測度収束関数列の非線形積分の p 次収束性

信州大学工学部　河邊　淳
Jun Kawabe
Faculty of Engineering, Shinshu University

1　はじめに

有限な測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上で定義された非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が非負関数 f に測度収束すれば，定数 $0 < p < \infty$ に対して，その p 乗関数列 $\{f_n^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ も f^p に測度収束する．それゆえ，測度収束する関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に関する抽象 Lebesgue 積分の有界収束定理や Vitali の収束定理などの様々な収束定理から，p 次のモーメントの収束定理

$$\int_X f_n^p \, d\mu \to \int_X f^p \, d\mu$$

が自動的に得られる．しかし，非加法的測度の場合は，それが劣加法性などの非常に強い擬加法的性質をもっていたとしても，一般には f_n が f に測度収束したからといって，f_n^p が f^p に測度収束するとは限らない (例 1 を見よ).

筆者は一連の研究 [6, 8–10] で，Choquet 積分や Sugeno 積分などの非線形積分を非加法的測度の作る空間と非負可測関数が作る空間の直積空間上で定義された非線形の汎関数ととらえ，非線形積分の収束定理は，その汎関数がもつ摂動性を用いて統一的に議論可能であることを実証した．この小論では，非線形積分の収束定理に対するこの統一的理論展開の手法を継承したまま，p 乗関数列の測度収束に関する上記の問題点を解消し，p 次のモーメントの収束定理をすでに得られた研究結果の応用として導くための方法論を提案する.

2　非加法的測度と非線形積分

以下では，$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする．また，$\mathbb{N}$ は自然数全体，$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ は実数全体，$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ は通常の全順序構造と代数構造をもつ拡大実数体とし，積分論を展開する際に便利な規約 $(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$ も仮定する．また，$\inf \emptyset = \infty$ と規約する.

拡大実数 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して，$\max\{a, b\}$ を $a \vee b$ で，$\min\{a, b\}$ を $a \wedge b$ で表し，関数 $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ の上限関数 $f \vee g$，下限関数 $f \wedge g$ を，各 $x \in X$ に対して

$$(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x), \quad (f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$$

で定める．X 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な関数 $f \colon X \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathcal{F}(X)$ で表し, $\mathcal{F}^+(X) := \{f \in \mathcal{F}(X) \colon f \geq 0\}$ とおく．集合 A の定義関数を χ_A，補集合を $A^c := X \setminus A$ で表す．ま

た，X の部分集合の全体を 2^X で表す．

定義 1 集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は次の 2 つの条件

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ （下方有界性）

(ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ （単調性）

を満たすとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．特に，$\mu(X) < \infty$ のとき μ は**有限**といい，その全体を $\mathcal{M}_b(X)$ で表す．

有限な非加法的測度 $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ に対して，その**双対** $\bar{\mu}\colon \mathcal{A} \to [0,\infty)$ を

$$\bar{\mu}(A) := \mu(X) - \mu(A^c), \quad A \in \mathcal{A}$$

で定義する．明らかに $\bar{\bar{\mu}} = \mu$ である．また，μ が加法的ならば $\bar{\mu} = \mu$ となる．

次に紹介する非線形積分は非加法的測度論の応用領域でよく利用され，どれも被積分関数 f の非加法的測度 μ に関する**減少分布関数**

$$G_\mu(f) := \mu(\{f \geq t\}), \quad t \in \mathbb{R}$$

を用いて定義されているので，総称して**分布型非線形積分**とよばれる．

定義 2 $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．

(1) **Choquet 積分** [1, 15]: $\mathrm{Ch}(\mu, f) := \displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})\,dt$

ただし，右辺の積分は Lebesgue 積分または広義 Riemann 積分である．

(2) **Šipoš 積分** [18]: $\mathrm{Si}(\mu, f) := \displaystyle\lim_{P \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\mu(\{f \geq a_i\})$

