集合関数の凸/凹拡張による分割型非線形積分

Non-Linear Integral Based on Convex/Concave Extension

福田 亮治　(大分大 理工)[*1]
本田あおい　(九工大情報工)[*2]
岡崎 悦明　(ファジィシステム研究所)[*3]

1. はじめに

可測空間上に定義される単調な正値集合関数として定義される非加法的測度はファジィ測度とも呼ばれ，ゲーム理論における協力ゲーム [1] や，経済学における資産選択問題 [2] など，さまざまな分野で利用されている．これらのほとんどは有限集合上の集合関数として扱っているため，大量のデータの処理に不向きな場合が多い．このような問題を解決するひとつの方法として，問題を無限集合上の解析に抽象化して，何らかの近似理論を用いた解析に持ち込むことが考えられる．例えば統計学におけるパラメトリックな手法は，正規分布などの密度関数を持った分布をいくつかのパラメータを用いて表現し，近似的で簡易な解析を可能にしている．このような解析には積分論に基礎を置くさまざまな性質が必要不可欠であるが，非加法的測度は必ずしも加法性が成り立たないので，従来常識として用いてきたこれらの性質が成り立たない場合が多く，初歩的なところから理論の構築を見直す必要がある．こういった解析の一環として，この報告では離散凸解析に由来する凸/凹拡張という非線形の積分を定め，収束定理を中心にその性質を解析する．

非加法的測度に関する積分は数多く提案されており [3, 4, 5, 6]，それぞれ異なる特徴を持つ．我々はこれらを，Choquet 積分に代表される分布関数型と，Pan 積分などの非分布関数型の 2 つのタイプに分けて考える．分布関数とは，可測空間上の非加法的測度 μ と可測関数 f に対して，$\varphi(r)=\mu(\{x : f((x)\geq r\})$ により定まる関数で, Choquet 積分,Sugeno 積分,Shilkret 積分などは，この分布関数を用いて積分が定められている ([3])．Choquet 積分は非加法的測度に関する積分の中で最も代表的なものであるが，対応する測度が加法的であれば，通常の Lebesgue 積分になる．これに対し Sugeno 積分や Shilkret 積分は，積や和を別の演算に置き換えた積分で，Lebesgue 積分を近似するものではない．これらの積分に対する収束定理に関しては，河邊氏により詳細に議論されている ([3])．この報告では，それらの中で単調 (増加/減少) 収束定理に関わる部分を第 2 節にまとめる．

この報告で扱う非分布関数型の積分は，単関数を基本として定義を与える．単関数が $\phi(x)=\sum_k a_k\chi_{A_k}$ で与えられるとき，非加法的測度 μ を用いて，$\sum_k a_k\mu(A_k)$ で与えられる和を**基本和**と呼ぶことにし，この基本和の上限や下限を用いて積分を定める．測度に加法性を仮定しない場合，単関数として同じでも，基本和が異なることが起こるため，基本和は汎関数にならない．したがって σ-加法的測度に基づく積分論のよう

[*1] Oita University, 700 Dan-noharu, Oita-City,870-1192, Japan
e-mail: rfukuda@oia-u.ac.jp
[*2] Kyushu Institute of Technology, 680-4 Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-8502, Japan
e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
[*3] Fuzzy Logic Systems Institute, 680-41, Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-0067, Japan
e-mail: okazaki@flsi.or.jp

に，微小単位に分けた上で解析する手法がとれず，そこに新たな手法が必要となる．3 節では，非分布関数型の積分をいくつか紹介し，単調 (増加/減少) 収束定理を中心にこれらに関わるいくつかの性質について，すでに得られている性質を紹介する．

