Some variations of reconstruction formulae

Nao Takemoto
Department of Mathematics, Nara Women's University

1　導入

古典的な連続ウェーブレットの逆変換公式は, アドミッシビリティ・コンディション (admissibility condition) を満たすときに限り与えられていた（文献 [**2**] の第 2 章を参照）。まず 2.1 節から 2.2 節では, 1 次元のウェーブレット変換に関することについて振り返る。そして 2.3 節では, Murenzi によって定義された多次元ウェーブレット変換と, その変換に対応する多次元の古典的な逆変換公式を述べる。

ところが, アドミッシビリティ・コンディションを満たさない場合でも有効である, 新たな 1 次元のウェーブレットの逆変換公式が 2014 年に Lebedeva と Postnikov により与えられた（文献 [**6**] を参照）。第 3 章は, アドミッシビリティ・コンディションを課さない新たな逆変換公式がテーマである。具体的に 3.1 節では, Lebedeva と Postnikov による逆変換公式について述べる。3.2 節では, 彼らの公式の多次元版である定理 3.2.1 について述べる。(文献 [**8**] を参照)。3.3 節では, 多次元版である定理 3.2.1 をクリフォード代数の設定にまで拡張した, 定理 3.3.1 について述べる。(文献 [**7**] を参照)。そして 3.4 節の前半で, ストックウェル変換について振り返った後, 後半で定理 3.2.1 のストックウェル変換版である定理 3.4.2 について述べる。(文献 [**11**] を参照)。

2　連続ウェーブレット変換に対する古典的な逆変換公式

まず, 古典的な連続ウェーブレット変換の逆変換公式について振り返る。この章は, 文献 [**2**] の 2 章を参照。さらに, 2.2 節は, 文献 [**8**], [**9**] を参照。この章では, 常に ψ は $L^2(\mathbb{R})$ に属する関数であると仮定する。

2.1　1 次元のウェーブレット変換に対する逆変換公式

$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に対して, 関数 f のフーリエ変換を,

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

と定義する。また, 逆フーリエ変換は,

$$\check{g}(x) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\ e^{i\xi x}\ d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}$$

とする。

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, 関数 f のウェーブレット変換を,

$$W_\psi f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi^{a,b}(x)}dx$$

と定義する。ここで, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ であり,

$$\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{|a|}\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big), \quad x \in \mathbb{R}$$

とする。すべての a, b に対して, $\|\psi^{a,b}\| = \|\psi\|$ であるように正規化が行われていて, $\|\psi\| = 1$ と仮定する。

$$|W_\psi f(a,b)| \leq \|f\|$$

であることに注意する。

アドミッシビリティ・コンディション (admissibility condition) とは, 関数 ψ が次の条件を満たすことである。

$$C_{\psi,1} := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}\ d\xi\ <\ \infty.$$

このとき関数 f は次のような単位の分解により, そのウェーブレット変換から再構成することができる。

命題 2.1.1

すべての $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}\ \frac{dadb}{|a|} = C_{\psi,1}\langle f, g\rangle. \tag{2.1.2}$$

命題 2.1.1 より, $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し, アドミッシビリティ・コンディションを課した 1 次元のウェーブレット変換の逆変換公式は次のようになる。

$$f(x) = C_{\psi,1}^{-1} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a,b)\psi^{a,b}(x)\ \frac{dadb}{|a|}.$$

2.2 多次元の連続ウェーブレット変換に対する逆変換公式

この節では, n は常に 2 以上の整数であると仮定する。

関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ と $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \rho \in SO(n),\ b \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\psi_{a,\rho,b}(x) = |a|^{-n}\psi(a^{-1}\rho(x-b)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

とおく。ここで, $SO(n)$ は n 次特殊直交群である。

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して, Murenzi によって定義された多次元ウェーブレット変換（文献 [**2**] の 2.6 節, 文献 [**9**] を参照）を

$$W_\psi f(a,\rho,b) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \overline{\psi_{a,\rho,b}\ (x)}\ dx$$

と定義する。Murenzi のアドミッシビリティ・コンディションは以下の通りである。

$$C_{\psi,n} := \int_{\mathbb{R}}\int_{SO(n)} |\hat{\psi}(a\rho \boldsymbol{e})|^2 d\rho\ \frac{da}{|a|} < \infty.$$

