ヘロン三角形を題材とした
課題学習における表計算ソフトの活用

倉敷市立郷内中学校　有元 康一
Koichi Arimoto, Kurashiki City Gonai Junior High School

1　はじめに

我が国の児童生徒は, PISA2015 や TIMSS2015 の調査により, 数学的リテラシーの平均得点は国際的に見ると高いが, 中学生では数学を学ぶ楽しさや, 実社会との関連に対して肯定的な回答をする割合は改善が見られるものの, 諸外国と比べると低い状況にあると指摘されている [1]. また, 平成 30 年度に実施された全国学力・学習状況調査では, 中学校数学の課題として, 事象を数学的に解釈し, 問題解決の方法を数学的に説明すること, および数学的な結果を事象に即して解釈することを通して成り立つ事柄を判断し, その理由を数学的な表現を用いて説明することの 2 点を指摘している [2]. 文部科学省は新学習指導要領において,「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善を目指しており, 上記の課題の解決のため課題学習が取りあげられている [3]. また, 日本学術会議数理科学委員会数学教育分科会は, グローバル社会を生き抜くためには, 数学的活動の質量両面の充実が欠かせず, そのためには, 中学校・高等学校の数学において「課題学習」を現在より拡充すべきであると指摘している [4]. そこで, 課題学習で取り扱う題材を開発することが急務となっており, 本研究ではその一つについて取り上げる.

三辺の長さと面積が整数である三角形はヘロン三角形と呼ばれる. この定義は小学生でも理解できる内容であるが, その例を見出すことは必ずしも容易ではない. そのため, ヘロン三角形およびそれに関連する概念は生徒の興味や関心をひき, 問題解決を図る課題学習のための題材となり得る. そこで有元・松岡は, 中学校においてヘロン三角形を題材とした課題学習を構想している [5]. 本研究はこの一部であり, 我々が構想している授業のなかで, Carmichael によるヘロン三角形の構成法 [7] を取り上げ, 表計算ソフトを活用して, この三角形の三辺の長さと面積を提示することについて考察する. 有元は, 中学生を含む一般市民を対象として, ヘロン三角形の例を見出す活動を取り入れた授業を行った. この講座における受講者の反応を分析した結果, 生徒が測定や計算によりヘロン三角形を見出した後に, パソコンで表計算ソフト等を活用することがこの三角形の理解を深める一つの方法となり得ることが示唆された. ヘロン三角形を見出す学習活動において表計算ソフトの活用により, 生徒が自分で求めたヘロン三角形以外の例を知るばかりでなく, その三角形が数多く存在することを実感できることが期待できる.

2　ピタゴラス三角形およびヘロン三角形

ここでは, ピタゴラス三角形やヘロン三角形に関する定義, および, すでに知られている, それらの三辺の長さや面積に関する基本的な性質を簡単にまとめる.

定義 1　三辺の長さが整数である直角三角形を**ピタゴラス三角形**と呼ぶ．この三辺の長さの組を**ピタゴラス数**と呼ぶ．

ピタゴラス数は, 次のように表示されることが知られている (例えば [6] を参照).

命題 2　すべてのピタゴラス数は,

$$2uv, \quad u^2 - v^2, \quad u^2 + v^2$$

の正の整数倍で得られる．このとき, $u^2 + v^2$ が斜辺の長さを表す．ここで, u と v は $u+v$ が奇数で, $u > v$ を満たす互いに素な正の整数である.

命題 2 より, 次が得られる.

命題 3　ピタゴラス三角形の直角をはさむ二辺のうち，少なくとも一方の長さは偶数となる.

命題 3 より, 次が得られる.

命題 4　ピタゴラス三角形の面積は整数である.

定義 5　三辺の長さと面積が整数である三角形を**ヘロン三角形**と呼ぶ．特に, 三辺の長さの最大公約数が 1 であるようなヘロン三角形を**原始ヘロン三角形**と呼ぶ.

命題 4 より, 次が得られる.

命題 6　ピタゴラス三角形はヘロン三角形である.

定理 7 [7, Carmichael]　すべてのヘロン三角形の三辺の長さは,

$$n(m^2 + h^2), \quad m(n^2 + h^2), \quad (m+n)(mn - h^2)$$

の形の数に比例する．ここで, m, n, h は正の整数で, $mn > h^2$ である.

3　市民講座の内容および受講生の様子

中学生を含む一般市民を対象とした愛知サマーセミナーにおいて, ヘロン三角形の例を見出す活動を取り入れた授業を行った.

