On an αth Order Fractional Radon Transform and a Wave Type of Equation

α階非整数次回ラドン変換と波動方程式への応用

筑波大学大学院システム情報系　藤井克哉
筑波大学大学院数理物質系　木下保
流通経済大学教育支援センター　鈴木俊夫

1　序文

1917年にRadonによって提唱されたラドン変換は，数学のみならず，工学や医学の発展にも大きく寄与してきた積分変換である．特に，Cormackが発明したCT(Computerized Tomography)の原理など画像再構成の問題においては，ラドン変換は中心的な役割を果たしており，昨今でもラドン変換を念頭に置いた様々なCTへの応用が開発されている．数学的な側面では，ラドン変換の像空間の決定などが問題になる．一般の多様体上でのラドン変換の理論はGelfandやHelgasonにより積分幾何学の観点から大きく発展した．[2, 3] 数学と工学の間で共通する重要なラドン変換の問題は，解の存在と一意性，つまりラドン変換された像空間（工学ではサイノグラム空間と呼ぶ）から変換前の関数（画像）を復元できてさらに一意かどうかといった問題が挙げられる．理論的には再生公式の構成がその解答を与え，応用上では，得られた画像の正しさを保証するためにも重要である．（詳しくは [5] を参照）

本稿では最初に古典的なラドン変換の再生公式の導出と応用を述べ，次にα階fractionalラドン変換というものへ一般化する．この変換は主に2種類のものが考えられ，それぞれαにかかる意味が異なる．詳しくは第3章で説明するが，1つ目のα階fractional ラドン変換は，その双対作用素との合成から得られるリースポテンシャルに注目して定式化される．もう一方の変換は，非整数次回フーリエ変換を用いて新たなラドン変換を定めその変換を用いて定義される．本研究では主に，2つ目のα階fractional ラドン変換に注目して，その再生公式を導き，ある波動方程式の解を構成できることについてを議論する．

2　古典的なラドン変換に対する再生公式とその応用

ラドン変換を，$f \in S(\mathbf{R}^n)$ に対して以下で定める．

$$\mathcal{R}f(t,\gamma) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\delta(x\cdot\gamma - t)dx \tag{2.1}$$

ここで $\gamma \in \mathbb{S}^{n-1}$（$\mathbb{S}^{n-1}$ は $n-1$ 次元球面）であり，$\delta(\cdot)$ は 1 次元 Dirac のデルタ関数とする．この積分変換は $\gamma \in \mathbb{S}^{n-1}$ に直交する超平面 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上で $f(x)$ を積分することで定義され，$n=2$ の時は X 線変換と呼ばれており，以下で与えられる．

$$Xf(t,\gamma) = \int_{\mathbf{R}} f(t\gamma + p\gamma^{\perp})dp.$$

次に，ラドン変換 (2.1) の再生公式を導出しよう．ここで n 次元フーリエ変換を以下で与える．

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}$$

このとき，ラドン変換とフーリエ変換との間には次の定理が成り立つことがよく知られている．

定理 2.1 [Fourier Slice Theorem]
$f \in S(\mathbf{R}^n)$ に対して，次が成り立つ．

$$\mathcal{F}[\mathcal{R}f](s,\gamma) = \mathcal{F}[f](s\gamma) \tag{2.2}$$

注意するべきは左辺のフーリエ変換は 1 次元フーリエ変換であり，右辺は n 次元フーリエ変換で定めている．定理 2.1 は工学では投影切断面定理とも呼ばれ，$\mathcal{R}f(t,\gamma)$ の 1 次元フーリエ変換が，$f(x)$ の n 次元フーリエ変換の γ 方向の断面と一致することを示している．またこの定理により，ラドン変換がフーリエ変換のみで定義できることを示しており，この関係性をもとに第 3 章では新たなラドン変換を定義する．

定理 2.2 [古典的なラドン変換の再生公式]
$f \in S(\mathbf{R}^n)$ に対して，$\mathcal{R}f$ から f を再生する公式は以下で与えられる．

$$f = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{R}^*\mathcal{R}f \tag{2.3}$$

再生公式 (2.3) における 2 つの作用素について説明する．先ず $\mathcal{R}^*$ はラドン変換 $\mathcal{R}$ の双対ラドン変換と呼ばれ，

$$\mathcal{R}^*(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(x\cdot\gamma,\gamma)d\sigma(\gamma),$$

