

## 期末試験のオンライン化について

～ 「行列の階数」「固有値」「固有ベクトル」～

山陽小野田市立山口東京理科大学・共通教育センター 亀田 真澄  
KAMEDA Masumi, Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City  
University

新潟大学・学術基盤機構情報基盤センター 宇田川 暢  
UDAGAWA Mitsuru, Center for Academic Information Service, Niigata University

### 1 はじめに

著者らは2010（平成22）年度頃から大学初年次教育において e-Learning サイト（以下、「本サイト」）を利活用しており、特に「STEM 教育 (science, technology, engineering, and mathematics educations)」に関する教育研究発表では、「情報通信技術 (information and communication technology, ICT)」「学習管理システム (learning management system, LMS)」, さらに学生所持パソコンの学習向け活用である「学生 PC 必携化 (bring your own device, BYOD)」を融合的に取り組むことが重要であることを教育実践例を明示しながら主張している [1].

また大学教育を取り巻く基盤では、大学構内全域で利用可能になった「無線 LAN (wireless local area network, WLAN)」, 学習成果物（特にデジタルファイル）を教室内外において共有できる「クラウドストレージ (cloud storage, CS)」, さらに機能高度化かつ個体コンパクト化されていくノートパソコン（以下、「ノート PC」）・スマートフォン（以下、「スマホ」）などの「スマートデバイス (smart device, SD)」が飛躍的に有益な学修ツールとして認識されている。

さらに近未来的教授法では、「アクティブラーニング (active learning, AL)」(「主体的・対話的で深い学び」に同義)「ラーニングアナリティクス (learning analytics, LA)」を取り入れ、次に、国際目標である「持続可能な開発目標 (sustainable development goals, SDGs)」[5]と国内目標である「サイバー空間（仮想空間）とフィジカル空間（現実空間）を高度に融合させたシステムにより、経済発展と社会的課題の解決を両立する、人間中心の社会である『Society 5.0』」[6]への対応が求められている。

本稿では、第1筆者が担当している「線形代数II」（2年次3期，選択2単位，2018年度対象）で、第2筆者と協働で実現した「定期（期末）試験のオンライン化」について、前述のキーワード（STEM 教育から Society 5.0 まで）に沿って数学ソフトウェアの効果的教育利用に関して報告する [8, 9].

### 2 大学の学び方

第1筆者は全ての担当科目において最初の授業で「ICT 学習環境」について学生が所持している SD によるオンライン調査を実行している。図1は2018年度の初年次数学

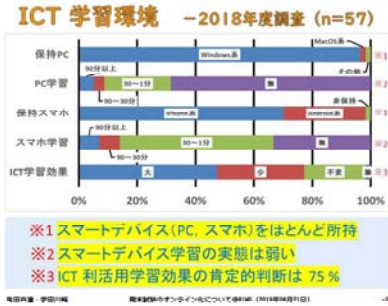


図 1: slide03



図 2: slide06

系授業での集計結果の抜粋である。なおほとんどの調査では抜粋内容とほぼ同様な傾向を示す集計結果となる。すなわちノート PC は指導的必携、スマホは自主的必携であり、SD による学習は（検索的活動が主な学習という）弱さまたは軽さであるが、ICT 利活用による学習（修）的効果には割合 75%で肯定的に判断している。

第 1 筆者が所属する山陽小野田市立山口東京理科大学（以下、「本学」）では 1987 年（旧母体の短大新設時）から新入生に対して一定基準以上のスペックをもつノート PC を所持することを指導し、学修において活用させている。さらに本学の建学精神には「地域のキーパーソンの育成」を掲げて自律的な学習者になることを目指している。この目標を実現するべく第 1 筆者の研究室内に設置した e-Learning サーバは“The Internet”（なお大学 Firewall 域外に設置）に接続されており、学内外向け学習（修）サービスを提供している。