離散凸解析における，凸/凹 拡張 ([7] 等を参照) は, 有限集合上の非加法的測度に関する非線形積分とも見ることができる．ここでいう拡張とは $\{0,1\}^N \to [0,1]$ $(N \in I\!\!N)$ なる関数を，$[0,1]^N \to [0,1]$ に拡張することをさす．$\{0,1\}^N$ の要素は N 個の要素からなる集合の部分集合とみることができるので，これを定義域とする関数は (通常付加的な条件はあるものの) 非加法的測度と見ることができる．したがって，この拡張は $[0,1]^N$ の要素を $N \to [0,1]$ なる関数と見ることで，測度を拡張した汎関数と考えることができる．この報告では，可測空間上の非加法的測度の拡張に相当する凸/凹拡張を定め，凸/凹性や積分としての基本的性質および，単調 (増加/減少) 収束定理が成り立つための条件を議論する．

一般に，基本和の上限を用いて定義される積分では単調増加収束定理が示されやすく，下限を用いて定義される積分では単調減少収束定理が示されやすい．(3 節で同種の積分についての収束定理について述べる．) この報告で定義する凸/凹拡張はそれぞれ下限/上限を用いた積分である．この凹拡張に対しては，単調増加収束定理の直接証明を与えることができるが，凸拡張の単調減少収束定理には，双対測度を用いた議論により，間接的にのみ証明を与えることができている．一見 上限を下限に置き換えただけの 2 つの積分は，どこかで本質的に異なるところがあるようである．今後の問題として，これらの概念をさらに一般的に抽象化した上で，その本質的な構造を解析する必要があると考えている．

2. 分布関数型積分の収束定理

この節では分布関数型積分の収束定理に関して，河邊氏 [3] のまとめ方に沿ってその概要を述べる．我々の扱う非分布関数型の積分は原始的な構造により定められていることもあり，この節で扱う分布関数型の積分に対して得られている結果ほど充実していない．以下に述べるように，分布関数型の積分関しては，適当な条件のもと単調増加/減少収束定理が成り立っている．

2.1. 準備

分布関数型の積分に関して述べる前に，この報告全体で必要となる用語概念に対して表記を中心に整理する．我々の扱う積分は一般に非加算無限集合上の測度空間で定義されているものとする．以下この報告を通して $(X, \mathcal{B})$ を測度空間とする．測度空間上の非加法的測度を次のように定める．

定義 1 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 $\mu : \mathcal{B} \to \bar{I\!\!R}$ が非加法的測度であるであるとは

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \quad \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

より一般には 2 番目の条件である単調性を仮定しないこともあるが，この報告では標準的にはこれを仮定し，必要があればこの仮定をしないことを明記して議論することにする．

一般に無限集合上での議論をする場合は，測度に関して次の連続性を仮定する必要がある場合もある．

定義 2 $(X,\mathcal{B})$ 上の非加法的測度 μ が，下から (上から) 連続であるとは $A_n, A \in \mathcal{B}$, $A_n \nearrow A$ ($A_n, A \in \mathcal{B}$, $A_n \searrow A$) であるとき，$\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$ ($\mu(A_n) \searrow \mu(A)$) が成り立つこととする.

2.2. 分布関数型積分各種

非加法的測度に関する非線形積分として最も用いられている Choquet 積分は，様々な形で定義可能であるが，通常は次のように定義される.

定義 3 $(X,\mathcal{B})$ 上の非負可測関数 f に対して, 非加法的測度 μ に関する Choquet 積分を次で定義する.

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu := \int_0^\infty \mu\left(\{f \geq r\}\right) dr$$

右辺の被積分関数 $\mu\left(\{f \geq r\}\right)$ を (f の μ に関する) 分布関数と呼ぶ. μ が加法的測度であれば Choquet 積分は，通常の積分と一致する. $\int$ により加法的な場合の積分を表すことにして，詳細部分の記述を略すとおよそ次のような議論でこの性質を示すことができる.