ただし，Δ^+ は分割 $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \infty)$ 全体に集合の包含関係で定まる順序を導入した有向集合である．

(3) **Sugeno 積分** [14, 20]: $\mathrm{Su}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t \in [0,\infty]} \bigl[t \wedge \mu(\{f \geq t\})\bigr]$

(4) **Shilkret 積分** [17, 23]: $\mathrm{Sh}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t \in [0,\infty]} \bigl[t \cdot \mu(\{f \geq t\})\bigr]$

注意 1 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して $\mathrm{Ch}(\mu, f) = \mathrm{Si}(\mu, f)$ で，μ が σ-加法的ならば，両積分は抽象 Lebesgue 積分と一致する [8, 18, 19]．実際，Šipoš 積分の定義は，非負の単調減少分布関数 $G_\mu(f) = \mu(\{f \geq t\})$ の広義 Riemann 積分の区間の分割を用いた定義に他ならない．にもかかわらず，Choquet 積分に加え，Šipoš 積分も考察の対象とすることには意義がある．なぜなら，Šipoš 積分の理論を探求すれば，ルベーグ積分や広義 Riemann 積分を経由せずに，抽象 Lebesgue 積分と Choquet 積分という線形・非線形の積分論を同時に構築できるからである．

定義 2 で紹介した 4 つの非線形積分を汎関数 $I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ とみなせば，次の性質

(i) 任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$ に対して $I(\mu,0)=0$

(ii) 任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$，$f,g\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f\le g$ ならば $I(\mu,f)\le I(\mu,g)$

を満たすことがわかる．この 2 つの性質を満たす汎関数 I を**積分汎関数**という．

非加法的測度を単調測度，ファジィ測度，容量ということもある．非加法的測度は，測度の σ-加法性をより弱い単調増加性に置き換えた集合関数であり，その積算概念である非線形積分とともに，期待効用理論，決定理論，ゲーム理論，不完全な情報のもとでの数理経済学などの分野に多くの応用をもつ [4,5,12]．非加法的測度と非線形積分に関する詳細な情報は [2,7,13,22] などを見よ．

3　積分汎関数の摂動性と積分収束定理

この章では，非線形積分の収束定理を積分汎関数を用いて統一的に取り扱う際に重要な役割を果たす "摂動性" の概念を関連する諸性質と合わせて紹介する．次の定義における集合関数 μ と関数 f の組 (μ,f) の間の支配関係は，数理経済学の分野でよく用いられる 1 次確率優位性 [11] の一般化である．

定義 3　$\mu,\nu\colon \mathcal{A}\to[0,\infty]$ は集合関数，$f,g\in\mathcal{F}(X)$ とする．各 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\mu(\{f\ge t\})\le\nu(\{g\ge t\})$$

が成り立つとき，(μ,f) は (ν,g) により**支配される**といい，$(\mu,f)\prec(\nu,g)$ とかく．

定義 4　$\varphi(0)=\lim_{t\to+0}\varphi(t)=0$ を満たす関数 $\varphi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ 全体を Φ で表し，Φ に属する関数を**制御関数**とよぶ.

積分汎関数に関する 以下の諸性質は，非線形積分の収束定理を統一的に議論する際に必要となる．詳細は [8–10] を見よ．

定義 5　$I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は積分汎関数とする．

(1) 任意の $\mu,\nu\in\mathcal{M}(X)$ と任意の $f,g\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$(\mu,f)\prec(\nu,g)$ ならば $I(\mu,f)\le I(\nu,g)$ のとき，I は**強単調**という．

(2) 関数 $\theta\colon[0,\infty]^2\to[0,\infty]$ が存在して，任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$，$r\in[0,\infty]$，$A\in\mathcal{A}$ に対して

$$I(\mu,r\chi_A)=\theta(r,\mu(A))$$

のとき，I は**生成的**，θ を I の**生成器**という．

(3) 制御関数族 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0} \subset \Phi$ と $\{\psi_\beta\}_{\beta>0} \subset \Phi$ が存在して，次の摂動条件 (P) を満たすとき，I は**摂動的**という:

