) \left(\left[\frac{Q}{d}\right]^2 + \left[\frac{Q}{d}\right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{Q} \mu(d) \left\{ \frac{Q^2}{d^2} + O\left(\frac{Q}{d}\right) \right\} = \frac{1}{2} Q^2 \sum_{d=1}^{Q} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(Q \sum_{d=1}^{Q} \frac{1}{d} \right) \\
&= \frac{1}{2} Q^2 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(Q^2 \sum_{Q+1}^{\infty} \frac{1}{d^2}) + O(Q \log Q) \\
&\overset{\text{(B)}}{=} \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{1}{\zeta(2)} + O(Q \log Q) \\
&= \frac{3Q^2}{\pi^2} + O(Q \log Q)
\end{aligned}$$

が得られるが，この理由は

$$(\mathrm{A})\sum_{d'=1}^{N} d' = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2+N}{2}$$

および

$$(\mathrm{B})\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1-p^{-s}) = \prod_p (1+\mu(p)p^{-s}+\mu(p^2)p^{-2s}+\cdots)$$
$$= \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)d^{-s} \ (s>1), \qquad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

だからである．
詳しくは下記を説明しておこう．

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{C}) & \sum_{d=1}^{Q} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right]^2 \\
\sim & \sum_{d=1}^{Q} \mu(d) \frac{Q^2}{d^2} = Q^2 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(Q^2 \sum_{d=Q+1}^{\infty} \frac{1}{d^2}\right) \\
& = \frac{Q^2}{\zeta(2)} + O(Q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D}) \ \sum_{d=1}^{Q} \mu(d) \left[\frac{Q}{d}\right] & = \mu(1)[Q] + \mu(2)\left[\frac{Q}{2}\right] + \cdots + \mu(Q)\left[\frac{Q}{Q}\right] \\
& = O\left(Q\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{Q}\right)+Q\right) \\
& = O(Q\log Q).
\end{aligned}
$$

以上より，$\#F_Q = \Phi(Q) + 1 = \dfrac{3Q^2}{\pi^2} + O(Q\log Q)$.

1 以上 Q 以下の整数 2 個の組数が $= \dfrac{1}{2}Q(Q+1)$ であること，
このうち互いに素なものの組数が $\Phi(Q)$ であることより

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\Phi(Q)}{\frac{1}{2}Q(Q+1)} = \frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

から Corollary 1 が従う． □

これは原点から互いに素な正整数座標を持つ格子点 $(m_1,\ m_2) \in \mathbb{Z}^2, \gcd(m_1, m_2) = 1$,
$1 \le m_1 \le Q,\ 1 \le m_2 \le Q$ にひける線分の個数の漸近的平均なのでした．

参考文献

[1] T. T. Allen, *Pólya's Orchard Problem*, Amer. Math. Monthly, vol. 93, No. 2, (1986), 98–104.

[2] H. F. Blichfeldt, *A new principle in the geometry of numbers, with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **15**, (1914), 227–235.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 1st edition, 1938, 6th edition, Oxford Univ. Press, 2008.

[4] R. Honsberger, *Mathematical Gems I*, Dolciani Math. Expositions, Math. Association of America, 1973.

[5] S. P. Kruskal, *The orchard visibility problem and some variants*, J. of Computer and System Sciences, **74**, (2008), 587–597.

[6] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896, Chelsea Publishing Company.

[7] L. J. Mordell, *On arithmetical results in the geometry of numbers*, Compositio Math., **1**, (1935), 248–253.

[8] J. E. Nymann, *On the probability of relatively prime integers*, J. of Number Theory, **4**, (1972), 469–473.

[9] J. E. Nymann, *On the probability that k positive integers are relatively prime II*, J. of Number Theory, **7**, (1975), 406–412.

[10] G. Pólya, *Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde*, Arch. Math. Phys. Ser., **2**, 27, (1918), 135–142.

[11] G. Pólya & G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis II*, revised translation of the German edition as **216** of Grundlehren Math. Wissenschaften, 1924, Corrected version, Springer, 1976.

[12] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, **785**, 1980, Springer.

[13] C. L. Siegel, *Lectures on the Geometry of Numbers*, Springer, 1989.

[14] A. Yaglom, I. Yaglom, *Chllenging Mathematics Problems with Elementary Solutions II*, 1967, Holden-Day, English translation reprint, 1987, Dover.

Noriko Hirata-Kohno,
hirata@math.cst.nihon-u.ac.jp
Department of Mathematics;
College of Science & Technology
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan

Kiyomitsu Suzuki,
Department of Physics
College of Science & Technology
Nihon University

Yukiko Ishii,
Yuta Kurimoto,
Kodai Kurishima,
Yudai Suzuki,
Mathematics Major,
Graduate School of Science & Technology,
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan

Yusuke Washio
Buzan-joshi High School;
Nihon University
Nakadai 3-15, Itabashi, Tokyo
174-0064, Japan