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &\approx \sum_k \frac{k}{2^n}\mu\left(\{f \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})\}\right) \\
&= \sum_k \frac{k}{2^n}\left(\mu\left(\{f \geq \frac{k}{2^n}\}\right) - \mu\left(\{f \geq \frac{k+1}{2^n}\}\right)\right) \\
&= \sum_k \left(\frac{k}{2^n}\mu\left(\{f \geq \frac{k}{2^n}\}\right) - \frac{k-1}{2^n}\mu\left(\{f \geq \frac{k}{2^n}\}\right)\right) \\
&= \sum_k \frac{1}{2^n}\mu\left(\{f \geq \frac{k}{2^n}\}\right) \approx \int^{\mathrm{ch}} f d\mu
\end{aligned}$$

積や和を別の演算に置き換えることにより，次のような積分が定義される.

定義 4 $(X,\mathcal{B})$ 上の非負可測関数 f に対して, Sugeno 積分 ($\int^{\mathrm{su}} f d\mu$), Shilkret 積分 ($\int^{\mathrm{sh}} d\mu$) を次のように定める.

$$\begin{aligned}
\int^{\mathrm{su}} f d\mu &:= \sup_{r>0}\left(r \wedge \mu(f \geq r)\right) \\
\int^{\mathrm{sh}} f d\mu &:= \sup_{r>0}\left(r \cdot \mu(f \geq r)\right)
\end{aligned}$$

2.3. 分布関数型積分の拡張性

加法性のある測度の場合は，可測集合の定義関数の積分は対応する測度の値になる. 後に述べる拡張はこのような意味での集合関数の拡張を意味する. 次の例に示すように Choquet 積分は, この意味での拡張になっている.

例 5 μ を $(X,\mathcal{B})$ 上の非加法的測度, $A \in \mathcal{B}$ とするとき $\int^{\mathrm{ch}} \chi_A d\mu = \mu(A)$ が次のように成り立つ.

$$\begin{aligned}\int^{\mathrm{ch}} \chi_A d\mu &= \int_0^{\infty} \mu(\{x : \chi_A(x) \geq r\})dr \\ &= \int_0^1 \mu(A)dr = \mu(A)\end{aligned}$$

このような拡張性は，一般に成り立つものではなく次の例にあるようにSugeno積分は一般に拡張ではなく，Shilkret 積分は拡張になっている.

例 6 μ を $(X,\mathcal{B})$ 上の非加法的測度, $A \in \mathcal{B}$とするとき，次が成り立つ.

1. $\int^{\mathrm{su}} \chi_A d\mu = \sup_{r\in[0,1]} r \wedge \mu(A) = 1 \wedge \mu(A)$

2. $\int^{\mathrm{sh}} \chi_A d\mu = \sup_{r\in[0,1]} r\mu(A) = \mu(A).$

$\mu(X) \leq 1$ であればSugeno積分も拡張になる

2.4. 分布関数型積分の単調増加/減少収束定理

分布関数型積分の単調増加/減少収束定理は以下のような形でそれぞれ示されている.

定理 7 単調増加収束定理 *([3])*
μ を下から連続である単調測度, 非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 f に対して，$f_n \nearrow f$ を各点で満たすものとする. このとき次が成り立つ.

1. $\int^{ch} f_n d\mu \nearrow \int^{ch} f d\mu$ (Song, Li, Wang)
2. $\int^{su} f_n d\mu \nearrow \int^{sh} f d\mu$ (Lalesca,Adamus, Wang)
3. $\int^{sh} f_n d\mu \nearrow \int^{sh} f d\mu$ (Zhao)

定理 8 単調減少収束定理 *([3])*
μ を単調測度で上から条件連続 *(*減少集合列の測度が有限であれば上からの連続性がある*)* を満たすとする. 非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 f に対して，$f_n \searrow f$ を各点で満たすものとする. このとき次が成り立つ.