(P) 任意の $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$，$\varepsilon \geq 0$，$\delta \geq 0$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ に対して，$\|f\|_\mu < \alpha$，$\nu(X) < \beta$，$(\mu, f) \prec (\nu + \delta, g + \varepsilon)$ ならば

$$I(\mu, f) \leq I(\nu, g) + \varphi_\alpha(\delta) + \psi_\beta(\varepsilon).$$

ただし，$\|f\|_\mu := \inf\{r > 0 \colon \mu(\{f > r\}) = 0\}$ は f の μ-本質的有界定数である．

(4) 制御関数族 $\{\varphi_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2_+} \subset \Phi$ と $\{\psi_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2_+} \subset \Phi$ が存在して，次の摂動条件 (wP) を満たすとき，I は**弱い意味で摂動的**という:

(wP) 任意の $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$，$\varepsilon \geq 0$，$\delta \geq 0$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ に対して，$\|f\| < \alpha$，$\|g\| < \alpha$，$\nu(X) < \beta$，$(\mu, f) \prec (\nu + \delta, g + \varepsilon)$ ならば

$$I(\mu, f) \leq I(\nu, g) + \varphi_{\alpha,\beta}(\delta) + \psi_{\alpha,\beta}(\varepsilon).$$

ただし，$\|f\| := \sup\{|f(x)| \colon x \in X\}$，$\mathbb{R}^2_+ := (0, \infty) \times (0, \infty)$ である．

(5) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ と任意の $c > 0$ に対して

$$I(\mu, f) \leq I(\mu, f \wedge c) + I(\mu, (f - c)^+)$$

のとき，I は**水平劣加法的**という．上式で等号が成り立つときは**水平加法的**という．

(6) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ と任意の $c > 0$ に対して

$$I(\mu, f) \leq I(\mu, \chi_{\{f \leq c\}} f) + I(\mu, \chi_{\{f > c\}} f)$$

のとき，I は**水平劣切断的**という．上式で等号が成り立つときは**水平切断的**という．

(7) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$I(\mu, f) = \sup_{r>0} I(\mu, f \wedge r)$$

のとき，I は**上縁連続**という．

(8) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$I(\mu, f) = \sup_{s>0} I(\mu \wedge s, f)$$

のとき，I は**測度切断的**という．ただし，$\mu \wedge s(A) := \mu(A) \wedge s \ (A \in \mathcal{A})$ である．

注意 2　(1) 積分汎関数 I が摂動的ならば弱い意味でも摂動的である．
(2) 上記以外にも，初等性などの重要な性質があるが，それらの定義は [6,8–10] を見よ．

命題 1 ([8, 10])　積分汎関数 $\mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh} \colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は生成的かつ初等的で，生成器は $\theta(a, b) := a \cdot b$ である．また，積分汎関数 $\mathrm{Su} \colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ も

生成的かつ初等的で，生成器は $\theta(a,b) := a \wedge b$ となる．さらに，上記の 4 種の非線形な積分汎関数はすべて強単調，摂動的 (それゆえ，弱い意味で摂動的)，水平劣切断的，上縁連続，測度切断的で，Ch と Si は水平加法的，Su と Sh は水平劣加法的となる．

Choquet 積分や Sugeno 積分などの非線形積分の収束定理は，積分汎関数を用いて統一的に定式化できる．以下では Fatou の測度収束補題，有界測度収束定理，Vitali の測度収束定理の 3 つを紹介する．そこで，まず非加法的測度の自己連続性の定義と，可測関数列の一様可積分性や一様本質的有界性の定義を復習しておく．

定義 6 ([21, 22])　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．

(1) 任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**上から自己連続**という．

(2) 任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \setminus B_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**下から自己連続**という．

(3) 上から自己連続かつ下から自己連続のとき，μ は**自己連続**という．

定義 7　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f \in \mathcal{F}(X)$，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ とする．$0 < p < \infty$ は定数とする．