ここで, $\boldsymbol{e}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の単位ベクトルを表し, $d\rho$ は $SO(n)$ 上のハール測度である。また, $\hat{\psi}$ は ψ の n 次元フーリエ変換

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)e^{-ix\cdot\xi}\ dx$$

である。$C_{\psi,n}$ は $\boldsymbol{e}$ の取り方によらない。

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して, アドミッシビリティ・コンディションを課した多次元のウェーブレット変換の逆変換公式は次のようになる。

$$f(x) = C_{\psi,n}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{SO(n)}\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a,\rho,b)\psi_{a,\rho,b}(x)\frac{da d\rho db}{|a|}.$$

3 連続ウェーブレット変換に対する新たな逆変換公式

連続ウェーブレット変換に対する新たな逆変換公式が, 2014 年に Lebedeva と Postnikov により与えられた。

3.1 新たな 1 次元の逆変換公式

2014 年に Lebedeva と Postnikov によって与えられた, 次の 1 次元の逆変換公式は $C_{\psi,1} = \infty$ の場合に対してでも有効である（文献 [**6**] を参照）。

定理 3.1.1 (Lebedeva and Postnikov)

$f, \psi, \xi\hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ とし，$\hat{f}, \hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$ とする。supp $\hat{f} \subset [0, \infty)$ を満たす f に対し，$\psi(0) \neq 0$ ならば，ほとんどすべての $b \in \mathbb{R}$ に対し，

$$f(b) = -\frac{i}{2\pi\overline{\psi(0)}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_\psi f(a, b)\ da.$$

3.2　新たな多次元の逆変換公式

定理 3.2.1 は，定理 3.1.1 (Lebedeva and Postnikov) の多次元版を与えた点にオリジナリティがある。(文献 [8] を参照)。極座標表示を与えたり，離散化を与えるという課題はまだ残っているが，フーリエの逆変換公式，回転群，擬微分作用素，ラドン変換などが融合することにより，Lebedeva と Postnikov による新たな逆変換公式が多次元へと拡張された定理である。

定理 3.2.1 (Moritoh and Takemoto)
$f, \psi, |\xi|\hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とし，$f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{SO(n)} |\hat{\psi}(a\rho\boldsymbol{e})|\ d\rho da < \infty \tag{3.2.2}$$

であるとする。任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対し，

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \int_{SO(n)} \overline{\hat{\psi}(a\rho\boldsymbol{e})}\ d\rho da$$

とおく。$C_\psi \neq 0$ ならば，ほとんどすべての $b \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$f(b) = C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{SO(n)} \sqrt{-\Delta_b}\ W_\psi f(a, \rho, b)\ d\rho da$$

が成り立つ。さらに，$\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とし，関数 $D_\psi(p)$ を

$$D_\psi(p) := 2\pi \int_{x\cdot\boldsymbol{e}=p} \int_{SO(n)} \overline{\psi(\rho x)}\ d\rho d\mu, \quad p \in \mathbb{R}$$

と定義する。ここで，$p = 0$ で $D_\psi(p)$ は連続であり，$d\mu$ は超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | x \cdot \boldsymbol{e} = p\}$ 上のルベーグ測度であるとする。このとき，$C_\psi = D_\psi(0)$ が成り立つ。

注. 条件 (3.2.2) と $D_\psi(p)$ の値は，$\boldsymbol{e}$ の選び方によらない。

(証明)

プランシュレルの定理より,

$$\begin{aligned}W_\psi f(a,\rho,b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \overline{\psi_{a,\rho,b}(x)}\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)|a|^{-n}\ \overline{\psi(a^{-1}\rho(x-b))}\ dx \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\rho\xi)}\ e^{ib\cdot\xi}\ d\xi.\end{aligned}$$