1. $\int^{ch} f_1 d\mu < \infty \quad \Rightarrow \int^{ch} f_n d\mu \searrow \int^{ch} f d\mu$ (Wang)
2. $\int^{su} f_n d\mu \searrow \int^{su} f d\mu$ (Wang)
3. $\int^{sh} f_n d\mu \searrow \int^{sh} f d\mu$ (Zhao,Kawabe)

3. 非分布関数型積分の収束定理

この節では過去に議論してきた非分布関数型の積分に関して，収束定理および周辺の基本的な性質について述べる ([8, 9]).

これらの積分は基本和に関する上限や下限を用いて定められているが，測度に加法性がないことから，定義関数の積分が測度になるという意味での拡張にはならない.

3.1. 非分布関数型積分各種

ここで扱う積分を定義するために，単関数の集まりを考える必要がある．単関数に関しては, 基本和 ((係数) × (集合の測度) の和) を積分値と考えたいが，加法性がないために，関数として同じでも値が異なることがある．そこで，単関数は可測集合と係数の対の列としてとらえることにして，単関数の集まりに相当するものとしてつぎの集合を考える.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{\{(a_k, A_k)\}_{k=1}^{\infty} : a_k \in I\!R^+, A_k \in \mathcal{B}\}, \\
\mathcal{S}' &= \{\{(a_k, A_k)\}_{k=1}^{\infty} : a_k \in I\!R^+, A_k \in \mathcal{B}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)\}.
\end{aligned}
$$

集合 $\mathcal{S}$ または $\mathcal{S}'$ の要素 $\phi = \{(a_k, A_k)\}_{k=1}^{\infty}$ も誤解のない限り単関数と呼び，関数としてみるときは $\phi(x)$ のように表すことにする ($\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}(x)$)．また，対応する基本和は次のように表す.

$$
\mu(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k).
$$

これらを用いて,4 種類の積分を次のように定める.

定義 9 ([4, 5, 6])
$(X, \mathcal{B})$ 上の非負可測関数 f に対して, 非加法的測度 μ に関する Pan 積分,SD 積分, 凹積分，凸積分 (Pan integral, super decomposition integral, concave integral, convex integral) を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
\int^{\mathrm{pan}} f d\mu &= \sup\{\mu(\phi) : \phi \in \mathcal{S}', \quad \phi(x) \leq f(x), \quad x \in X\} \\
\int^{\mathrm{sd}} f d\mu &= \inf\{\mu(\phi) : \phi \in \mathcal{S}', \quad \phi(x) \geq f(x), \quad x \in X\} \\
\int^{\mathrm{cav}} f d\mu &= \sup\{\mu(\phi) : \phi \in \mathcal{S}, \quad \phi(x) \leq f(x), \quad x \in X\} \\
\int^{\mathrm{vex}} f d\mu &= \inf\{\mu(\phi) : \phi \in \mathcal{S}, \quad \phi(x) \geq f(x), \quad x \in X\}
\end{aligned}
$$

3.2. 非分布関数型積分の諸性質

節の冒頭でも述べたように，この節で定めた積分はいずれも，拡張にはならない．次の例は，Pan 積分の例であるが，SD 積分, 凸/凹積分も同様ある.

例 10 Lebesgue 測度の Distorted 測度
$X = [0, 1]$, $\mu(A) = |A|^{1/2}$ (Lebesgue 測度の 1/2 乗) とする．このとき μ は劣加法的な測度となる．$\mu(X) = 1$ であり，単調でもあるので，有界な単調測度となる.

$$
\int^{\mathrm{pan}} \chi_A d\mu \geq \sum_{k=1}^{n} \mu([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty.
$$

となるので，$\int^{\mathrm{pan}} \chi_A d\mu = \infty$ である．特に $\int^{\mathrm{pan}} \chi_A d\mu \neq \mu(A)$ が成り立つ．