(1) 関数 f は

$$\mathrm{Ch}(\mu, |f|^p) < \infty$$

のとき，I に関して $\boldsymbol{p}$ **乗** $\boldsymbol{\mu}$**-可積分**という．特に，$p = 1$ のときは $\boldsymbol{\mu}$**-可積分**という．

(2) 関数族 $\mathcal{F}$ は

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} I\bigl(\mu, \chi_{\{|f|>c\}}|f|^p\bigr) = 0$$

のとき，I に関して**一様** $\boldsymbol{p}$ **乗** $\boldsymbol{\mu}$**-可積分**という．特に，$p = 1$ のときは**一様** $\boldsymbol{\mu}$**-可積分**という．

(3) 関数族 $\mathcal{F}$ は，定数 $c > 0$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\mu(\{f \geq c\}) = 0 \text{ かつ } \mu(\{f \geq -c\}) = \mu(X)$$

のとき，**一様** $\boldsymbol{\mu}$**-本質的有界**という．

以下では，$I \colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数とする．

定理 1 (Fatou の測度収束補題 [10])　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．積分汎関数 I は弱い意味で摂動的，上縁連続，測度切断的とする．

(1) μ が下から自己連続ならば $I(\mu, f) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\mu, f_n)$.

(2) μ が有限で上から自己連続ならば $I(\bar{\mu}, f) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\bar{\mu}, f_n)$.

定理 2 (有界測度収束定理 [6])　$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ は自己連続とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．積分汎関数 I は弱い意味で摂動的で，任意の $r>0$ に対して $I(\mu, r) < \infty$ とする．

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様 μ-本質的有界ならば $I(\mu, f_n) \to I(\mu, f)$.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様 $\bar{\mu}$-本質的有界ならば $I(\bar{\mu}, f_n) \to I(\bar{\mu}, f)$.

定理 3 (Vitali の測度収束定理 [10])　$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ は自己連続とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．積分汎関数 I は弱い意味で摂動的，上縁連続，水平劣切断的で，任意の $r>0$ に対して $I(\mu, r) < \infty$ とする．

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 μ-可積分ならば，f_n と f は I に関して μ-可積分で，$I(\mu, f_n) \to I(\mu, f)$.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 $\bar{\mu}$-可積分ならば，f_n と f は I に関して $\bar{\mu}$-可積分で，$I(\bar{\mu}, f_n) \to I(\bar{\mu}, f)$.

4　p 次モーメントの収束性の問題点

有限な測度空間では，可測関数列の収束に関する Lebesgue の定理と Riesz の定理により，測度収束する関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$ に対して，その p 乗関数列 $\{f_n^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ も測度収束する．しかし，非加法的測度に対しては，たとえそれが劣加法性などの非常に強い擬加法的性質を満たしていたとしても，この事実は一般には成立しない (例 1 における一様自己連続性などの非加法的測度の様々な特性の定義については [7] を見よ)．それゆえ，測度収束する関数列に関する Fatou の測度収束補題，有界測度収束定理，Vitali の測度収束定理などの積分収束定理 $I(\mu, f_n) \to I(\mu, f)$ の直接的な応用として，p 乗関数列の積分収束定理 $I(\mu, f_n^p) \to I(\mu, f^p)$ を導くことはできない．

例 1　$X := [0, \infty)$．$\mathcal{A} := 2^X$ とする．非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to \{0,1\}$ を

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{if } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } A = 0 \end{cases}$$

で定める．$1 < p < \infty$ は定数とする．

(1) μ は劣加法的かつ下から連続である．それゆえ，一様自己連続，自己連続，零加法的，弱零加法的，零連続，擬距離生成的で，性質 (S) と性質 (S_1) を満たす．