開催場所　南山大学 （愛知県名古屋市）

実施日時　2019 年 7 月 14 日 (日) 午前 9 時 30 分～午前 10 時 50 分 （80 分間）

実施講座名　第 31 回 愛知サマーセミナー

講座タイトル　ヘロン三角形について探究しよう！

受講者数　合計 12 名（中学生 4 名, 高校生 2 名, 大学生 1 名, 一般 5 名）

3.1　講座の内容

以下に, 実施した講座の内容を述べる. 著者が作成したテキスト (A4 版 6 枚)[8] を受講者に配付した. 三辺の長さが a, b, c, 面積が S である三角形を $\triangle(a, b, c; S)$ と表す.

1. ヘロン三角形は存在するかどうかを問う.
著者が三辺の長さと面積がすべて整数である三角形（ヘロン三角形）はあるのかどうかを問う内容の書かれたプリントを 1 枚配布した. あると思うならば, その理由および三角形の三辺の長さと面積を答え, ないと思うならば, その理由を述べるように指示した. 正答した受講者はすべてピタゴラス三角形を答えていた.

2. ピタゴラス三角形とヘロン三角形の定義を示す.
著者がピタゴラス三角形とヘロン三角形の定義を板書し, ピタゴラス三角形ならば, ヘロン三角形になることも説明した.

3. ピタゴラス三角形でないヘロン三角形を作れないかを問う.
著者が簡単なピタゴラス数の一覧表（表 1）を板書し, 直角をはさむ辺の長さは一方が偶数, もう一方が奇数となり, ピタゴラス三角形の面積はすべて整数となることを確認した. その後, 二つの異なるピタゴラス三角形を組み合わせて, 三つの内角がすべて直角でないヘロン三角形を作れないか考えるように働きかけた. この組み合わせるという発想は [9] による.

表 1: 板書したピタゴラス数

a	b	c	S
3	4	5	6
5	12	13	30
7	24	25	84
8	15	17	60

a	b	c	S
9	40	41	180
11	60	61	330
12	35	37	210
13	84	85	546

ほとんどの受講者はどのように三角形を組み合わせればよいかの発想が出てこない様子であったが, 二つのピタゴラス三角形 $\triangle(5, 12, 13; 30)$, $\triangle(9, 12, 15; 54)$ を組み合わせて, 一つのヘロン三角形 $\triangle(13, 14, 15; 84)$ が構成されることを一般の受講者のうちの 1 名が見出した. この受講者に, その三角形を図示して説明してもらった.

4. ピタゴラス三角形でないヘロン三角形を作る方法を一緒に考える.
著者が受講者の取り組みの様子をみながら, 二つのピタゴラス三角形 $\triangle(5, 12, 13; 30)$, $\triangle(3, 4, 5; 6)$ を組み合わせて 8 通りのヘロン三角形が得られることを説明した. $\triangle(5, 12, 13; 30)$ に, $\triangle(3, 4, 5; 6)$ を 3 倍に拡大した $\triangle(9, 12, 15; 54)$ を, 長さ 12 の辺を共通の辺として合わせ

ると, ヘロン三角形 $\triangle(13,14,15;84)$ が得られ (図 1), $\triangle(9,12,15;54)$ から $\triangle(5,12,13;30)$ を除くと, ヘロン三角形 $\triangle(4,13,15;24)$ が得られる (図 2) ことを説明した.

同様にして, $\triangle(5,12,13;30)$ に, $\triangle(3,4,5;6)$ を 4 倍に拡大した $\triangle(12,16,20;96)$ を合わせると, $\triangle(13,20,21;126)$ が, $\triangle(12,16,20;96)$ から $\triangle(5,12,13;30)$ を除くと $\triangle(11,13,20;66)$ が得られることを説明し, 他の 4 通りもすべて説明した.

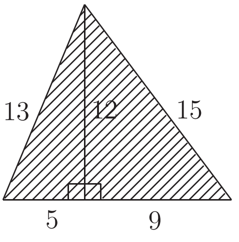

図 1: 組合せて得られる $\triangle(13,14,15;84)$

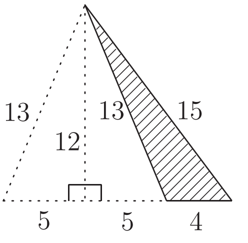

図 2: 除いて得られる $\triangle(4,13,15;24)$

5. 和算家である菊池長良, 久留島義太による構成公式を紹介する.

著者が菊池長良によるヘロン三角形の構成公式を紹介した. 内容は, 田中が解説しているものである [10, 11].

菊池の公式　次の公式でつくられる三角形はヘロン三角形となる. 三辺の長さを a,b,c, 面積を S とする.

$$\mathrm{I}: a=v(r^2+w^2), b=w(r^2+v^2), c=(w+v)(r^2-vw), S=rvw(w+v)(r^2-vw).$$

$$\mathrm{II}: a=v(r^2+w^2), b=w(r^2+v^2), c=(w-v)(r^2+vw), S=rvw(w-v)(r^2+vw).$$

r,v,w は正の整数である. ただし, 原始ヘロン三角形をつくるには三辺の最大公約数で約す.

