正数空間上の半群演算と分配法則
(Semigroup operations and distributive law on positive real numbers)

山形大学, 数学・ゲーム工房　髙橋　眞映
Sin-Ei Takahasi
Yamagata University, Laboratory of Mathematics and Games

新潟大学・理学部　三浦　毅
Takeshi Miura
Faculty of Science, Niigata University

茨城大学・理工学研究科　岡　裕和
Hirokazu Oka
Graduate School of Science and Engineering, Ibaraki University

Abstract. これは正数空間上の半群演算と分配法則に関する研究の速報及びその survey である。
(This is a preliminary report and its survey of research on semigroup operations and distributive law on positive real numbers.)

§1 動 機

第一著者は 2010 年山形大学工学部を retire した後、渚勝さんのお世話で熊原啓作先生から放送大学の客員教授に招聘されました。そこで熊原先生のお弟子さんである中筋康夫さんに出会いました。彼は以前から有限型 Jensen の不等式に興味を持っておられたようで、僕が彼の指導教授となりました。

この有限型 Jensen の不等式は半群演算と相性が良く、実際 $(X, *)$ を可換位相半群、$(Y, \circ, \leq)$ を順序可換位相半群としますと、適当な条件のもとに、X の各元 x 及び Y の各元 y にはそれぞれ $*$ 及び $\circ$ に関する正数冪 $x^{(t)_*}$, $y^{(t)_\circ}$ が定義されます。このとき連続写像 $f : X \to Y$ がある種の凸性を持てば、全ての自然数 n と X の元 $x_1, \cdots, x_n$ 及び $t_1 + \cdots + t_n = 1$ を満たす正数 $t_1, \cdots, t_n$ について、有限型抽象 Jensen の不等式

$$f(x_1^{(t_1)_*} * \cdots * x_n^{(t_n)_*}) \leq f(x_1)^{(t_1)_\circ} \circ \cdots \circ f(x_n)^{(t_n)_\circ}$$

が成り立つ事を中筋-髙橋 [6] は示しました。

しかし抽象論ばかりでは埒が明かないので、実数空間 $\mathbf{R}$ 上の半群演算の具体例について専門家の小林羑治さんに相談しました。彼は塚田真さんと東邦大理学部情報科学科に同時赴任した仲で、僕とも良く気が合いました。

実は 1826 年 Abel が $\mathbf{R}$ 上の微分可能な半群演算の同型問題を考察し、後に Hilbert が彼の第五問題の the second part で微分可能条件を連続条件に変えた場合どうなるかを問題にしたようです (cf. [2])。この問題を 1949 年に抽象指数関数を用いて Aczél [1] が初めて解決しました。

実際彼は $\mathbf{R}$ 上の連続な簡約的半群演算はある実数区間上の通常和に同型である事を示しました。中筋さんは院生時代その事を知らずに Aczél とほぼ同じ発想で同等の結果を導いています。

その後 1989 年に Craigen-Páles [4] は抽象対数関数を用いて Aczél と同じ結果を得ています。これは小林さんがその事を知らずにやはり彼らと同じ発想で同等の結果を導いています。更に議論を進め、簡約条件を弱めたり、あるいは Band の世界ではどうかなどを纏めた論文が小林-中筋-髙橋-塚田 [5] です。

さて実数空間 $\mathbf{R}$ 上では少し扱いづらい面もあり、正数空間 $\mathbf{R}_+$ で考える事にしますと、$\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算は必ず通常積 $\cdot$ か通常和 $+$ かシフト和：$x +' y = x + y + 1$ の何れかに位相的半群同型であることが分かります (cf. [5])。これが「何故我々が小学生のとき、足し算、掛け算を習うのか」の所以と思っていますが、多分文明的宇宙人も同じだと思います。

所で上述の抽象 Jensen の不等式の応用として、$(Z, \leq)$ を順序位相空間とし、その上の適当な条件を持つ連続可換半群演算 $*, \circ$ が分配律

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z) \quad (x, y, z \in Z)$$

を満たせば、$x \diamond y = x \circ y \circ (x * y)$ $(x, y \in Z)$ で定義される演算 $\diamond$ に対して、不等式

$$x_1^{(t_1)*} * \cdots * x_n^{(t_n)*} \leq x_1^{(t_1)\diamond} \diamond \cdots \diamond x_n^{(t_n)\diamond} \leq x_1^{(t_1)\circ} \circ \cdots \circ x_n^{(t_n)\circ}$$

が全ての自然数 n と Z の元 $x_1, \cdots, x_n$ 及び $t_1 + \cdots + t_n = 1$ を満たす正数 $t_1, \cdots, t_n$ について成り立つ事を中筋-髙橋は示しました。これはより具体的な相加相乗平均不等式の細分を導きます (cf. [6])。