ここで, 最後の項は,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|a|^{-n}\psi(a^{-1}\rho(x-b))\ e^{-ix\cdot\xi}\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)e^{-i(b+a\rho^{-1}y)\cdot\xi}\ dy \\ &= e^{-ib\xi}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)e^{-ia\rho^{-1}y\cdot\xi}\ dy \\ &= e^{-ib\xi}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)e^{-iay\cdot\rho\xi}\ dy \\ &= e^{-ib\xi}\hat{\psi}(a\rho\xi)\end{aligned}$$

より従う。$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $|\xi|\hat{\psi}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ より, $a\in\mathbb{R}$ を固定するごとに,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\rho\xi)}\right||\xi|\ d\xi \le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi)|^2\ d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\overline{\hat{\psi}(a\rho\xi)}\xi|^2\ d\xi\right)^{1/2} < \infty.$$

よって擬微分作用素

$$\sqrt{-\Delta_b}\ W_\psi f(a,\rho,b) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\rho\xi)}|\xi|e^{ib\cdot\xi}\ d\xi$$

は定義できる。仮定より, $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, 任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e}\in\mathbb{R}^n$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{SO(n)}|\hat{\psi}(a\rho\boldsymbol{e})|\ d\rho da < \infty$$

が成り立つから, 変数変換 $a' = |\xi|a$ を行うと,

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\xi\int_{\mathbb{R}}\int_{SO(n)}\left|\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\rho\xi)}\xi\right|\ d\rho da$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi)|d\xi\int_{\mathbb{R}}\int_{SO(n)}\left|\hat{\psi}\left(a'\rho\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|\ d\rho da' < \infty.$$

ここで, 積分 $\int\int\cdots d\rho da'$ は ξ によらないことに注意する。

仮定より, $f,\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ であるから, フビニの定理より, ほとんどすべての $b\in\mathbb{R}^n$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{SO(n)}\sqrt{-\Delta_b}\ W_\psi(a,\rho,b)\ d\rho da$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ib\cdot\xi}\, d\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{SO(n)} \overline{\hat{\psi}(a\rho\xi)} |\xi|\, d\rho da$$
$$= f(b) \int_{\mathbb{R}} \int_{SO(n)} \overline{\hat{\psi}(a\rho \boldsymbol{e})}\, d\rho da \ = C_\psi f(b).$$

ここで, $\boldsymbol{e}$ は単位ベクトルである。

最後に $C_\psi = D_\psi(0)$ であることを示す。$\Psi(x) := \int_{SO(n)} \overline{\psi(\rho x)}\, d\rho$ ($|x|$ のみに依存する) とおくと,

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}(a\boldsymbol{e})\, da, \qquad D_\psi(p) = 2\pi \int_{x\cdot\boldsymbol{e}=p} \Psi(x)\, d\mu$$

となる。次の (A), (B), (C), (D) を示すことができれば, 証明は完成する。

(A) $a \in \mathbb{R}$ で $\hat{\Psi}(a\boldsymbol{e}) \in L^1(\mathbb{R})$ である。

(B) $p \in \mathbb{R}$ で $D_\psi(p) \in L^1(\mathbb{R})$ である。

(C) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} D_\psi(p)\, e^{-ipa}\, dp = 2\pi\hat{\Psi}(a\boldsymbol{e})$.

(D) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}(a\boldsymbol{e}) da = D_\psi(0)$.

(A) の証明 : (3.2.2) より,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\Psi}(a\boldsymbol{e})|\, da = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{SO(n)} \overline{\hat{\psi}(a\rho\boldsymbol{e})} d\rho \right| da \le \int_{\mathbb{R}} \int_{SO(n)} |\hat{\psi}(a\rho\boldsymbol{e})| d\rho da < \infty$$

が成り立つ。

(B) の証明 : $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であったから,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |D_\psi(p)|\, dp \ &\le\ 2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{x\cdot\boldsymbol{e}=p} \int_{SO(n)} |\overline{\psi(\rho x)}|\, d\rho d\mu dp \\ &=\ 2\pi \int_{SO(n)} \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\psi(\rho x)}|\, dx d\rho = 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\psi(x)}|\, dx \right) \cdot \left(\int_{SO(n)} 1\, d\rho \right) < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ。

(C) の証明 : ラドン変換に関するプロジェクション・スライスの定理 (projection-slice theorem) (文献 **[5]** を参照) より,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x\cdot\boldsymbol{e}=p} \Psi(x)\, d\mu \right) e^{-ipa}\, dp = \hat{\Psi}(a\boldsymbol{e}).$$

