数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 84-89

タイムラグをもつ常微分方程式への単調性理論の応用

静岡大学大学院理工学研究科 芦澤恵太 (Keita Ashizawa)
Graduate School of Socience and Technology,
Shizuoka University
静岡大学工学部 宮崎倫子 (Rinko Miyazaki)
Faculty of Engineering, Shizuoka University

1 序

昨年の数理研の集会では次のタイムラグを持つ Lotka–Volterra 微分方程式の解の漸近定数問題について得られた結果を報告した (cf.[3]).

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1 x_1(t)[-x_1(t) + x_2(t-\tau_2)] \\ x_2'(t) = \alpha_2 x_2(t)[-x_2(t) + x_3(t-\tau_3)] \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = \alpha_n x_n(t)[-x_n(t) + x_1(t-\tau_1)] \end{cases} \tag{E1}$$

$$x_i(s) = \varphi_i(s) \geq 0, -\tau_i \leq s \leq 0; \varphi_i(0) > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

(E1) の平衡点は無数に存在し，連結集合を構成している．解析は二つの異なった汎関数を構成し，LaSalle の不変原理と保存量を考えることにより行った．その結果，(E1) の全ての解がタイムラグの大きさによって定まる一点に収束することを示した (cf.[3],Theorem 2.1)．その際，竹内先生（静岡大学工学部）より安定性の解析は “monotone theory（以下，単調理論）” を用いて行うこともできるのではないかとのコメントを頂いた．また汎関数を構成することは一般的には困難なケースが多い．まして二つの異なった汎関数を構成するとなればなおさらであろう．そこで本研究では単調性理論を用いて(E1) において $n = 2$ の場合の解析を行った．

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1 x_1(t)[-x_1(t) + x_2(t-\tau)] \\ x_2'(t) = \alpha_2 x_2(t)[-x_2(t) + x_1(t-\tau)] \end{cases} \tag{E2}$$

$$x_i(s) = \varphi_i(s) \geq 0, -\tau \leq s \leq 0; \varphi_i(0) > 0, i = 1, 2.$$

定理 1. (E2) の全ての解は平衡点に収束する．

第 2 節において単調理論をタイムラグを持つ常微分方程式に対して適用する為の条件についてまとめ，第 3 節で(E2) に対して単調理論を適用し定理の証明を行う．

講演時に証明の後半に関連して俣野先生（東大）より「順序距離空間上で半流が S.O.P. かつ平衡点の集合が全順序連結集合ならば，解はその集合内の一点に収束する」ということが証明できるはずであるとご指摘いただき，また証明のアドバイスもいただいた．そこで付録としてこの命題に対する証明もまとめておく．

2 準備

自励系の方程式

$$x'(t) = f(x_t) \tag{2.1}$$

を考えよう．$\mathbf{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間とし，$C := C([-r,0],\mathbf{R})$ を区間 $[-r,0]$ から $\mathbf{R}$ への連続関数全体の集合とする．C におけるノルムを $|\phi| = \sup_{-r\le s\le 0}|\phi(s)|$ で定義する．C における正の錐を

$$C_+ := C_+([-r,0],\mathbf{R}) = \{\phi \in C : \phi(s) \ge 0, -r \le s \le 0\}$$

で与える．C における半順序関係 $\le$ を次のように定義する．$\phi, \psi \in C$ に対して $\psi - \phi \in C_+$ のときに $\phi \le \psi$ と表し，特に $\phi \le \psi$ かつ $\phi \ne \psi$ のときに $\phi < \psi$ と表す．また $\psi - \phi \in Int\, C_+$ のときに $\phi << \psi$ と表す．ここで $r = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathbf{R}^n_+$，$R = \max r_i$ とし(2.1) の状態空間を