このように独立した演算でも分配律によって結ばれると色々良い結果を生むことが分かります。また中筋さんの後に放送大学の院生として入って来られた安部静司さんという方がおられますが、彼は実数平面 $\mathbf{R}^2$ 上の

通常のベクトル和が分配する演算の例を作りました。これにはびっくりしました。それで塚田さんと三浦さんの協力を得て、一般的な考察を与えました (cf. [3])。

そこでこれらの事が動機付けとなり、先ず高木啓行さん、三浦毅さん、岡裕和さんの協力を得て $\mathbf{R}$ 上の通常積 (or 通常和) に位相的半群同型な演算が分配する簡約的連続半群演算を決定しました (cf. [8])。しかし残念ながら高木啓行さんは一昨年の 11 月急逝されました。ここに改めて高木さんのご冥福をお祈り致します。

さて以下取扱いの便利さから、ベース空間を通常の位相を持つ正数空間 $\mathbf{R}_+$ として、その上の連続半群演算の分配律関係を考察します。

§2 結果と考察

(I) $\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算が分配する演算に関して次の結果を得ます。

$(\sharp)_{\mathrm{I}}$ 演算 $\star$ を $\mathbf{R}_+$ 上の任意の簡約的連続半群演算とする。このとき $\star$ が分配する $\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算は必ず通常和に位相的半群同型である ([9])。

これについてもう少し詳しく述べましょう。先ず $\star$ を $\mathbf{R}_+$ 上の連続半群演算、φ を $\mathbf{R}_+$ からそれ自身への位相同型写像としますと、

$$x \star_\varphi y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \star \varphi(y)) \quad (x, y \in \mathbf{R}_+)$$

で定義される演算 $\star_\varphi$ はやはり $\mathbf{R}_+$ 上の連続半群演算となり、φ は $(\mathbf{R}_+, \star)$ と $(\mathbf{R}_+, \star_\varphi)$ の間の位相的半群同型写像を与えます。

次に $\mathbf{R}_+$ 上の半群演算 $\star$ が与えられたとき、それが分配する $\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算全体の集合を $\mathcal{D}_\star(\mathbf{R}_+)$ で表す事にしますと、次の結果を得ます。

(i) $\mathcal{D}_{\cdot}(\mathbf{R}_+) = \{+_{x^t} : t \neq 0\}$ and $\mathcal{D}_+(\mathbf{R}_+) = \mathcal{D}_{+'}(\mathbf{R}_+) = \{+_{t^x} : t > 1\}$.

ここに x^t は t を指数に持つ $\mathbf{R}_+$ 上の冪関数を表し、t^x は t を底に持つ $\mathbf{R}_+$ 上の指数関数を表します。勿論これらの関数は $\mathbf{R}_+$ からそれ自身への同相写像となっています。

所でこの (i) の証明は長くしかも複雑ですが、これが分かってしまうと、その応用として、$\mathbf{R}_+$ 上の任意の簡約的連続半群演算 $\star$ に関する集合

$\mathcal{D}_\star(\mathbf{R}_+)$ を比較的簡単に特徴付けることが出来、その特徴付けから冒頭の結果 $(\sharp)_{\mathrm{I}}$ が導かれます。

また (i) に現れる 2 つの集合 $\{+_{x^t} : t \neq 0\}$ 及び $\{+_{t^x} : t > 1\}$ は、明らかに、互いに素となっています。

(II) 次で定義される $\mathbf{R}_+$ 上の自然な 2 つの連続半群演算を考えます：

$$x \times y = e^{\log x \log y} \text{ and } x \diamond y = e^{\log xy + \log x \log y} \ (x, y \in \mathbf{R}_+).$$

これらは $\mathbf{R}$ 上の半群演算に翻訳しますと、前者は実数の通常積であり、後者は動機の欄に登場したシフト和 $x+y+xy$ であります。従って、これらは $\mathbf{R}_+$ 上の非簡約的連続半群演算ですが、このとき次の結果を得ます。

$(\sharp)_{\mathrm{II}}$ 演算 $\star$ を $\times$ または $\diamond$ に位相的半群同型な $\mathbf{R}_+$ 上の任意の演算とする。このとき $\star$ が分配する $\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群は必ず通常積に位相的半群同型である ([7])。