次に, 著者が久留島義太によるヘロン三角形の構成公式を紹介した. 内容は, 青山が文献 [12] を調べて解説しているものである [13].

久留島の公式　任意の二つの分数 n_1/m_1, n_2/m_2 に対して,

$$m_3=m_1n_2+m_2n_1, \quad n_3=m_1m_2-n_1n_2$$

から得られる分数 n_3/m_3 を考える. この三つの分数から,

$$A=n_1(m_2n_3+m_3n_2), \quad B=n_2(m_1n_3+m_3n_1), \quad C=n_3(m_1n_2+m_2n_1)$$

をつくり, 公約数があればそれで約したものが三角形の三辺を表す.

6. Carmichael による構成法を紹介する.
和算家以外の構成法として, 著者が海外における Carmichael による構成法 (定理 7) の内容を紹介した.

7. 表計算ソフトの活用によりヘロン三角形の例が簡単に得られることを伝える.
この講座ではパソコンは使用していないが, 表計算ソフトを活用することにより今回学んだ構成公式に変数を入力すると, 簡単にヘロン三角形の三辺の長さと面積を求められることを著者が伝えた.

3.2 受講者の感想

ヘロン三角形を今までに聞いたことがなかったので興味をもって参加していた受講者が多かったようである. 受講者の感想から, 次のことが推測される. 中学生は, ヘロン三角形の構成公式を発見した和算家はすごいと感じたり, 二つのピタゴラス三角形を組み合わせることにより, 直角のないヘロン三角形ができるというアイデアに興味をもっていた. また, 三辺の長さの比が 3 : 4 : 5, 5 : 12 : 13 の場合に直角三角形になることを知識として知っていた受講者は, 今回の講座で三平方の定理を知り, その理由を知ることができてよかったと感じていた. 高校生から一般の多くの受講者は, ヘロン三角形を自分で見つけられて大変楽しかったので, 他の例を考えたくなったり, 思っていたより多くあることに驚いていた. また, 自分たちで何か発見がないか探究していくことを楽しく感じていた.

4 構想授業における表計算ソフトの活用

今までに述べたことを踏まえ, 中学校において授業を行う際の具体的な表計算ソフトの活用について考察する. 前節で述べたように受講者の感想から, 自らヘロン三角形を見出し, 構成公式の存在を知ることにより, 他の例やどれだけ多くあるのかを知りたいという思いをもつことが分かった. そこで, 表計算ソフトを活用することにより, これらのことについて知ることができ, この三角形についてより深く理解することが期待できる.

有元・松岡が構想している中学校における課題学習は, 公立中学校第 3 学年で 2020 年 1 月頃に実施予定である. 1 時間を想定しているため, 和算家による構成公式については触れないが, この点を除けば, ほぼ前節で述べた内容と同様の流れである. 学習の最後に表計算ソフトである Microsoft Excel を活用する予定である. パソコンを 1 台使用し, 生徒に $mn > h^2$ を満たす正の整数値 m, n, h を選ばせ, 教師が入力し, パソコンの画面をスクリーンに表示することにより, ヘロン三角形の三辺の長さ a, b, c と面積 S を提示する. もし, $mn \leq h^2$ のときは, 三辺の長さは「×」と表示するようにしておく . IF 関数の書式は,

$$= \mathrm{IF}(\text{論理式}, \text{真の場合}, \text{偽の場合})$$

であるから, これに従って三辺の長さと面積を表示する式を入力しておけばよい. m, n, h の値をそれぞれ A 列, B 列, C 列に入力し, 三辺の長さをそれぞれ D, E, F 列, 面積を G

列に出力させるとき, 入出力の上端を 5 行目とした場合, セル D5, E5, F5, G5 に次の表 2 のようにあらかじめ入力しておく. これらの式を以下の行にドラッグしてコピーすれば 6 行目以降が得られる.