8 年間運用され続けている本サイトは、LMS プラットフォームとして“Moodle”を利用し、主に基礎数学教育に向けた学習サービスを提供している [7]。そのため基礎数学教育では複雑かつ高度な数式を取り扱い、さらに Web ブラウザにおいて拡張可能な数式表示を取り扱う。そのために数式組版システム“AMS-LaTeX”と数式 JavaScript ライブラリ“MathJax”で対応させている。さらに教室外での学習活動に対してオンラインテスト（以下、「Web テスト」）を活用させるために数式オンラインテスト評価システム“STACK”と数式処理システム“Maxima”で対応させている。その結果、出題数式のランダム化、及びランダム化された正解に対する自動採点が実現されている [2]。また可動的な関数グラフには動的数学ソフトウェア“GeoGebra”を活用している。

図 2 にはサーバ実機写真、Web テストのスマホによる出題直後の画面のスクリーンショット、そして本サイトに関連したソフトウェア群（付ロゴマーク）が紹介されている。

### 3 自主的学修時間

履修者は、線形代数 II に対する知識（学習単元として「数ベクトル空間」「行列の階数」「1 次独立性」「1 次変換」「正規直交基底」「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」）は 15 回の対面授業と 2 種の Web テストで定着させていく。この中で、対面授業は通常の数学授業と同様に実行され、Web テストは 4 つの工程「ランダム出題」「コマンドライン入力」「サーバ認識」「フィードバック付採点」で構成されている。

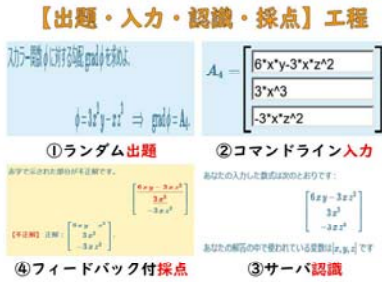


図 3: slide07sp

(プレ) オンラインテスト提供

	直近学習テスト (e-Test)	学習単元テスト (e-Report)
大問数	2 題	5 題
試験期間	4 日間	14 日間
最大時間	30 分	60 ~ 90 分
提供回数	11 回	5 回
延べ件数	1,286 件 (平均 3.08)	422 件 (平均 2.22)

図 4: slide09

図 3 では、① (ランダム化された) スカラー関数の勾配 ( $\text{grad}(3x^2y - xz^3)$ ) を求める問題が出題され、② 数論的数式 (例:  $6*x*y-3*x*z^2$ ) をコマンドライン操作で解答枠に対して入力させ、③ その数論的数式 (実際には Maxima コマンドによる数式) に対するサーバ認識による通常の数式 (例:  $6xy - 3xz^2$ ) が返答表示され、④ 採点結果 (3次元ベクトルの各成分ごとに正誤判定されて第 1 と第 2 成分が誤答、第 3 成分だけが正答) と正解のフィードバックが返されている。

図 4 では、2 種類の Web テスト: 「直近学習テスト (以下、「e-Test」)」「学習単元テスト (以下、「e-Report」)」の概要が記載されている。この Web テストには特有な試験制約「試験期間において反復受験を許可している」が設定されていることで、e-Test では 1,286 件 (履修者一人当たり平均 3.08 件)、e-Report では 422 件 (同 2.22 件) の反復受験がそれぞれで実行されている。それ故、知識確認テストが旧来型授業では授業回数分であるのに対して Web テストでは約 3 倍の提供回数を与えた教育的効果と判断している。

受験開始時間別受験件数 (e-Test 編)



図 5: slide12

自主的学修時間の検証

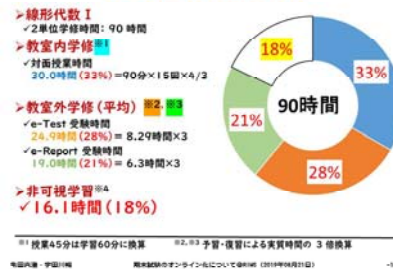


図 6: slide13

また図 5 は、e-Test における受験開始時間別受験件数を 24 時系列で示した度数分布グラフである。Web テストは「いつでも」「どこからでも」を実行できる学習活動を提供している教育的効果と判断している。さらに授業時間帯とは別に深夜帯にも学習活動のピーク出現を可視化している教育的効果と判断している。

さらに線形代数 II は、2 単位科目であるので教室内外で要望される「自主的学修時間」には 90 時間を必要とされる。図 6 では、対面授業が 33%、受験所要時間の累積を元