(2) μ は順序連続でない．それゆえ，強順序連続でも上から連続でも網羅的でもない．また，Egoroff 条件も満たさない．

(3) $f_n(x) := x + 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$，$f(x) := x$ とおくと，f_n は f に一様収束するので $f_n \xrightarrow{\mu} f$ であるが，$f_n^p \xrightarrow{\mu} f^p$ でない．

5　積分汎関数の諸性質の頑健性と積分収束定理への応用

第 4 章で指摘した困難さは，積分汎関数 $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ の諸性質のべき乗演算に対する頑健性を用いて解消できる．すなわち，定数 $0 < p < \infty$，$0 < q < \infty$ に対して，

$$I_{p,q}(\mu, f) := I(\mu^q, f^p), \quad (\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$$

で新たな積分汎関数 $I_{p,q}$ を定めたとき，I の諸性質が $I_{p,q}$ に遺伝することを利用する．以下では，$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数，$0 < p < \infty$，$0 < q < \infty$ は定数とする．

命題 2　積分汎関数 I が強単調 (生成的，初等的，弱い意味で摂動的，水平劣切断的，上縁連続，測度切断的) ならば $I_{p,q}$ も同じ性質をもつ．

この命題 2 を用いれば，定理 1–3 の応用として，p 次モーメントに関する積分収束定理が直ちに得られる．

定理 4 (Fatou の p 次測度収束補題)　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．積分汎関数 I は弱い意味で摂動的，上縁連続，測度切断的とする．

(1) μ が下から自己連続ならば $I(\mu^q, f^p) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\mu^q, f_n^p)$.

(2) μ が有限で上から自己連続ならば

$$I(\bar{\mu}^q, f^p) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\bar{\mu}^q, f_n^p) \ \text{かつ}\ I((\mu^q)^-, f^p) \leq \liminf_{n\to\infty} I((\mu^q)^-, f_n^p).$$

定理 5 (有界 p 次測度収束定理)　$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ は自己連続とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．積分汎関数 I は弱い意味で摂動的で，任意の $r > 0$ に対して $I(\mu^q, r) < \infty$ とする．

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様 μ-本質的有界ならば $I(\mu^q, f_n^p) \to I(\mu^q, f^p)$.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様 $\bar{\mu}$-本質的有界ならば

$$I(\bar{\mu}^q, f_n^p) \to I(\bar{\mu}^q, f^p) \ \text{かつ}\ I((\mu^q)^-, f_n^p) \to I((\mu^q)^-, f^p).$$

定理 6 (Vitali の p 次測度収束定理)　$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ は自己連続とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．積分汎関数 I は弱い意味で摂動的，上縁連続，水平劣切断的で，任意の $r > 0$ に対して $I(\mu^q, r) < \infty$ とする．

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 p 乗 μ^q-可積分ならば，f_n と f は I に関して p 乗 μ^q-可積分で，$I(\mu^q, f_n^p) \to I(\mu^q, f^p)$.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 p 乗 $\bar{\mu}^q$-可積分ならば，f_n と f は I に関して p 乗 $\bar{\mu}^q$-可積分で，$I(\bar{\mu}^q, f_n^p) \to I(\bar{\mu}^q, f^p)$.

(3) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I に関して一様 p 乗 $(\mu^q)^-$-可積分ならば，f_n と f は I に関して p 乗 $(\mu^q)^-$-可積分で，$I((\mu^q)^-, f_n^p) \to I((\mu^q)^-, f^p)$.

Sugeno 積分は次の**正束保存性**，すなわち，任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ と任意の定数 $c > 0$ に対して，

$$\mathrm{Su}(\mu, f \wedge c) = \mathrm{Su}(\mu, f) \wedge c = \mathrm{Su}(\mu, f) \wedge \mathrm{Su}(\mu, c)$$

を満たすので，より強力な測度収束定理をもつ．

定理 7 (Sugeno 積分の p 次測度収束定理)　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は自己連続とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．このとき $\mathrm{Su}(\mu^q, f_n^p) \to \mathrm{Su}(\mu^q, f^p)$．さらに，$\mu$ が有限ならば，$\mathrm{Su}(\bar{\mu}^q, f_n^p) \to \mathrm{Su}(\bar{\mu}^q, f^p)$ かつ $\mathrm{Su}((\mu^q)^-, f_n^p) \to \mathrm{Su}((\mu^q)^-, f^p)$.