$$C_r = \prod_{i=1}^{n} C([-r_i,0],\mathbf{R})$$

とする．C_r はバナッハ空間であり，C_r における正の錐を $\prod_{i=1}^n C_+([-r_i,0],\mathbf{R})$ で与え，順序関係を上と同様に定義する．集合 D を C_r の開部分集合とし $f : D \to \mathbf{R}^n$ は連続微分可能であるとする．連続関数 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ に対して $x(t)$ の t における切片 $x_t \in C_r$ を $x_{t,i}(s) = x_i(t+s), -r_i \le s \le 0$ で定義する．ここで $x_i, x_{t,i}$ はそれぞれ x, x_t の第 i 成分である．$\phi \in D$ に対して(2.1) の $x_0 = \phi$ をみたす解が $t \ge 0$ で存在すると仮定し，これを $x(t,\phi)$ で表す．$\phi \in D$ に対して $x(t,\phi)$ の t における切片 $x_t(\phi)$ によって D 上の半流 Φ を次のように定義する．

$$\Phi_t(\phi) = x_t(\phi).$$

(2.1) が "cooperative" であるとは，D が順序凸集合 ($u < v$ となる $u, v \in D$ に対して順序区間 $[u,v]$ が D に含まれること) であり，$\phi \in D$ に対して f の ϕ における微分 $df(\phi)$ が次の条件 (K) を満たすときにいう．

条件 (K)：$\psi \ge 0$ かつ $\psi_i(0) = 0$ ならば $L_i\psi \ge 0$.

ここで微分 $df(\phi)$ は f の点 $\phi \in D$ のまわりでの線形化で，線形作用素 L を用いて $\psi \in C_r$ に対して

$$L_i\psi = a_i\psi_i(0) + \sum_{j=1}^{n}\int_{-r_j}^{0}\psi_j(s)d_s\eta_{ij}(s) = a_i\psi_i(0) + \overline{L}_i(\psi)$$

と表現することもできる．ここで $L_i\psi$ は $L\psi$ の i 番目の成分を表し η_{ij} は正の Borel 測度で，$\phi \ge 0$ ならば $\overline{L}_i\phi \ge 0$ である．$a_i = a_i(\phi), \eta_{ij} = \eta_{ij}(\phi)$ は $\phi \in D$ の連続関数である．

条件 (I)：行列

$$A(L) = (L\hat{e}_1, L\hat{e}_2, \cdots, L\hat{e}_n)$$

が既約である．ここで $\hat{e}_j \in C_r$ は $\hat{e}_j(s) \equiv col(0,0,...,\underset{j}{1},...,0)$ を満たすものとする．

(2.1) が cooperative であり，次の条件：

(i) 各 $\phi \in D$ に対して $df(\phi)$ が条件 (I) を満たす；
(ii) $r_j > 0$ となる任意の j，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，すべての $\phi \in D$ に対し $\eta_{ij}(\phi)([-r_j, -r_j + \varepsilon]) > 0$ となる i が存在する；

を満たすとき，(2.1) は "cooperative" で "irreducible" であるという．

次の条件を設けることで，単調理論から解の大域的な挙動に対する結果が得られる．

条件 (T)：f が完全連続で，各 $\phi \in D$ に対して $t \geq 0$ で解 $x(t, \phi)$ が存在し有界である．さらに D 内の任意のコンパクト部分集合 A に対して $\phi \in A$ のとき十分大きなすべての t で $x_t(\phi) \in B$ となるような D の有界閉部分集合 $B = B(A)$ が存在する．

具体的には次の定理が知られている．

定理 A([2], p.90, Theorem 4.1). (2.1) が D において "cooperative" で "irreducible" であるとする．このとき，条件 (T) を満たすならば D において解が平衡点に収束する初期関数の集合（以下，収束点集合）は開であり稠密な部分集合を含む．

3 定理の証明

(E2) が条件 (T) を満たすことを示すため, 次の補題を考える．

条件 (Q) ある i に対して $\phi \leq \psi$ かつ $\phi_i(0) = \psi_i(0)$ となるとき，$f_i(\phi) \leq f_i(\psi)$ となる．