通常の積分では，全ての関数で積分値が一致すれば，測度が一致する．この性質は，積分が測度の拡張であれば自明なものであるが，Pan 積分ではこの性質も成り立たない．

例 11 (FHO [8])
$X = \{a, b\}$, μ を X 上の非加法的測度, f を X 上の非負関数とする．この μ に対して非加法的測度 μ^* を次で定める．

$$\mu_P(A) = \int^{\mathrm{pan}} \chi_A d\mu.$$

$A = \mu(\{a\})$, $B = \mu(\{b\})$, $C = \mu(\{a, b\})$ と置く．単調測度ならば $A \vee B \leq C$ を満たす．このとき μ_P は次のようになる．

$$\mu_P(\{a\}) = A, \quad \mu_P(\{b\}) = B, \quad \mu_P(\{a, b\}) = C \vee (A + B)$$

$\alpha = f(a)$,$\beta = f(b)$ と置くと,μ, μ_P に関する Pan 積分は，

$$\begin{aligned} \int^{\mathrm{pan}} f d\mu &= (\alpha \wedge \beta)C \vee (A\alpha + B\beta) \\ \int^{\mathrm{pan}} f d\mu_P &= ((\alpha \wedge \beta)(C \vee (A + B))) \vee (A\alpha + B\beta) \end{aligned}$$

$A = B = C = 1$ のとき $C \vee (A + B) = 2$ より，$\mu_P(\{a, b\}) = 2 > C = \mu(\{a, b\})$．よって $\mu_p \neq \mu$. $(\alpha \wedge \beta)C \leq (\alpha \wedge \beta)2 \leq (\alpha + \beta)$ より $\int^{\mathrm{pan}} f d\mu = \int^{\mathrm{pan}} f d\mu_P, \forall f$.

さらに, $\int^{\mathrm{Pan}} f d\mu \neq \int^{\mathrm{Pan}} f d\mu_P$ が成り立つためには， $C < (A + B)$ である必要がある．しかしその場合は

$$(\alpha \wedge \beta)C < (\alpha \wedge \beta)(A + B) \leq (A\alpha + B\beta)$$

であるから，これらの積分が異なることはない．したがって 2 点集合ではこれらの積分が常に同じになっている．

3.3. 非分布関数型積分の単調収束定理

Pan 積分, 凹積分に関する単調増加収束定理として次の定理を得る．

定理 12 *(FHO [8])*
μ を下から連続な非加法的測度とする．非負可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調増加で収束するとき *($f_n \nearrow f$),*

$$\int^{pan} f_n d\mu \nearrow \int^{pan} f d\mu,$$

$$\int^{cav} f_n d\mu \nearrow \int^{cav} f d\mu,$$

同様に，SD 積分, 凸積分の単調減少収束定理に関して次の定理が成り立つ．

定理 13 *(FHO [9])*
μ は上から連続とする．このとき $f_n \downarrow f$,$\int^{sd} f_1 d\mu < +\infty$ であれば次が成り立つ．

$$\int^{sd} f_n \quad d\mu \searrow \int^{sd} f \quad d\mu.$$

また，$\int^{vex} f_1 d\mu < +\infty$ であれば次が成り立つ．

$$\int^{vex} f_n \quad d\mu \searrow \int^{vex} f \quad d\mu.$$

Pan 積分や凹積分に関する単調減少収束定理や，SD 積分や凸積分に関する単調増加収束定理は，限られた場合についてのみ示すことが出来ている．一様収束する場合においては，次のような性質が成り立つ．

命題 1 (FHO [8])
μ が下から連続な非加法的測度，可測関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束する場合，

(a) $\int^{\mathrm{pan}} f_n d\mu \to \int^{\mathrm{pan}} f d\mu$

(b) ある正の数 $\delta > 0$ に対して，$f_n \geq \delta,\ \forall n \in I\!N$ を満たせば，$\int^{\mathrm{cav}} f_n d\mu \to \int^{\mathrm{cav}} f d\mu$