にした履修者平均として e-Test 受験が 28%, e-Report 受験が 21%のそれぞれの割合で可視化されるが、自主的学修時間の 18%にあたる学習活動が可視化できないことが分かる。その結果、融合型授業は教室内外で実行されている学習（修）活動の約80%を可視化させる教育的効果と判断している。

## 4 定期（期末）試験のオンライン化

Web テスト受験で、線形代数 II に対する知識と数論的数式の表現法に対する知識も取得している学習活動になっている。

期末試験のオンライン化	
期末試験概要 (e-Examination)	
大問数	11 題 ベクトル空間・行列の階数・固有値・固有ベクトル
試験期間	11月15日(水) 10:40～12:40
受験時間	最大 60 分/回
提供回数	1 回 ※試験期間内の反復受験を許可
延べ受験回数	77回/37人 ※2回反復: 34人, 3回反復: 3人
集計(SD)	最高評点に対する平均 63.4 点 (17.1)

図 7: slide15



図 8: slide17

学習活動の最終形として、定期（期末）試験を Web テストと同様にオンライン化（以下、「Web 試験」）して実行させた。この Web 試験は図 7 に示されている試験概要が設定され、図 8 に載せた受験風景写真のように実行された。

Web 試験では第 3 節で述べた学習単元に従ってランダム化された問題が 11 題、試験時間が最終授業時間帯に 30 分を延長させた 2 時間、受験毎の所要時間が最大 60 分、そして反復受験が許可されている。その結果、受験者が 37 人、延べ受験が 77 回（全受験者が 2 件以上の反復受験を実行）、複数受験の中での最高評点に対する平均が 63.4 点 ( $SD = 17.1$ ) であった。

実際の受験状況は教員の監督下の教室で周回空席となるように着席し、学生が所持しているノート PC（1 名が途中からスマホ）を専用サイトに WLAN で常時接続し認証後に Web 試験を受験している。このとき白紙の計算用紙が配布されている。なお受験者のノート PC 画面（なお右クリック機能を無効化）が最大化かつ統一されたデザインであることが視認できる。

## 5 Web 試験の学習データ分析

### 5.1 古典的統計分析

この Web 試験では、各受験者の反復受験による複数評点の中で、最高評点を学習成果物として採用している。なお、試験期間中における自動採点はダミー正解（すべて 1）

で実行され、試験終了後に真の正解にて再度採点され、再採点後の最高評点を採用している。

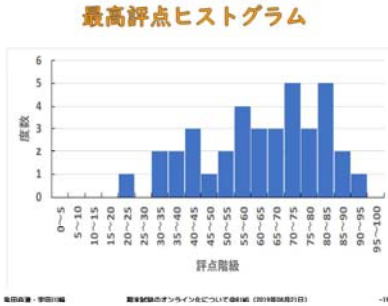


図 9: slide19

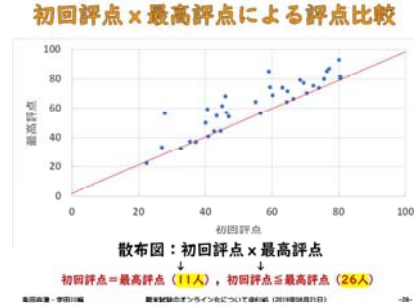


図 10: slide28

図 9 は最高評点に対するヒストグラムである。このヒストグラムの正規性の検定では *skewness* (歪度) = -0.49, *kurtosis* (尖度) = 2.3 を用いたオニムバス検定での P 値が  $p = 0.29$  であった。その結果、帰無仮説「正規性である」は棄却できないことが分かった。

図 10 は横軸に初回評点、縦軸に最高評点とした受験者別の散布図である。このとき、直線  $y = x$  上にある点すなわち初回評点と最高評点が同一であった受験者が 11 人(全受験者比 30%)、不等式  $y > x$  の領域内にある点すなわち初回評点より最高評点が高かった受験者が 26 人(同 70%) であった。つまり、Web 試験は教育の質向上を短時間で人数比で 2 倍強を引き出した学習活動である教育的効果と判断している。

## 5.2 問題構造分析

図 11 は Web 試験の最高評点に対する統計処理結果である [3]。

第 1 に、Web 試験の「クロンバック (Cronbach) の  $\alpha$  信頼性係数」が  $\alpha = 76.4\%$  であることより、Web 試験は高い信頼性がある教育的効果と判断している。