表 2: 三辺の長さと面積を表示させるために入力しておく式

セル	入力しておく式
D5	=IF(A5∗B5-C5^2>0, B5∗(A5^2+C5^2), ”×”)
E5	=IF(A5*B5-C5^2>0, A5∗(B5^2+C5^2), ”×”)
F5	=IF(A5*B5-C5^2>0, (A5+B5)∗(A5∗B5-C5^2), ”×”)
G5	=IF(A5*B5-C5^2>0, A5∗B5∗C5∗(A5+B5)∗(A5∗B5-C5^2), ”×”)

図 3 は, 5 行目には $m = n = h = 1$ を入力し, 6 行目以降には $m \leq n \leq 4$, $mn > h^2$ となる値を入力した場合の画面である.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ヘロン三角形の三辺の長さと面積								
2	m, n, h は正の整数で mn>h^2 を満たす								
3	入力			三辺 a, b, c の長さ			面積		
4	m	n	h	a	b	c	S		a=n(m^2+h^2)
5	1	1	1	×	×	×	×		b=m(n^2+h^2)
6	1	2	1	4	5	3	6		c=(m+n)(mn-h^2)
7	2	2	1	10	10	12	48		S=mnh(m+n)(mn-h^2)
8	1	3	1	6	10	8	24		
9	2	3	1	15	20	25	150		
10	2	3	2	24	26	10	120		
11	3	3	1	30	30	48	432		
12	3	3	2	39	39	30	540		
13	1	4	1	8	17	15	60		
14	2	4	1	20	34	42	336		
15	2	4	2	32	40	24	384		
16	3	4	1	40	51	77	924		
17	3	4	2	52	60	56	1344		
18	3	4	3	72	75	21	756		
19	4	4	1	68	68	120	1920		
20	4	4	2	80	80	96	3072		
21	4	4	3	100	100	56	2688		

図 3: Excel の画面

本授業のまとめとして, Carmichael の構成法がヘロン三角形をピタゴラス三角形に相似な二つの三角形を組み合わせたものと捉えることによって得られることに言及する. パソコンを使用することにより, 手際よくヘロン三角形の例を提示できるため, Carmichael

の構成法の有効性を実感できる. また, 生徒が自分で求めたヘロン三角形以外の例を知るばかりでなく, その三角形が数多く存在することを実感できる.

5 結語

本研究では, 中学生を含む一般市民を対象とした講座から, ヘロン三角形を題材とした課題学習において, 表計算ソフトを活用することが知的好奇心を満足させる授業につながることが示唆された. しかし, 中学生に授業を行う際には, パソコンを活用する前段階において発問や支援内容を十分に検討して学習内容を理解できるようにしておくことが求められる. 今後は, 本研究をもとに有元・松岡による実践研究を進めていく.

謝辞

本研究に対して御助言をいただきました鳴門教育大学の松岡隆特命教授, また, 愛知サマーセミナーにおいて講座の開催に御協力をいただきました南山大学理工学部の小藤俊幸教授および研究室所属の学生の皆様に御礼を申し上げます.

また, 筆者による RIMS 共同研究 (公開型)「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」における講演に対して, 有益な御助言をいただきました先生方に御礼を申し上げます.

参考文献

[1] 文部科学省 :『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』, p.6, 2017.

[2] 国立教育政策研究所 :『平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書 中学校 数学』, p.8, 2018.

[3] 前掲 [1], pp.174–175.

[4] 日本学術会議 数理科学委員会 数学教育分科会 :『初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言』, p.iii, 2016.

[5] 有元康一，松岡隆 :「中学校におけるヘロン三角形を題材とした課題学習」, 2019 年度数学教育学会 秋季例会予稿集, 2019.

[6] H.Koch, *Number Theory: Algebraic Numbers and Functions*, Graduate Studies in Mathematics, 24, American Mathematical Society, 2000.

[7] R.D.Carmichael, *The Theory of Numbers and Diophantine Analysis*, Dover, 1959, 11-13.

[8] 有元康一 :「ヘロン三角形を探してみよう！ ー江戸時代の和算家 菊池長良と久留島義太による構成公式ー」, 『数学史研究』, 日本数学史学会, 投稿中.

[9] 田中昭太郎 :「整数三角形の新しい作り方」, 『学校数学研究』 第 9 巻 第 2 号, 学校数学研究会 鳴門教育大学, pp.121–127, 2001.

[10] 田中昭太郎 :「整数三角形について」, 『学校数学研究』 第 4 巻 第 1 号, 学校数学研究会 鳴門教育大学, pp.27–39, 1996.

[11] 田中昭太郎 :「整数三角形について・続」, 『学校数学研究』 第 4 巻 第 2 号, 学校数学研究会 鳴門教育大学, pp.31–37, 1996.

[12] 日本学士院：『明治前日本数学史 第二巻』, 日本学士院日本科学史刊行会, 1956.
[13] 青山真大：「和算におけるヘロン三角形の研究」, 『2015 年度 情報理工学部 卒業研究要旨集』, 南山大学.
http://www.st.nanzan-u.ac.jp/info/gr-thesis/2015/koto/pdf/11se008.pdf (2019 年 5 月 8 日最終閲覧)

有元康一: te27212@kurashiki-oky.ed.jp