4. 凸/凹拡張と収束定理

離散凸解析における凸拡張 ([7]P52) は，$\{0,1\}^N$ $(N \in I\!N)$ 上の関数を，$[0,1]^N$ 上の関数に拡張するものである．X を N 点からなる有限集合とするとき，$\{0,1\}^N$ の要素は X の部分集合と考えることが出来，$[0,1]^N$ は X 上の $[0,1]$ に値をとる関数と考えられる．したがってこの拡張は，測度から積分を構成することに対応している．この節では，凸/凹拡張を一般の可測空間上の設定に一般化し，その積分としての性質を解析する．

4.1. 離散凸解析における凸拡張

離散凸解析で代表的な拡張である Lovász 拡張は，次に示すように Choquet 積分と見ることも出来る．

例 14 Lovász 拡張
簡単のために,$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の関数 $f : X \to [0,1]$ は $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$ を満たすように変形できるとする．このとき, $f_0 = 0$ と置くと Lovász 拡張 $E^{\mathrm{lov}}(f)$ は

$$E^{\mathrm{lov}}(f) = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1})\mu(\{k\})$$

と表すことができる. 他方 Choquet 積分は

$$
\begin{aligned}
\int^{\mathrm{ch}} f d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) \geq r\}) dr \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{f_{k-1}}^{f_k} \mu(\{x : f(x) \geq r\}) dr \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{f_{k-1}}^{f_k} \mu(\{k, k+1, \cdots, n\}) dr \\
&= \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1}) \mu(\{k, k+1, \cdots, n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_k \mu(\{k, k+1, \cdots, n\}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k \mu(\{k+1, \cdots, n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} f_k \mu(\{k\}) + f_n \mu(\{n\}) = E^{\mathrm{lov}}(f)
\end{aligned}
$$

と変形できるので Lovász 拡張と同じであることがわかる.

次の例も離散凸解析では標準的な拡張あるが，非加法的測度に関する包除積分 ([10]) として表すことができる.

例 15 多重線形拡張
X が有限集合で, $f : X \to [0, 1]$ であるとき, 多重線形拡張 $E^{\mathrm{ml}}(f)$ を次で定める.

$$
E^{\mathrm{ml}}(f) = \sum_{A \subset X} \prod_{x \in A} f(x) \prod_{x \in A^c} (1 - f(x)) \mu(A)
$$

一般には包除積分の interactive operator に相当する I を (通常の積すなわち代数積を用いて) 次で定める.

$$
I(f|B) = \prod_{x \in B} f(x), \quad B \subset X.
$$

これを用いると $E^{\mathrm{ml}}(f)$ は次のように表すことができる.

$$
E^{\mathrm{ml}}(f) = \sum_{A \subset X, A \neq \emptyset} \left(\sum_{B \supset A} (-1)^{|B \setminus A|} \prod_{x \in A} I(f|B) \right) \mu(A)
$$

右辺は代数積に関する (interactive operator を I とした）包除積分である.

4.2. 凸/凹拡張とその諸性質

一般の可測空間に非加法的測度が定義されている場合に, 凸/凹拡張を定義するために，この報告での単関数を復習し，一部表記を追加する.

$\phi = \{(a_k, A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を単関数とする. この単関数の係数の和を次のように表記することにする.

$$
|\phi| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k
$$

ϕ は，$\phi(x) = \sum_k a_k \chi_{A_k}(x)$ を念頭に置いたもので，$\mu(\phi) = \sum_k a_k \mu(A_k)$ と定めている.

定義 16 μ を $(X,\mathcal{B})$ 上の非加法的測度, f を非負可測関数とするとき，凸拡張 $E^{\mathrm{vex}}(f)$, 凹拡張 $E^{\mathrm{cav}}(f)$ を次で定める.

$$E^{\mathrm{cav}}(f)=\sup\{\mu(\phi):\phi(x)\le f(x),\forall x\in X,|\phi|\le 1\},$$

$$E^{\mathrm{vex}}(f)=\inf\{\mu(\phi):\phi(x)\ge f(x),\forall x\in X,|\phi|\le 1\}.$$

この非分布関数型積分も単関数に対する基本和を用いて定義をしている．係数に対して制約があるが，加法的な測度で被積分関数が $[0,1]$-値の関数であれば，Lebesgue 積分 (測度に関する通常の積分) と一致する.