**試験評点集計結果**

基本統計値	受験者数		合格者数 (60+)		受験件数		平均反復受験件数		Cronbach の $\alpha$ 信頼性係数			
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	全体
配点	6	7	7	12	12	8	4.7	4.86	4.53	6.16	7.97	5.51
平均(点)	4.7	4.86	4.53	6.16	7.97	5.51	2.9	1.13	1.56	3.08	3.93	3.44
標準偏差	78.38	69.5	64.67	51.35	66.44	68.92	44.50**	30.04*	25.24	33.39*	67.00***	73.11***
分散率(%)	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	全体	51.15***	81.86***	70.04***	54.02**	48.35**	-
配点	12	12	9	8	7	100	9.65	7.03	5.27	3.68	4.03	63.39
平均(点)	2.93	4.61	2.95	2.45	2.17	17.14	80.41	58.56	58.56	45.95	57.53	-
標準偏差	51.15***	81.86***	70.04***	54.02**	48.35**	-	51.15***	81.86***	70.04***	54.02**	48.35**	-
分散率(%)	51.15***	81.86***	70.04***	54.02**	48.35**	-	51.15***	81.86***	70.04***	54.02**	48.35**	-

図 11: slide18



図 12: slide23

第2に、設問の難易度を示す指標として「ファシリティ指標  $F$ 」があり、設問の最高点に対する平均点の比率で示される。ここで設問番号  $n$  に対するファシリティ指標の数値を  $F_n$  と記す。

図13はファシリティ指標に関して相対的比較ができる2つの設問を紹介している。つまり設問10(Q10)は高い難易度となる最小値  $F_{10} = 45.95\%$  であり、「2次元ベクトル空間の一次変換と表現行列」に関する設問である。一方、設問7(Q7)は低い難易度となる最大値  $F_7 = 80.40\%$  であり、「4次元数ベクトル空間の演算」に関する設問である。すなわち Web 試験では「4次元ベクトル空間の演算」の設問より「2次元ベクトル空間の一次変換と表現行列」の設問の方が、履修者において難易度が高いと判断できる。

また、 $35\% \leq F \leq 65\%$  の場合、「平均的な受験者に対して適切な設問である」と認識されている。今回の Web 試験では11題中6題がこの条件を満たしていた。

第3に、設問の識別度(または弁別力)を示す指標として「識別率  $DE$ 」があり、設問がもつ部分点と全体点との相関係数で示される。ここで設問番号  $n$  に対する識別率の数値を  $DE_n$  と記す。

図14は識別率に関して相対的比較ができる2つの設問を紹介している。つまり設問8(Q8)は高い識別率となる最大値  $DE_8 = 81.86\%$  であり、「3次正方行列の固有ベクトル」に関する設問である。一方、設問3(Q3)は低い識別率となる最小値  $DE_3 = 25.24\%$  であり、「3元1次連立方程式の解の存在性」に関する設問である。すなわち Web 試験では「3元1次連立方程式の解の存在性」の設問より「3次正方行列の固有ベクトル」の設問の方が、履修者において識別度が高いと判断できる。言い換えれば設問8(Q8)で高い部分点をとった受験者は全体点も高いと判断できる。

また、 $DE \geq 50\%$  の場合、適切に識別できている設問であると認識されている。今回の Web 試験では11題中6題がこの条件を満たしていた。

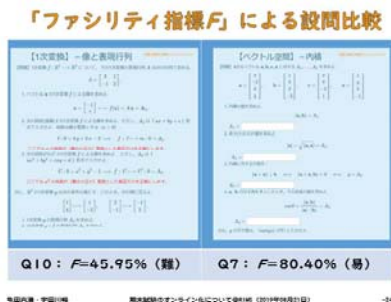


図13: slide24

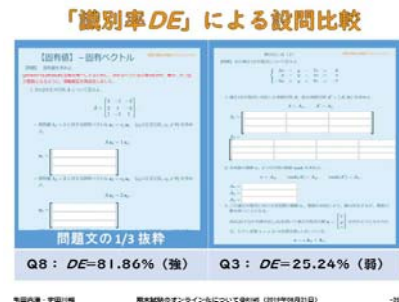


図14: slide25

第4に、ファシリティ指標と識別率の相関性について分析する。図12はファシリティ指標  $F$  を横軸に、識別率  $DE$  を縦軸に設定した設問別の散布図である。この散布図の相関係数が  $r = -0.08$  であり、さらにこの相関係数に対する無相関検定の  $P$  値が  $p = 0.82$  であったので、有意性は認められなかった。