6　自己連続な非加法的測度の例

この小論でも述べてきたように，測度収束する関数列の非線形積分の収束定理は自己連続な非加法的測度に対して成り立つが，その特性をもつ非加法的測度の例は数多くある．

例 2 (自己連続な非加法的測度)　次の非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ はすべて自己連続である．

(1) 劣加法的測度，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$.

(2) 歪測度 $\mu := \theta \circ m$．ただし，$m\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は有限加法的測度，$\theta\colon [0, m(X)] \to [0, \infty]$ は $\varphi(0) = 0$ を満たす連続かつ原点の近傍で狭義単調増加な関数とする．特に

$$\mu(A) := m(A)^2 + \sqrt{m(A)}$$

は劣加法的でも優加法的でも連続でもない歪測度である．

(3) $\inf\{\mu(A)\colon A \in \mathcal{A}, A \ne \emptyset\} > 0$ を満たす非加法的測度．この測度も一般には劣加法的でも優加法的でも連続でもない．

(4) 非加法的測度の応用でよく用いられる次の測度

(a) λ-測度: $r := \mu(X) \le \infty$ とおく．定数 $\lambda \in (-1/r, \infty) \cup \{0\}$ が存在して，互い

に素な $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B)$$

を満たす非加法的測度．この λ-測度は，$\lambda > 0$ のとき優モジュラー，$\lambda < 0$ のとき劣モジュラー，$\lambda = 0$ のときモジュラーとなる．

(b) 最大性測度: 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$.

このとき，$\bar{\mu}$ は最小性測度: $\bar{\mu}(A \cap B) = \bar{\mu}(A) \wedge \bar{\mu}(B)$.

(c) Dubois–Prade の可能性理論 [3] で用いる可能性測度: 任意個の $\{A_\tau\}_{\tau \in \Gamma} \subset 2^X$ に対して $\mu(\bigcup_{\tau \in \Gamma} A_\tau) = \sup_{\tau \in \Gamma} \mu(A_\tau)$.

このとき，$\bar{\mu}$ は必然性測度: $\bar{\mu}(\bigcap_{\tau \in \Gamma} A_\tau) = \inf_{\tau \in \Gamma} \bar{\mu}(A_\tau)$.

(d) Dempster-Shafer の証拠理論 [16] で用いる妥当性測度: $\mu(A) = \sum\limits_{B \cap A \neq \emptyset} p(B)$.

ただし，$p\colon 2^X \to [0,1]$ は $p(\emptyset) = 0$，$\sum_{A \in 2^X} p(A) = 1$ を満たし，基本確率割当という．

このとき，$\bar{\mu}$ は信頼性測度: $\bar{\mu}(A) = \sum\limits_{B \subset A} p(B)$.

注意 3　μ が上から (下から) 自己連続でも，$\bar{\mu}$ は下から (上から) 自己連続とは限らない．実際，可能性測度や妥当性測度は自己連続であるが，その双対測度である必然性測度や信頼性測度は上からも下からも自己連続でない．この事実は，上記の定理 1–7 において，元の測度 μ の双対測度 $\bar{\mu}$ に対する結果は本質的であることを示している．また，この小論の結果を必ずしも非負とは限らない関数の反対称積分に拡張する際にも必要不可欠である．

7　非加法的 Lorentz 空間の完備性

この章では Choquet 積分の p 次モーメントの収束定理の応用として，Choquet 積分が作る Lorentz 空間の完備性を議論する．$0 < p < \infty$，$0 < q \leq \infty$ は定数とする．$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は零加法的，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ が成り立つとする．各 $f \in \mathcal{F}(X)$ に対して，

$$\|f\|_{p,q} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \mu(\{|f|^q \geq t\})^{q/p} dt \right)^{1/q} & \text{if } q \neq \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t \cdot \mu(\{|f| \geq t\})^{1/p} & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