事実 17 凸拡張, 凹拡張は，対応する被積分関数 f が $[0,1]$ に値をとり，μ が加法的な測度であれば，Lebesgue 積分と一致する.

(略証)
凹拡張の場合のみについて述べる.
関数 f に対して, 次に示すように，測度 μ に関する積分 $\int_X fd\mu$ は近似的表現を経て Choquet 積分 $\int^{\mathrm{ch}} fd\mu$ に等しいことがわかる.

$$\begin{aligned}\int_X fd\mu &\approx 0\mu(\{f=0\})+\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\mu\left(\{f\in(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\mu(\{f>\frac{k}{n}\})+1\times\mu\left(\{f>\frac{n}{n}\}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\mu\left(\{f>\frac{k}{n}\}\right)\approx\int^{\mathrm{ch}} fd\mu.\end{aligned}$$

また一般にこれらの積分は次の諸性質を満たす.

命題 2 (a) $E^{\mathrm{cav}}(\chi_A)=E^{\mathrm{vex}}(\chi_A)=\mu(A)$, for any $A\in\mathcal{B}$.

(a’) 任意の $A\in\mathcal{B}$ と正の数 $C>0$ に対して
$E^{\mathrm{cav}}(C\chi_A)\ge C\mu(A)$, $E^{\mathrm{vex}}(C\chi_A)\le C\mu(A)$
が成り立つ．等号は一般に成立しない.

(b) 非負値可測関数 f,g が $f\le g$ であれば，

$$E^{\mathrm{cav}}(f)\le E^{\mathrm{cav}}(g),\quad E^{\mathrm{vex}}(f)\le E^{\mathrm{vex}}(g).$$

(c) $\mu(\{f>0\})=0$ であるとき $E^{\mathrm{cav}}(f)=E^{\mathrm{vex}}(f)=0$.

(d) 非負値可測関数 f,g とスカラー $c\in(0,1)$ に対して次が成り立つ.

$$E^{\mathrm{cav}}(cf+(1-c)g)\ge cE^{\mathrm{cav}}(f)+(1-c)E^{\mathrm{cav}}(g),$$

$$E^{\mathrm{vex}}(cf+(1-c)g)\le cE^{\mathrm{vex}}(f)+(1-c)E^{\mathrm{vex}}(g).$$

凸拡張に対して (c) の性質は，測度に単調性がない場合でも成立する.

4.3. 凸/凹拡張の単調収束定理

凹拡張に対しては，次の単調増加収束定理が成り立つ.

定理 18 非加法的測度 μ が下から連続，非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加である可測関数 f に各点収束するとする. *(*$f_n(x) \nearrow f(x), \quad \forall x.$*)* このとき次が成り立つ.

$$E^{cav}(f_n) \nearrow E^{cav}(f).$$

特に $E^{\mathrm{cav}}(f_n) \nearrow \infty \Leftrightarrow E^{\mathrm{cav}}(f) = \infty$

凸拡張に関する単調減少収束定理は，この定理と同様には示すことができない. この性質を示すために双対性を導入する.

定義 19 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の非加法的測度で $\mu(X) = 1$ を満たすものとする. このとき μ の双対測度 μ^d を次で定める.

$$\mu^d(A) = 1 - \mu(A^c).$$

直ちにわかる性質として，μ が加法性のある測度である場合は $\mu^d = \mu$ を満たす.

一般に，凸/凹拡張に関しては次の性質が成り立つ.