(D) の証明 : (A),(B),(C) と $D_\psi(p)$ の $p=0$ での連続性より, 原点での逆変換公式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}(a\boldsymbol{e})\, da \ &=\ (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} D_\psi(p)\, e^{-ipa}\, dpda \\ &=\ (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{D_\psi}(a)\, da = D_\psi(0). \end{aligned}$$

□

3.3 クリフォード群 (Clifford group), スピン群 (spin group) による拡張

定理 3.2.1 (Moritoh and Takemoto) の新たな逆変換公式を, スピン群に対して述べた結果が定理 3.3.1 である（文献 [**7**] を参照)。定理 3.3.1 は, 定理 3.2.1 (Moritoh and Takemoto) のクリフォード版を与えた点にオリジナリティがある。文献 [**1**] にもクリフォード解析はあるが, 本節の結果は異なる観点からである。

まず, クリフォード, スピン群に関する定義を振り返る。（文献 [**10**] を参照）次の 3 つの性質を満たす $A(\mathbb{R}^n)$ をクリフォード代数 (Clifford algebra) という。

(1) $A(\mathbb{R}^n)$ は単位元 1 を持つ。
(2) $\mathbb{R}^n$ は $A(\mathbb{R}^n)$ の部分空間であり, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $x^2 = -x \cdot x$ である。
(3) $i_1 < \cdots < i_s$, $0 \leq s \leq n$ に対して, 2^n 個の元 $e_{i_1} \ldots e_{i_s}$ は $A(\mathbb{R}^n)$ の基底をなす。($s = 0$ のとき, 積は 1 であると仮定)

このとき, すべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, 等式

$$xy + yx = -2x \cdot y$$

が成り立つ。特に, $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$ $(i \neq j)$ が成り立つ。

$i_1 < \cdots < i_s$ (s は $0 \leq s \leq n$ を満たす偶数) に対し, 元 $e_{i_1} \ldots e_{i_s}$ が基底となるような空間を $A^+(\mathbb{R}^n)$ と書き, 偶クリフォード代数 (even Clifford algebra) と呼ぶ。可逆元全体を $A(\mathbb{R}^n)^\times$ と書く。

クリフォード群 (Clifford group) $G(\mathbb{R}^n)$, 偶クリフォード群 (even Clifford group) $G^+(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ,

$$G(\mathbb{R}^n) = \{\alpha \in A(\mathbb{R}^n)^\times | \ \alpha\mathbb{R}^n\alpha^{-1} = \mathbb{R}^n\}, \ G^+(\mathbb{R}^n) = G(\mathbb{R}^n) \cap A^+(\mathbb{R}^n)$$

と定義する。また, $\alpha \in G(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, x による作用 $\tau(\alpha)$ を

$$\tau(\alpha)(x) := \alpha x \alpha^{-1} \in \mathbb{R}^n$$

と定義する。τ は $G(\mathbb{R}^n)$ から正規直交群 $O(n)$ への準同型写像である。

$A(\mathbb{R}^n)$ の標準的な対合 (canonical involution) を

$$(e_{i_1} \ldots e_{i_s})^* = e_{i_s} \ldots e_{i_1}$$

と定義する。$\alpha \in G^+(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\alpha\alpha^* \in \mathbb{R}^\times$ となり, $\alpha\alpha^*$ を $\nu(a)$ と書く。

スピン群 (spin group) $G^1(\mathbb{R}^n)$ を

$$G^1(\mathbb{R}^n) = \{\alpha \in G^+(\mathbb{R}^n) \mid \nu(a) = 1\}$$

と定義する。$SO(n)$ を $\mathbb{R}^n$ の特殊直交群とすると, 写像 $\tau : G^1(\mathbb{R}^n) \to SO(n)$ は二重被覆 (two-fold covering) である。$n \geq 3$ のとき, $G^1(\mathbb{R}^n)$ は単連結である。

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\alpha \in G^1(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\psi_{a,\alpha,b}(x) = \frac{1}{|a|^n}\psi\Big(\frac{1}{a}\alpha(x-b)\alpha^{-1}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