補題 2([2], p.78, Theorem 1.1). $f, g : D \to \mathbf{R}^n$ は D の任意のコンパクト部分集合上で連続かつ Lipschitz 条件を満たし，条件 (Q) を満たすと仮定する．さらに任意の $\phi \in D$ に対して $f(\phi) \leq g(\phi)$ と仮定すれば，$\phi, \psi \in D$ が $\phi \leq \psi$ ならば任意の $t \geq 0$ に対して $x(t, \phi, f) \leq x(t, \psi, g)$ が成立する．

<u>条件 (Q) の確認</u> (E2) の初期関数 ϕ, ψ に次の意味：

$$\phi_i(s) \leq \psi_i(s),\ -\tau \leq s \leq 0,\ i = 1, 2.$$

で順序関係 $\phi \leq \psi$ が成立すると仮定する．

$\phi_1(0) = \psi_1(0)$ のとき，

$$f_1(\phi) = \alpha_1(0)\phi_1(0)[-\phi_1(0) + \phi_2(-\tau)],\quad f_1(\psi) = \alpha_1(0)\psi_1(0)[-\psi_1(0) + \psi_2(-\tau)].$$

したがって $f_1(\phi) \leq f_1(\psi)$.

$\phi_2(0) = \psi_2(0)$ のとき,

$$f_2(\phi) = \alpha_2(0)\phi_2(0)[-\phi_2(0) + \phi_1(-\tau)],\quad f_2(\psi) = \alpha_2(0)\psi_2(0)[-\psi_2(0) + \psi_1(-\tau)].$$

したがって $f_2(\phi) \le f_2(\psi)$.

以上より (E2) は条件 (Q) を満たす.

よって補題 2 より (E2) の解に関して $\phi \le \psi$ のとき $x_t(\phi) \le x_t(\psi)$ が成り立つ. よって初期関数 ϕ に対して $\psi_1(\psi_1 > \phi)$ を平衡点上にとれば $x_t(\phi) \le \psi_1$ が, $\psi_2 \in M(\psi_2 < \phi)$ に対しては $\psi_2 \le x_t(\phi)$ が成立する. よって(E2) においては任意の初期関数 ϕ に対して $\psi_1, \psi_2 \in M$ が存在することより $\psi_2 \le x_t(\phi) \le \psi_1$ が成立する.

すなわち正の初期関数を与えたときの解の正値性および有界性が成立する. これらのことから(E2) が条件 (T) を満たすことは明らかである.
領域 D を

$$D = \{\phi \mid \phi_i(s) > 0,\ -\tau \le s \le 0\}$$

と定義すれば, これは明らかに順序凸集合である.

条件 (K) の確認　$df(\phi)$ を表す線形作用素を L とすると(E2) に対して

$$L_1\psi = (-2\phi_1(0) + \phi_2(-\tau))\psi_1(0) + \phi_1(0)\psi_2(-\tau),$$
$$L_2\psi = \phi_2(0)\psi_1(0) + (-2\phi_2(0) + \phi_2(-\tau))\psi_2(-\tau)$$

となる. $\psi_1(0) = 0$ のときは $L_1\psi \ge 0$ となり, $\psi_2(0) = 0$ のときは $L_2\psi \ge 0$ となることから(E2) は条件 (K) を満たしている.