これについてもう少し詳しく述べましょう。各正数 $t > 0$ に対して、

$$p_t(x) = (\operatorname{sgn} x)|x|^t \ (x \in \mathbf{R})$$

と定義しますと、これは $\mathbf{R}$ からそれ自身への同相写像となり、$\mathbf{R}_+$ 上の演算

$$\otimes_t = (+_{\mathbf{R}})_{p_t \circ \log}$$

を定義します。ここに $+_{\mathbf{R}}$ は $\mathbf{R}$ 上の通常和を表します。また $\circ$ は写像の合成を表します。

今 $\star$ を $\mathbf{R}_+$ 上の $\times$ と位相的半群同型な演算とします。このとき次の結果を得ます。

(ii) $\mathcal{D}_\star(\mathbf{R}_+) = \{(\otimes_t)_\varphi : t > 0\}$. 但し φ は $\star = \times_\varphi$ を満たす $\mathbf{R}_+$ からそれ自身への同相写像である。

次に全ての実数 r に対して

$$(f^{-1}\{f(x)f(y)\})^r = f^{-1}\{f(x^r)f(y^r)\} \ (x, y > 0)$$

が成り立つような $\mathbf{R}_+$ からそれ自身への同相写像 f の全体を $Homeo_\diamond(\mathbf{R}_+)$ で表し、更に Napier 数 e に対して、

$$m_e(x) = ex \ (x > 0)$$

と定義します。このとき $\star$ を $\mathbf{R}_+$ 上の $\diamond$ と位相的半群同型な演算としますと、次の結果を得ます。

(iii) $\mathcal{D}_\star(\mathbf{R}_+) = \{\cdot_{f\circ m_e \circ \varphi} : f \in Homeo_\diamond(\mathbf{R}_+)\}$. 但し φ は $\star = \diamond_\varphi$ を満たす $\mathbf{R}_+$ からそれ自身への同相写像である。ここに $\circ$ は写像の合成を表す。

上記の (ii) 及び (iii) から冒頭の結果 $(\sharp)_{\rm II}$ が導かれます。また我々は集合 $Homeo_\diamond(\mathbf{R}_+)$ は空でない事を知っていますが、その正体を未だ掴み切れずにいます。

(III) 以上は $\mathbf{R}_+$ 上のある演算 $\star$ が与えられたとき、$\star$ が分配する演算の調査でしたが、その逆問題として $\star$ を分配する演算の調査もしなければなりません。

また Band に関する分配関係も調査しなければなりません。Band 問題に関して、もう少し詳しく述べますと、順序付けられた位相空間 X 上の 2 項演算 $*$ が順序的連続で $x * x = x$ $(\forall x \in X)$ を満たすとき、 ordered continuous band operation または単に band 演算と言います。実数空間 $\mathbf{R}$ 上の band 演算に関する分類問題は小林-中筋-髙橋-塚田によって、[5] の中で詳しく研究されました。我々はこの結果を利用して、$\mathbf{R}_+$ 上 Band 演算が分配する簡約的連続半群演算の調査及びその逆問題の調査を実行するつもりです。

これらについては、何れも調査の終了後またどこかで発表するつもりです。

謝辞。This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] J. Aczél, Sur les opérations défines pour nombres réels, Bull. Soc. Math. France **76** (1949), 59–64.
[2] J. Aczél, The state of the second part of Hilbert's fifth Problem, Bull. Amer. Math. Soc. **20** (1989), 153–163.
[3] S. Anbe, S.-E. Takahasi, M. Tsukada and T. Miura, Commutative semigroup operations on $\mathbf{R}^2$ compatible with the ordinary additive operation, Linear and Nonlinear Anal. **1** (2015), no. 1, 89–93.
[4] R. Craigen and Z. Páles, The associativity equation revisited, Aeqationes Math. **37** (1989), 306–312.

[5] Y. Kobayashi,Y. Nakasuji, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, Continuous semigroup structures on $\mathbb{R}$, cancellative semigroups and bands, Semigroup Forum **90** (2015), 518–531 (DOI 10.1007/s00233-014-9624-x).

[6] Y. Nakasuji and S.-E. Takahasi, A reconsideration of Jensen's inequality and its applications, J. Inequal. Appl. **2013**, 2013:408, 11 pp. (doi: 10.1186/1029-242X-2013-408))

[7] H. Oka, T. Miura and S.-E. Takahasi, Characterization of semigroup operations distributed by noncancellative semigroup operations on the positive real numbers, preprint.

[8] S.-E. Takahasi, H. Takagi, T. Miura and H. Oka, Semigroup operations distributed by the ordinary multiplication or addition on the real numbers, Publ. Math. Debrecen **91**(2017), no. 3-4, 297–307.

[9] S.-E. Takahasi, T. Miura and H. Oka, Characterization of distributive semigroup operations on the positive real numbers, submitted.