とおく。$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ のウェーブレット変換を

$$W_\psi f(a,\alpha,b) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi_{a,\alpha,b}(x)}\, dx$$

と定義する。スピン群に置き換えた場合のアドミッシビリティーコンディションは以下の通りである。

$$D_{\psi,n} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{G^1(\mathbb{R}^n)} |\hat{\psi}(a\alpha\boldsymbol{e}\alpha^{-1})|^2\, d\alpha\frac{da}{|a|} < \infty.$$

ここで $\boldsymbol{e}$ は $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルであり, $d\alpha$ を $G^1(\mathbb{R}^n)$ のハール測度とする。$D_{\psi,n}$ の値は $\boldsymbol{e}$ のとり方によらない。

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して, このようなウェーブレット変換に対する, アドミッシビリティ・コンディションを課した逆変換公式は, 以下の通りである。

$$f(x) = D_{\psi,n}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{G^1(\mathbb{R}^n)} W_\psi f(a,\alpha,b)\psi_{a,\alpha,b}(x)\ \frac{dad\alpha db}{|a|}.$$

次の定理は, 定理 3.2.1 を拡張した定理である。

定理 3.3.1

$f,\ \psi,\ |\xi|\hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とし, $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{G^1(\mathbb{R}^n)} |\hat{\psi}(a\ \alpha\boldsymbol{e}\alpha^{-1})|\, d\alpha da < \infty$$

が成り立つとする。単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対し,

$$A_\psi := \int_{\mathbb{R}}\int_{G^1(\mathbb{R}^n)} \overline{\hat{\psi}(a\ \alpha\boldsymbol{e}\alpha^{-1})}\, d\alpha da$$

とおく。$A_\psi \neq 0$ のとき, ほとんどすべての $b \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f(b) = A_\psi^{-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{G^1(\mathbb{R}^n)} \sqrt{-\Delta_b}\, W_\psi f(a,\alpha,b)\, d\alpha da$$

が成り立つ。さらに, $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とすると, 関数 $B_\psi(p)$ は $p=0$ で連続で,

$$B_\psi(p) := 2\pi\int_{x\cdot\boldsymbol{e}=p}\int_{G^1(\mathbb{R}^n)} \overline{\psi(\alpha x\alpha^{-1})}\, d\alpha d\mu, \quad p \in \mathbb{R}$$

と定義する。ここで $d\mu$ は超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | x\cdot\boldsymbol{e} = p\}$ 上のルベーグ測度であるとする。 このとき, $A_\psi = B_\psi(0)$ が成り立つ。

3.4　ストックウェル変換 (Stockwell transform)

ストックウェル変換 (Stockwell transform) は, ガボール変換とウェーブレット変換のメリットを合わせたものである。この節で登場する, ガボール, ストックウェル変換に関する事項および定理 3.4.1 は文献 **[3]** を参照。定理 3.4.2 は, 定理 3.1.1 (Lebedeva and Postnikov) のストックウェル変換版を与えた点にオリジナリティがある。(文献 **[11]** を参照)。

この節を通して, $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ であるとする。
$f \in L^2(\mathbb{R})$, $b, \xi \in \mathbb{R}$ に対して, ガボール変換を

$$(G_\psi f)(b,\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, \overline{\psi(x-b)}\, dx$$

と定義する。
また $f \in L^2(\mathbb{R})$, $b, \xi \in \mathbb{R}$ に対して, ストックウェル変換 (Stockwell transform) を

$$(S_\psi f)(b,\xi) := |\xi| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, \overline{\psi\big(\xi(x-b)\big)}\, dx$$

と定義する。
$b, \xi \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\psi_{b,\xi} = |\xi| e^{ix\xi} \psi(\xi(x-b))$$

とおく。

ストックウェル変換に対するアドミッシビリティ・コンディションは以下の通りである。

$$E_{\psi,1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi-1)|^2}{|\xi|}\, d\xi < \infty.$$