条件 (I) の確認　行列 $A(L)$ は

$$A(L) = \begin{bmatrix} -2\phi_1(0) + \phi_2(-\tau) & \phi_1(0) \\ \phi_2(0) & -2\phi_2(0) + \phi_1(-\tau) \end{bmatrix}.$$

となり, これは明らかに既約である. また

$$j = 1 \text{ に対しては},\ \eta_{11}(\varphi) = \tfrac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0,\quad \eta_{21}(\varphi) = \tfrac{\partial f_2}{\partial y_1} = \phi_2(0) > 0,$$
$$j = 2 \text{ に対しては},\ \eta_{22}(\varphi) = \tfrac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0,\quad \eta_{12}(\varphi) = \tfrac{\partial f_1}{\partial y_2} = \phi_1(0) > 0.$$

以上のことより, (E2) は “cooperative” で “irreducible” である. したがって定理 A を適用すると(E2) の収束点集合は開稠密部分集合を含むことがいえる. さらに(E2) において集合 E は全順序集合となっているので, D と収束点集合は一致する (cf.[2],p12,Remark 4.2 または付録).

付録

X を半順序距離関係 $\le$ をもつ順序距離空間, $\{\Phi_t\}_{t\ge0}$ を X 上の半流とする. なお $u, v \in X$ に対し $u \le v$ かつ $u \ne v$ のとき $u < v$ と表す. E を平衡点全体からなる集合とする. この

とき以下の仮定を設ける．

仮定 1． 各 $t > 0$ に対して Φ_t はコンパクト写像かつ順序保存 (文献 [2] では "monotone" のこと)．

仮定 2． 集合 E は全順序集合で連結．さらに以下の 2 つの条件を満たす：
- 任意の $u, v \in E(u < v)$ に対して $[u, v] := \{w \in X \mid u \leq w \leq v\}$ は有界集合．
- 任意の $w \in X$ に対し $u, v \in E$ が存在し $w \in [u, v]$ を満たす．

任意の $w \in X$ に対して $\overline{V}$, $\underline{V}$ を以下のように定義する．

$$\overline{V}(w) := \min\{v \in E \mid v \geq w\}, \quad \underline{V}(w) := \max\{v \in E \mid v \leq w\}.$$

このとき $\overline{V}$, $\underline{V}$ に対して次の補題が成立する．

補題 3． $w \in X$ とする．$\overline{V}(\Phi_t(w))$ は t について単調非増大．$\underline{V}(\Phi_t(w))$ は t について単調非減少．

証明）$t_1 < t_2$ を任意にとり，$u_1 = \overline{V}(\Phi_{t_1}(w))$ とおくと，$\overline{V}$ の定義より

$$\Phi_{t_1}(w) \leq u_1.$$

Φ_t が順序保存であることから

$$\Phi_{t_2-t_1}(\Phi_{t_1}(w)) \leq \Phi_{t_2-t_1}(u_1).$$

$u_1 \in E$ なので $\Phi_{t_2}(w) \leq u_1$．再び $\overline{V}$ の定義から

$$\overline{V}(\Phi_{t_2}(w)) \leq u_1.$$

したがって $\overline{V}(\Phi_{t_2}(w)) \leq \overline{V}(\Phi_{t_1}(w))$ となり，$\overline{V}$ が単調非増大であることがわかる．$\underline{V}$ が単調非減少であることも同様に証明できる．

補題 4([1], Theorem 3.5)．任意の $u_0 \in X$ に対し，ω 極限集合 $\omega(u_0)$ は空でなくコンパクトで連結な不変集合である．

明らかに次の補題が成立する．

補題 5． 任意の $a \in X$ に対して，a の開近傍を U とする．このとき $b \in U$ が存在して，$\overline{V}(b) > \overline{V}(a)$ を満たす．

命題 1． 任意の $u_0 \in X$ に対して，$\omega(u_0)$ 上で $\overline{V}$ および $\underline{V}$ はそれぞれ一定値をとる．

証明）$\overline{V}$, $\underline{V}$ の定義および補題 3 より $t \geq 0$ に対して

$$\underline{V}(u_0) \leq \underline{V}(\Phi_t(u_0)) \leq \overline{V}(\Phi_t(u_0)) \leq \overline{V}(u_0)$$