で定義される．ここで $d\sigma(\gamma)$ は球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上でのハール測度である．実際，形式的に $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}^*$ は $\varphi \in L^2(\mathbf{R},\mathbb{S}^{n-1})$ に対して，次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\Big(\mathcal{R}f,\varphi\Big)_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbb{S}^{n-1})} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\delta(t-\gamma\cdot x)dx\overline{\varphi(t,\gamma)}dtd\sigma(\gamma)\\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(\gamma\cdot x,\gamma)d\sigma(\gamma)}dx\\
&= \Big(f,\mathcal{R}^*\varphi\Big)_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbb{S}^{n-1})}.
\end{aligned}$$

また，$(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}$ はラプラス作用素と呼ばれ，フーリエ変換を用いて，

$$(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}} f(x) = \mathcal{F}_\xi^*[|\xi|^{n-1}\mathcal{F}[f]](x)$$

と定められる．

証明　ラドン変換と双対ラドン変換の定義より，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{R}(f)(x\cdot\gamma,\gamma)d\sigma(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{isx\cdot\gamma}\hat{f}(s\gamma)dsd\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left\{\int_0^\infty e^{isx\cdot\gamma}\hat{f}(s\gamma)ds + \int_{-\infty}^0 e^{isx\cdot\gamma}\hat{f}(s\gamma)ds\right\}d\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty e^{ix\cdot s\gamma}\hat{f}(s\gamma)dsd\sigma(\gamma).
\end{aligned}$$

$\xi = s\gamma$ と極座標変換して，

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi}|\xi|^{1-n}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

となる．さらに $(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}$ を作用させて，

$$(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = \frac{(2\pi)^n}{\pi}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$$

を得る．故に，

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)(x). \ \square$$

この章の最後に，ラドン変換の再生公式を応用して腹部 CT データから画像を復元する様子を見る．実際の医療現場では，2 次元あるいは 3 次元のラドン変換の再生公式が用いられ，FBP 法（Filtered Back Projection Method）と呼ばれている．現実の CT では全てのの方向から投影データ $(\mathcal{R}f(t,\gamma))$ を得ることは不可能であるので，十分多くの方向数を仮定して復元している．

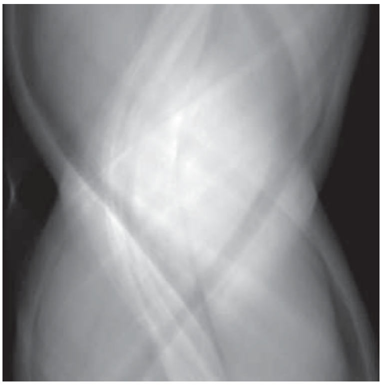

図 1: 投影データ，方向数 512

図 2: 再構成画像

3 α 階 fractional ラドン変換

この章ではラドン変換を一般化した α 階 fractional ラドン変換を導入する．α 階 fractional ラドン変換は大きく分けて 2 つの場合が存在する．1 つは 1960 年に Semyanistyi によって提案されたリースポテンシャルに基づいた定義である．([9] を見よ）まずリースポテンシャル I^α を以下で定める．

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} f * \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

リースポテンシャル I^α は次の性質を持つことが知られている．

- $I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f, \quad I^0 f = f, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
- $\mathcal{F}[I^\alpha f(x)](\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi)$
- $\mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}} f](\xi) = |\xi|^{n-1} \hat{f}(\xi)$

この時，fractional ラドン変換 $\mathcal{R}_{(\alpha)}$ を次で定義する：

$$\mathcal{R}_{(\alpha)} f(t, \gamma) = C_\alpha^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) |t - x \cdot \gamma|^{\alpha-1} dx$$

ここで，

$$\delta(s) = \lim_{\alpha \to 0} k_\alpha(s), \quad k_\alpha(s) = C_\alpha^{-1} |s|^{\alpha-1}, \quad C_\alpha = \frac{2^\alpha \pi^{1/2} \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((1-\alpha)/2)}$$

と定める．$k_\alpha(s)$ をリース核と呼ぶ.（[8] 参照）この Fractional ラドン変換 $\mathcal{R}_{(\alpha)}$ は次の意味で通常のラドン変換の一般化になっている．

$$\mathcal{R}_{(\alpha)}f\Big|_{\alpha=0} = \mathcal{R}f$$

次に Semyanistyi の Fractional ラドン変換の再生公式を構成しよう．そこで，次の双対 Fractional ラドン変換を導入する：

$$\mathcal{R}^*_{(\alpha)}\varphi(x) = C_\alpha^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{S^{n-1}}\varphi(\gamma,t)|t-x\cdot\gamma|^{\alpha-1}d\sigma(\gamma)dt,\quad \varphi(\gamma,t)\in S(\mathbb{S}^{n-1},\mathbf{R})$$