第5(最後)に、設問の記載順について分析する。次式はファシリティ指標値  $F_n$  の

降順表示である。

$$F_7 > F_1 > F_2 > F_6 > F_5 > F_3 > F_8 = F_9 > F_{11} > F_4 > F_{10}$$

このことから、低い難易度から高い難易度へと記載していく設問の設定が良い試験システムであると認識すれば、次回の Web 試験でこの降順と同様に記載することが適切であると判断できる。

## 6 Web 試験のエビデンス

今回の Web 試験では、受験者には白紙の計算用紙を希望する枚数分を配布して受験させている。試験終了直後、全ての受験生に対して各自のスマホで使用した計算用紙をすべてスキャンさせ、さらに専用サイトの Moodle 機能「電子掲示板 (Forum)」にデジタル・スキャン・ファイル (PDF 形式または画像形式) をアップロードさせた。

図 15 には、2 人の受験者から提供されたデジタル・スキャン画像である。すなわち学生 A (写真左) は最高評点が 87.0 点 (成績上位 2 番), A4 判用紙が 17 枚 (中身の濃い計算状態) がアップロードされていた。また学生 B (写真右) は最高評点が 32.6 点 (成績下位 2 番), A4 判用紙が 3 枚 (中身の薄い計算状態) がアップロードされていた。

このアップロード状況から、Web 試験の最高評点と計算用紙の使用状態 (中身の使用度) には相関があると (視覚的に) 判断できる。

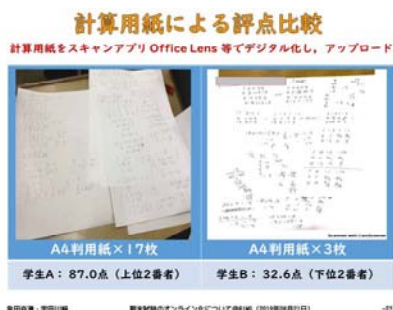


図 15: slide27

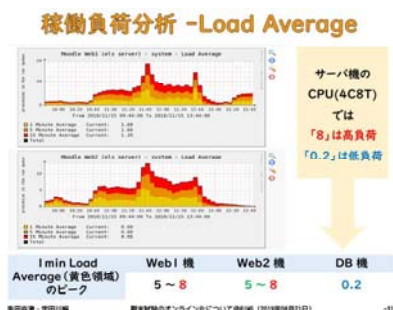


図 16: slide31

## 7 サーバ稼働負荷

今回の Web 試験では、e-Learning サーバを同一時間帯においてインターネット接続にて使用されている。また本サイトのコアサーバは、ウェブ・データベース・サーバであり、「Xeon E3-1270 (3.4GHz 4C8T)」のスペックをもつ CPU で稼働している。さらに本サイトではサーバ稼働負荷状況を常時、記録している。

図 16 は、本サイトにある 2 台の Web サーバにおける“Load Average”の時系列積み上げ面グラフである (縦軸の目盛りは 0 以上、15 以下または 20 以下の範囲, 下側

から 1/5/10 Minute(s) Average の面グラフが重ねられている)。特に、「1 Minute Average」の黄色面グラフ（最下部）の推移に注目する。このとき、試験開始の 10 時 40 分から上昇し始め、11 時 40 分頃と 12 時 40 分頃に最大値（ともに数値 8 未満）が記録されている。これは CPU スペックが 8T（8 スレッド；同時稼働な最大プログラム数を示す）であることから、余裕があまりないギリギリの状態です。サーバ稼働負荷があった状況が観察できる。