と定め，

$$\mathcal{L}_{p,q}(\mu) := \{f \in \mathcal{F}(X) \colon \|f\|_{p,q} < \infty\},$$

$$\mathcal{N}_{p,q}(\mu) := \{f \in \mathcal{F}(X) \colon \|f\|_{p,q} = 0\}$$

とおく．このとき，商空間 $\mathcal{L}_{p,q}(\mu)/\mathcal{N}_{p,q}(\mu)$ を $L_{p,q}(\mu)$ で表し，**非加法的 Lorentz 空間**という．

注意 4　μ が零連続，すなわち，任意の単調増加な $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，すべての $n \in \mathbb{N}$ で $\mu(N_n) = 0$ ならば $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) = 0$ のときは，$\|f\|_{p,q} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-a.e.

さて，$\|\cdot\|_{p,q}$ で定まる前距離 $d_{p,q}(f,g) := \|f-g\|_{p,q}$ は，Choquet 積分と Shilkret 積分を用いれば

$$d_{p,q}(f,g) := \begin{cases} \mathrm{Ch}(\mu^{q/p}, |f-g|^q)^{1/q} & \text{if } q \neq \infty \\ \mathrm{Sh}(\mu^{1/p}, |f|) & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

と表せるので，非線形積分の p 次モーメントの収束定理の応用として，$L_{p,q}(\mu)$ の完備性に関する次の結果が得られる．

定理 8 (非加法的 Lorentz 空間の完備性)　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．$0 < p < \infty$，$0 < q \le \infty$ は定数とする．μ は下から自己連続かつ下から連続で，さらに擬劣加法的，すなわち，定数 $K \ge 1$ が存在して，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A \cup B) \le K(\mu(A) + \mu(B))$ とする．このとき，$L_{p,q}(\mu)$ は擬ノルム $\|\cdot\|_{p,q}$ に関して完備である．

参考文献

[1] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **5** (1953–54) 131–295.

[2] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[3] D. Dubois, H. Prade, Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.

[4] M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno (eds.), Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[5] M. Grabisch, Set functions, Games and Capacities in Decision Making, Springer, Switzerland, 2016.

[6] J. Kawabe, The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets Syst. **271** (2015) 31–42.

[7] J. Kawabe, Nonadditive measure and nonlinear integral, Sugaku **68** (2016) 266–292 (in Japanese). English translation will be appeared in Sugaku Exposition published by American Mathematical Society.

[8] J. Kawabe, A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals, Fuzzy Sets Syst. **304** (2016) 1–19.
[9] J. Kawabe, The monotone convergence theorems for nonlinear integrals on a topological space, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016) 281–300.
[10] J. Kawabe, The Vitali convergence in measure theorem of nonlinear integrals, submitted for publication.
[11] H. Levy, Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis, Management Sci. **38** (1992) 555–593.
[12] K. G. Nishimura and H. Ozaki, Economics of Pessimism and Optimism, Springer, Japan, 2017.
[13] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.
[14] D. Ralescu and G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980) 562–570.
[15] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986) 255-261.
[16] G. Shafer, A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, 1976.
[17] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math. **33** (1971) 109–116.
[18] J. Šipoš, Integral with respect to a pre-measure, Math. Slovaca **29** (1979) 141–155.
[19] J. Šipoš, Non linear integrals, Math. Slovaca **29** (1979) 257–270.
[20] M. Sugeno, Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Doctoral Thesis, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.
[21] Z. Wang, The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl. **99** (1984) 195–218.
[22] Z. Wang and G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.
[23] R. H. Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition **1** (1981) 55–72 (in Chinese).

Jun Kawabe
Division of Mathematics and Physics
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN
`jkawabe@shinshu-u.ac.jp`