が成立する．すなわち $\overline{V}(\Phi_t(u_0)) \geq \underline{V}(u_0)$．

$p, q \in \omega(u_0)$ とすると $\mathbf{R}^+$ 内の単調増加点列 $\{\tau_k\}$, $\{\sigma_k\}$ が存在し，$k \to \infty$ のとき $\tau_k, \sigma_k \to \infty$, $\Phi_{\tau_k}(u_0) \to p$ かつ $\Phi_{\sigma_k}(u_0) \to q$ となる．X 内の点列 $\{\overline{V}(\Phi_{\tau_k}(u_0))\}$, $\{\overline{V}(\Phi_{\sigma_k}(u_0))\}$ は下に有界で単調減少．$\Phi_{\tau_k}(u_0)$ の単調性により k に対して $\Phi_{\tau_k}(u_0) \geq \Phi_{\sigma_{l(k)}}(u_0)$ となる $l(k)$ が存在する．ここで $k \to \infty$ とすれば $p \geq q$．また $p \leq q$ であることも同様に証明できる．反対称律（順序の公理）により $p = q$ となる．

ω 極限集合の不変性（補題 4）により次の系は明らかである．

系 1. 任意の $v \in \omega(u_0)$ に対し，$\overline{V}(\Phi_t(v))$ および $\underline{V}(\Phi_t(v))$ はそれぞれ t によらず一定値をとる．

定義 2. Φ が順序保存かつ以下の条件をみたすとき "storongly order-preserving: S.O.P." という．$x, y \in X$ に対して $x < y$ であれば，$x \in U, y \in W$ をみたす X の開近傍 U, W および $t_0 > 0$ が存在し，$\Phi_{t_0}U \leq \Phi_{t_0}W$ を満たす．

補題 6([2], p.5, Theorem 2.3). Φ が S.O.P. ならば，極限集合が $x < y$ となる 2 点 x, y を含むことはない．

命題 2. Φ_t が S.O.P. ならば $\overline{V}(\Phi_t(v))$ が t によらないのは $v \in E$ のときのみである．

証明）$v \in E$ ならば v が平衡点であることから $\overline{V}$ が t によらないのは明らか．よって $\overline{V}(\Phi_t(v))$ は t によらない．$v \notin E$ が存在し $\overline{V}(\Phi_t(v))$ が t によらないと仮定する．このとき $\overline{V}(v) = v^*$ とおくと $v < v^*$．Φ が S.O.P. より，$v \in U$ となる開近傍 U と $t_0 > 0$ が存在し

$$\Phi_{t_0}U \leq v^*. \tag{1}$$

補題 5 より $w \in \Phi_{t_0}U$ が存在して，$\overline{V}(w) > \overline{V}(\Phi_{t_0}(v)) = v^*$ を満たす．一方(1) より $w \leq v^*$ なので $\overline{V}$ の定義より $\overline{V}(w) \leq v^*$．これは矛盾である．

定理 2. Φ が S.O.P. で E が全順序集合であれば，任意の $u_0 \in X$ に対して，$\omega(u_0)$ は 1 点しか含まない．

命題 2 と系 1 より，$\omega(u_0)$ は E に含まれる．E は全順序集合ゆえ，補題 6 により $\omega(u_0)$ は 1 点しか含まない．すなわちこれは(E2) において解が 1 点に収束することに対応する．
注意: (2.1) が "cooperative" かつ "irreducible" であれば，[2, p.3, Proposition 1.1] と [2, p.89, Corollary 3.5] により，半流 Φ が S.O.P. であることが保証されている．

参考文献

[1] S.H.Saperstone, Semidynamical systems in infinite dimensional spaces, Applied Math Sciences 37(1981), Springer-Verlag, Berlin

[2] Hal L.Smith, Monotone Dynamical Systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems, AMS, 1995 .

[3] 芦澤恵太，齋藤保久，宮崎倫子，あるタイムラグを持つ微分方程式の保存量と大域挙動，数理解析研究所講究録 1309(2003),132-139 .