この時，次が成り立つ．

定理 3.1 (Semyanistyi) $f\in S(\mathbf{R}^n)$ に対して，以下が成立する．

$$c_n I^{2\alpha+n-1}f = \mathcal{R}^*_{(\alpha)}\mathcal{R}_{(\alpha)}f,\quad c_n = 2^{n-1}\pi^{n/2-1}\Gamma(n/2).$$

故に，

$$f = \frac{1}{c_n}I^{-2\alpha-n+1}\mathcal{R}^*_{(\alpha)}\mathcal{R}_{(\alpha)}f.$$

この定理における α を 0 に近づけることにより，通常のラドン変換の再生公式となる．

次に 2 つめの fractional ラドン変換を導出する．これはフーリエスライス定理 (2.1) におけるフーリエ変換を一般化して得られる α 階 fractional フーリエ変換を用いるため，まずは α 階 fractional フーリエ変換について簡単に説明しよう．α 階 fractional フーリエ変換とは 1929 年頃から N.Wiener らによって [10] で提案された，実空間と周波数空間を補間する変換であり，現在では量子力学や光学，信号処理等へ応用されている（[6] 参照）．α 階 fractional フーリエ変換 $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ は，以下の積分核を持つ積分変換である．

$$\mathcal{F}^{(\alpha)}[f](\xi) = \int_{\mathbf{R}^n_x}K_\alpha(x,\xi)f(x)dx,$$

ここで，

$$K_\alpha(x,\xi) = \begin{cases}\delta(x-\xi) & (\alpha\in 2\pi\mathbf{Z}),\\ \delta(x+\xi) & (\alpha+\pi\in 2\pi\mathbf{Z}),\\ (C_\alpha)^n\exp\Big\{\dfrac{i(|x|^2+|\xi|^2)}{2\tan\alpha}-\dfrac{ix\cdot\xi}{\sin\alpha}\Big\} & (\text{それ以外}),\end{cases}$$

であり，$C_\alpha = (\frac{e^{i\alpha}}{2\pi i\sin\alpha})^{\frac{1}{2}}$ とする．さらに α 階 fractional フーリエ変換の逆変換は，

$$\mathcal{F}^{(-\alpha)}[\varphi](x)\Big(=\mathcal{F}^{(\alpha)*}[\varphi](x)\Big) = \int_{\mathbf{R}^n_\xi}K_{-\alpha}(\xi,x)\varphi(\xi)d\xi$$

で与えられ，特に $\alpha=\frac{\pi}{2}$ の時は，通常のフーリエ変換と一致する．α 階 fractional フーリエ変換は以下の性質を持つことが知られている．

- (対称性) $K_\alpha(x,\xi) = K_\alpha(\xi,x)$
- (共役性) $K_{-\alpha}(x,\xi) = K^*_\alpha(x,\xi)$
- (加法性) $K_{\alpha+\beta}(x,\xi) = \int_{\mathbf{R}^n_y} K_\alpha(x,y)K_\beta(y,\xi)dy$
- (周期性) $K_0(x,\xi) = K_{2\pi}(x,\xi) = \delta(x-\xi)$
- (一般性) $K_{\pi/2}(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp(-ix\cdot\xi)$

ラドン変換はフーリエスライス定理によって，フーリエ変換を用いて表現できることから，α 階 **fractional ラドン変換**を次で定義する．(Semyanistyi のラドン変換と区別するために上付きの α で書く)

$$\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(t,\gamma) := C_\alpha^{1-n}\mathcal{F}^{(-\alpha)}_{s\to t}[\mathcal{F}^{(\alpha)}_{x\to\xi=s\gamma}[f(x)]](t,\gamma).$$

また α 階 fractional ラドン変換は 1 次元の Dirac のデルタ関数を使って以下のようにも表現することができる．

$$\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(t,\gamma) = \int_{\mathbf{R}^n_x} \delta(t-x\cdot\gamma)f(x)\exp\left\{\frac{i(|x|^2-t^2)}{2\tan\alpha}\right\}dx$$