命題 3 μ を特定した凸/凹拡張を $E^{\mathrm{vex}}(f;\mu)$, $E^{\mathrm{cav}}(f;\mu)$ とあらわすとき，次の性質を満たす.

$$E^{\mathrm{vex}}(f;\mu) = 1 - E^{\mathrm{cav}}(f;\mu^d),$$
$$E^{\mathrm{cav}}(f;\mu) = 1 - E^{\mathrm{vex}}(f;\mu^d).$$

この性質を用いると,凸拡張に対して次の単調減少収束定理を得る.

定理 20 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の非加法的測度で $\mu(X) = 1$ を満たすものとする. 非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少である可測関数 f に各点収束するとする. *(*$f_n(x) \searrow f(x), \quad \forall x.$*)* このとき次が成り立つ.

$$E^{vex}(f_n) \searrow E^{vex}(f).$$

一様収束定理については次が成り立つ.

命題 4 μ が下から連続な非加法的測度，可測関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束する場合，次が成り立つ.

(a) $E^{\mathrm{cav}}(f_n) \to E^{\mathrm{cav}}(f)$,

(b) $E^{\mathrm{vex}}(f_n) \to E^{\mathrm{vex}}(f)$.

5. まとめ

この報告では，凸/凹拡張を定義し，拡張であることなどの基本性質や単調収束定理などを示した. この報告で扱う非分布関数型の積分は, 単関数に関する基本和の上限や下限を用いて定めている. 収束定理について概略をまとめると，上限で定めているものについては単調増加収束定理が，下限で定めているものについては単調減少収束定理が，適当な条件の下で成り立っている. それぞれ逆の方向の収束定理は，少なくとも同じアイデアでは示すことができていない. 各積分について，上限で定めている積分

と下限で定めている積分とは，一見双対的な性質を持ち，まったく同様の性質が上下逆転して成り立ちそうに思える．しかし，それぞれの場合を詳しく見ると，上限で定めたものと，下限で定めたものには若干の違いある．特に，凸拡張については，単調減少収束定理を直接証明するに到っておらず，収束定理のための条件も若干違っている．例えば非積分関数は「正の値をとる」という条件があるので，この点で完全に双対的ではない．双対測度を考える場合は関数値が $[0,1]$ に限定しているので, 条件はほぼ対称的な状態になっている．この点が，収束定理に関する上下の性質の違いの根源だと思われるが，まだその構造の解明には到っていない．今後，さらに抽象的な解析を進めることなどで，解明していきたいと考えている．

参考文献

[1] 高萩栄一郎, ファジィ測度とファジィ積分モデルによる総合評価法, 日本経営数学会誌, **31** No.2 (2010), 85-112.

[2] 浅野貴央, ナイト流不確実性と資産選択問題, 岡山大学経済学会雑誌 **46** (2) (2014),107-118.

[3] 河邊淳, A united approach to convergence theorems of distribution-based nonlinear integrals, 日本数学会・2018 年度秋季総合分科会 (於：岡山大学) 実函数論分科会.

[4] Q. Yang, The pan-integral on the fuzzy measure space, Fuzzy Mathematica (in Chinese),**3** (1985),107-114.

[5] Ehud Lehrer, A new integral for capacities, Econ. Theory, **39** (2009),157-176.

[6] R. Mesiar, J. Li and E. Pap, Superdecomposition integrals, Fuzzy Sets and Systems, **259** (2015), 3-11.

[7] 室田一雄, 離散凸解析の考え方 - 最適化における離散と連続化の数理 - , 共立出版, 2007.

[8] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非分布関数型ファジィ積分に関する収束定理, 数理解析研究所講究録, No.2112 (2018), in Print.

[9] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的単調測度による弱凸積分と単調収束定理, 実解析シンポジウム 2018 報告集, 2018.

[10] Aoi Honda and Yoshiaki Okazaki, Generalization of inclusion-exclusion integral for nondiscrete monotone measure space, Fuzzy Sets and Systems, **355**(2019), 42-58.