それ故、本サイトのスペックとネットワーク環境を総合的に考慮して、「Web 試験は 2 倍 80 人の受験者まで致命的ではない状態で稼働可能である」と判断できる。

## 8 おわりに

本稿では、大学初年次で履修する数学科目に対する定期試験のオンライン化を教育的効果の観点で分析・報告している。例えば通常の紙ベースの定期試験と比べて、履修者側の受験機会の増加、及び教師側の作業工程数の減少が観察できるが、試験実施における不正行為等の判断、試験実施における公正性・公平性、使用用具・環境の差異などにおいて検討すべき課題はまだ多い状況である。

また、2021 年春に開始される大学共通テスト [4] に「記述式問題」を取り入れようとして試行調査が 2 回実行されているが、現時点においても実行できる確実性は未定である。一方、今回の Web 試験では「記述式問題」を取り入れて実施されている。これらの「記述式問題」に関する差異を研究調査することは意味深いと判断している。

次に、前述の一部のキーワードに対して次のような関連付けができる。

1. Web 試験で使用された計算用紙をデジタル・スキャンし、そのデジタル・ファイルのアップロード先であるネットワーク上の保存場所が、キーワード“CS”に関連付けられる。
2. Web テスト／試験において反復受験を実行すること自体が「主体的な学び」と判断できるので、キーワード“AL”に関連付けられる。
3. 8 年間利用し続けている e-Learning サイト自体が、キーワード“SDGs”にある目標 4 [教育]:「すべての人に包摂的かつ公正な質の高い教育を確保し、生涯学習の機会を促進する。」に関連付けられる。
4. オンライン化されたテスト／試験を受験すること自体が、通常の紙ベースの試験からのバーチャル化と判断できるので、キーワード“Society 5.0”に関連付けられる。

最後に、キーワード直後の（・）内には主に関連する節番号を記載したリストすることで本稿を締める。

STEM 教育(第 2 節), ICT(2), LMS(2), BYOD(2), WLAN(4), CS(6), SD(4), AL(3), LA(5), SDGs(3), Society 5.0(4)。



## 参考文献

- [1] 亀田真澄, 宇田川暢: 「大学の数学教育に対する主体的な学びとなる学修環境作り」, 私立大学情報教育協会 (JUICE) 論文誌 ICT 活用教育方法研究, 第16巻, 第1号, pp.36-41, 2013
- [2] 亀田真澄, 宇田川暢: 「Moodle, TeX, STACK による数学の e ラーニングの取り組み」, Proceedings of Moodle Moot Japan 2013, pp.22-27, 2013
- [3] Moodle Org.: “Quiz statistics calculations - MoodleDocs”, [https://docs.moodle.org/dev/Quiz\\_statistics\\_calculations](https://docs.moodle.org/dev/Quiz_statistics_calculations), (参照日 2019.11.6)
- [4] 大学入試センター: 「大学入学共通テスト | 大学入試センター」, [https://www.dnc.ac.jp/daigakunyugakukibousyagakuryokuhyoka\\_test/index.html](https://www.dnc.ac.jp/daigakunyugakukibousyagakuryokuhyoka_test/index.html), (参照日 2019.11.6)
- [5] 外務省: 「SDGs とは? | JAPAN SDGs Action Platform | 外務省」, <https://www.mofa.go.jp/mofaj/gaiko/oda/sdgs/about/index.html>, (参照日 2019.11.6)
- [6] 内閣府: 「Society 5.0-科学技術政策-内閣府」, [https://www8.cao.go.jp/cstp/society5\\_0/index.html](https://www8.cao.go.jp/cstp/society5_0/index.html), (参照日 2019.11.6)
- [7] 亀田真澄, 宇田川暢: 「理工学系大学の初年次教育における e-Learning 実践の7年間の振り返り」, 東京理科大学紀要 (教養篇), vol.51, pp.381-394, 2019
- [8] 亀田真澄, 宇田川暢: 「数理的記述式, 自動採点方式, かつ反復受験に対応したオンラインテストの実践」, 私立大学情報教育協会 (JUICE), 2019年度 ICT 利用による教育改善研究発表会, pp.173-176, 2019
- [9] 亀田真澄, 宇田川暢: 「BYOD による数理的記述式の自動採点試験の実践報告 ～線形代数の期末試験を e テスティングで生かす～」, 日本テスト学会第17回大会, pp.82-85, 2019