$f\in S(\mathbf{R}^n)$ の α 階 fractional フーリエ変換 $\mathcal{F}^{(\alpha)}f$ は，$\alpha=0$ の時，関数 f となり，$\alpha=\frac{\pi}{2}$ の時 $\mathcal{F}[f]$ と一致することから，$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ の時，α 階 fractional ラドン変換は f から $\mathcal{R}f$ へのサイノグラム空間を補間する．

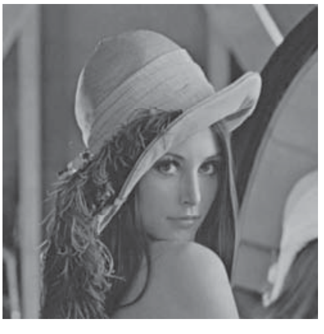

図 3: Sample data, f

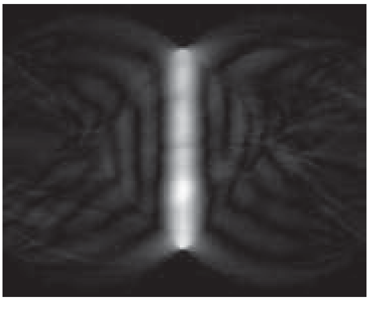

図 4: $\alpha=\frac{1}{3}\pi$, $\mathcal{R}^{(\pi/3)}f$

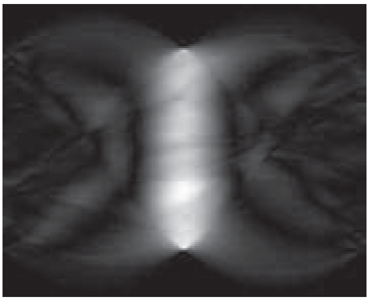

図 5: $\alpha = \frac{5}{12}\pi$, $\mathcal{R}^{(5\pi/12)}$

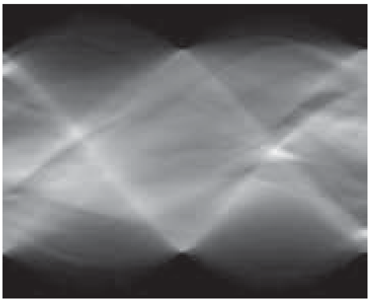

図 6: $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\mathcal{R}f$

次に α 階 fractional ラドン変換の再生公式を構成する．古典的なラドン変換と同様に fractional ラドン変換に対する双対作用素を以下で定義する．定め方は第 2 章の方法と同様である．$\varphi(t,\gamma) \in S(\mathbf{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ に対して，

$$\mathcal{R}^{(\alpha)*}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \exp\left\{\frac{i((x\cdot\gamma)^2 - |x|^2)}{2\tan\alpha}\right\} \varphi(x\cdot\gamma,\gamma)d\sigma(\gamma).$$

また α 階 fractional フーリエ変換に関するラプラス作用素を以下で定める．

$$-\Delta^{(\alpha)} := \mathcal{F}^{(\alpha)*}|\xi|^2\mathcal{F}^{(\alpha)}.$$

（α 階 fractional フーリエ変換に関する擬微分作用素については，[7] を参照）

定理 3.2 [Fractional ラドン変換の再生公式] $n \geq 2$ として，$-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ を満たしているとする．この時，$\mathcal{R}^{(\alpha)}f$ から f を再構成する公式は以下で与えられる．

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi\sin\alpha)^{n-1}}(-\Delta^{(\alpha)})^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{R}^{(\alpha)*}\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(x) \tag{3.2}$$

証明 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} G(\gamma)d\sigma(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} G(-\gamma)d\sigma(\gamma)$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(\alpha)*}\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \exp\left\{\frac{i((\gamma\cdot x)^2 - |x|^2)}{2\tan\alpha}\right\}\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(\gamma\cdot x,\gamma)d\sigma(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \exp\left\{\frac{i((\gamma\cdot x)^2 - |x|^2)}{2\tan\alpha}\right\} \\
&\quad \times C_\alpha^{1-n}C_{-\alpha}\int_{\mathbf{R}_\lambda} \exp\left\{-\frac{i((\gamma\cdot x)^2+\lambda^2)}{2\tan\alpha} + \frac{i(\gamma\cdot x)\lambda}{\sin\alpha}\right\}\mathcal{F}^{(\alpha)}[f](\lambda\gamma)d\lambda d\sigma(\gamma) \\
&= 2C_\alpha^{1-n}C_{-\alpha}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{i(|x|^2+\lambda^2)}{2\tan\alpha} + \frac{i(\lambda\gamma)\cdot x}{\sin\alpha}\right\}\mathcal{F}^{(\alpha)}[f](\lambda\gamma)d\lambda d\sigma(\gamma)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2C_\alpha^{1-n}C_{-\alpha}\int_{\mathbf{R}^n_\zeta}\exp\Big\{-\frac{i(|x|^2+|\zeta|^2)}{2\tan\alpha}+\frac{i\zeta\cdot x}{\sin\alpha}\Big\}\mathcal{F}^{(\alpha)}[f](\zeta)|\zeta|^{1-n}d\zeta \\
&= 2(2\pi\sin\alpha)^{n-1}\mathcal{F}^{(\alpha)*}\Big[\mathcal{F}^{(\alpha)}[f](\zeta)|\zeta|^{1-n}\Big](x).
\end{aligned}
$$

fractional フーリエ変換の再生公式を使って，次を得る．

$$
f=\frac{1}{2(2\pi\sin\alpha)^{n-1}}\mathcal{F}^{(\alpha)*}|\zeta|^{n-1}\mathcal{F}^{(\alpha)}\mathcal{R}^{(\alpha)*}\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(x).\ \square
$$

この章の最後に波動方程式と fractional ラドン変換との関連性を見る．古典的なラドン変換を用いて高次元の波動方程式の解を構成できることがよく知られている．以下は 3 次元の波動方程式に対するコーシー問題である．([4] 参照)

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u-\Delta_x u=0 & \Big((t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^3\Big), \\
u(0,x)=0,\ \partial_t u(0,x)=f(x) & \Big(x\in\mathbf{R}^3\Big).
\end{cases}
$$

この解はラドン変換を用いて，

$$
u(t,x)=-\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^2}\partial_t\mathcal{R}(f)(x\cdot\gamma+t,\gamma)d\sigma(\gamma).
$$

とかける．実際，$u(0,x)$ の $\mathbb{S}^2$ 上の積分は奇関数になるので $u(0,x)=0$ となることがわかる．さらに

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(0,x) &= -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\partial_t^2\mathcal{R}(f)(x\cdot\gamma,\gamma)d\sigma(\gamma) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2}\Delta\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x)=f(x)
\end{aligned}
$$

であることがわかる．このことを念頭において，以下のラプラス作用素を α 階 fractional フーリエ変換に関する擬微分作用素に変更した 3 次元の fractional 型波動方程式に対するコーシー問題：

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\Delta_x^{(\alpha)}u=0 & \Big((t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^3\Big), \\
u(0,x)=0,\ \partial_t u(0,x)=f(x) & \Big(x\in\mathbf{R}^3\Big).
\end{cases}
$$

の解は fractional ラドン変換 $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ を用いて，

$$
u(t,x)=u^{(\alpha)}(t,x)=-\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(x\cdot\gamma+t,\gamma)d\sigma(\gamma),
$$

であることがわかる．ここで

$$
q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)=\exp\{\frac{i(t^2-|x|^2)}{2\tan\alpha}\}(\partial_t-\frac{it}{\tan\alpha}).
$$

であり，$\alpha=\frac{\pi}{2}$ の時 $q_3^{(\frac{\pi}{2})}(x,t,\partial_t)=\partial_t$ となる．この事実を示すために，初めに $u^{(\alpha)}(t,x)$ が fractional 型波動方程式の解であることを示そう．fractional ラドン変換の定義から

$$q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(t,\gamma)=q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)\exp\left\{\frac{-it^2}{2\tan\alpha}\right\}\mathcal{R}\Big(f(x)\exp\left\{\frac{i(|x|^2)}{2\tan\alpha}\right\}\Big)(t,\gamma)$$

を得る．$g(x):=\exp\left\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}f(x)$ と置いて，

$$q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)\Big(\exp\left\{\frac{-it^2}{2\tan\alpha}\right\}\mathcal{R}(g)(t,\gamma)\Big)=\exp\left\{-\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}\partial_t\mathcal{R}(g)(t,\gamma)$$

を得る．故に，

$$\partial_t\mathcal{R}(g)(t,\gamma)=\exp\left\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(t,\gamma).$$

となり以下が得られる．

$$\begin{aligned}u(t,x)&=-\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\partial_t\mathcal{R}(g)(x\cdot\gamma+t,\gamma)d\sigma(\gamma)\\ &=-\frac{1}{8\pi^2}\exp\left\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}\int_{\mathbb{S}^2}q_3^{(\alpha)}(x,t,\partial_t)\mathcal{R}^{(\alpha)}(f)(x\cdot\gamma+t,\gamma)d\sigma(\gamma)\\ &=\exp\left\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}u^{(\alpha)}(t,x)\end{aligned}$$

$u(t,x)=\exp\left\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}u^{(\alpha)}(t,x)$ は次のコーシー問題の解となる：

$$\begin{cases}\partial_t^2u(t,x)-\Delta_xu(t,x)=0 & \Big((t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^3\Big),\\ u(0,x)=0,\ \partial_tu(0,x)=g(x) & \Big(x\in\mathbf{R}^3\Big).\end{cases}$$

一方，

$$-\Delta^{(\alpha)}=-(\sin^2\alpha)\Delta-i(\sin\alpha\cos\alpha)(2x\cdot\nabla_x+n)+(\cos^2\alpha)|x|^2,$$

に注意して，

$$\begin{aligned}\Delta_xu(t,x)&=\Delta_x(\exp\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\}u^{(\alpha)}(t,x))\\ &=\exp\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\}(\Delta_x+\frac{2ix}{\tan\alpha}\cdot\nabla_x+\frac{in}{\tan\alpha}-\frac{|x|^2}{\tan^2\alpha})u^{(\alpha)}(t,x)\\ &=\exp\{\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\}\frac{1}{\sin^2\alpha}\Delta_x^{(\alpha)}u^{(\alpha)}(t,x).\end{aligned}$$

となる．したがって $\partial_t^2u^{(\alpha)}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\Delta_x^{(\alpha)}u^{(\alpha)}=0.$ を得る．次に $u^{(\alpha)}$ が fractional 型のコーシー問題の解となることを確かめよう．

$$u^{(\alpha)}(0,x)=\exp\left\{-\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}u(0,x)=\exp\left\{-\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\right\}\times0=0,$$

であり，

$$u_t^{(\alpha)}(0,x) = \exp\Big\{-\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\Big\}u_t(0,x) = \exp\Big\{-\frac{i|x|^2}{2\tan\alpha}\Big\}g(x) = f(x).$$

がわかるので $u^{(\alpha)}(t,x)$ は以下のコーシー問題の解であることがわかる．

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^{(\alpha)} - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\Delta_x^{(\alpha)} u^{(\alpha)} = 0 & \Big((t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^3\Big), \\ u^{(\alpha)}(0,x) = 0,\ \partial_t u^{(\alpha)}(0,x) = f(x) & \Big(x\in\mathbf{R}^3\Big). \end{cases}$$

4　おわりに

本稿では，古典的なラドン変換の自然な一般化として $S(\mathbf{R},\mathbb{S}^{n-1})$ へ写すような fractional ラドン変換を構成してきたが，[1] では，アフィン空間上における fractional ラドン変換を構成し，その再生公式も得られており，一般次元における fractional 型の波動方程式に対するコーシー問題に対しても解を与えている．

参考文献

[1] K. Fujii, T. Kinoshita, T. Suzuki, On an αth-order fractional Radon transform and a wave type equation *Integral Transform. Spec. Funct.* **29**, 335–351 (2018)

[2] Gelfand IM, Gindikin SG, Graev MI. Selected topics in integral geometry: Transl Math Monogr 220. Providence(RI): Amer Math Soc; 2003.

[3] S. Helgason, The Radon transform. Second edition, Progress in Mathematics, 5. Birkhhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[4] F. Jhon, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.* , **4** (1938), 300-322.

[5] F. Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography (second edition), SIAM (Classics in Applied Mathematics, Vol32), Philadelphia, PA, 2001.

[6] Ozaktas, H. M., Zalevsky, Z., Kutay, M. A.: The Fractional Fourier Transform with Application in Optics and Signal Processing. John Wiley and Sons Chichester (2001)

[7] Pathak, R. S., Prasad, A., Kumar, M.: Fractional Fourier transform of tempered distributions and generalized pseudo-differential operator, *J.Pseudo-Differ.Oper.Appl.*, 239-254 (2012).

[8] Rubin, B, Introduction to Radon transforms. With elements of fractional calculus and harmonic analysis. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 160. Cambridge University Press, New York (2015)

[9] V. I. Semyanistyi, On some integral transformations in Euclidean space [in Russian], Dokl. Akad. Nauk SSSR, **134** (1960), 536-539.

[10] N. Wiener, Hermitian polynomials and Fourier analysis. J. Math. Phys. 8:70-73, 1929.