ストックウェル変換に対しても, アドミッシビリティ・コンディションを課した逆変換公式が存在することが知られている。(文献 **[3]** を参照)。

定理 3.4.1 (Du, Wong and Zhu)
$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ において, $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ が成り立ち, $E_{\psi,1} < \infty$ を満たすとする。このとき, すべての $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し,

$$f(x) = E_{\psi,1}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (S_\psi f)(b,\xi)\ \psi_{b,\xi}(x)\ \frac{db d\xi}{|\xi|}$$

が成り立つ。

次の定理は, 定理 3.2.1 (Lebedeva and Postnikov) のストックウェル変換版である。

定理 3.4.2
$f, \psi, \xi\hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}),\ \hat{f}, \hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$ とする。$\mathrm{supp}\ \hat{f} \subset [0,\infty)$ を満たす函数 f に対して $\psi(0) \neq 0$ とすると, ほとんどすべての $b \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(b) = -\frac{i}{2\pi\overline{\psi(0)}}\int_{\mathbb{R}} \xi^{-2} e^{i\xi b}\Big(\frac{\partial}{\partial b} + i\xi\Big)(S_\psi f)(b,\xi)\ d\xi.$$

(証明)
$\psi_{b,\xi} = |\xi| e^{ix\xi}\psi\big(\xi(x-b)\big)$ とおくと,

$$(S_\psi f)(b,\xi) = \langle f, \psi_{b,\xi}\rangle.$$

プランシュレルの定理より,

$$(S_\psi f)(b,\xi) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi_{b,\xi}}(\omega)}\ d\omega = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega-\xi)b}\hat{f}(\omega)\ \overline{\hat{\psi}(\frac{\omega-\xi}{\xi})}\ d\omega$$

ここで最後の項は,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_{b,\xi}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} |\xi| e^{ix\xi}\psi\big(\xi(x-b)\big)e^{-i\omega x}\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{x'}{\xi}+b\right)\xi}\psi(x')e^{-i\omega\left(\frac{x'}{\xi}+b\right)}\ dx' \\
&= e^{-i(\omega-\xi)b}\int_{\mathbb{R}} \psi(x')e^{-i\left(\frac{\omega-\xi}{\xi}\right)x'}\ dx' \\
&= e^{-i(\omega-\xi)b}\ \hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)
\end{aligned}$$

より従う。$a \in \mathbb{R}$ を固定するごとに, $f,\ \psi,\ \xi\hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ より,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\Big|\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\ (\omega-\xi)\Big|\ d\omega &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\omega)|^2\ d\omega\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int_{\mathbb{R}}\Big|\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\Big|^2|\omega-\xi|^2\ d\omega\Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}}\Big|\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\Big|^2|\omega|^2\ d\omega + \int_{\mathbb{R}}\Big|\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\Big|^2|\xi|^2\ d\omega\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C'\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big\{\|\omega\hat{\psi}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big\} < \infty
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって,

$$\frac{\partial}{\partial b}(S_\psi f)(b,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\ \overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\ (\omega-\xi)\ e^{i(\omega-\xi)b}\ d\omega.$$

$\hat{f}, \hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$ より,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} d\omega \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\omega\xi^{-2}\right| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| d\omega \int_{\mathbb{R}} \left|\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega}{\xi}-1\Big)}\omega\xi^{-2}\right| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| d\omega \int_{\mathbb{R}} \left|\overline{\hat{\psi}(\xi')}\right| d\xi' < \infty\end{aligned}$$

であるから, フビニの定理と supp $\hat{f} \subset [0,\infty)$ より,

$$\begin{aligned}-i\int_{\mathbb{R}} \xi^{-2}e^{i\xi b}\Big(\frac{\partial}{\partial b}+i\xi\Big)(S_\psi f)(b,\xi)\, d\xi &= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \omega\xi^{-2}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\, e^{ib\omega}\, d\omega\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{ib\omega}\, d\omega \int_{\mathbb{R}} \omega\xi^{-2}\overline{\hat{\psi}\Big(\frac{\omega-\xi}{\xi}\Big)}\, d\xi \\ &= f(b)\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\psi}(\xi')}\, d\xi' \\ &= 2\pi\, \overline{\psi(0)} f(b).\end{aligned}$$

□

References

[1] F. Brackx and F. Sommen, *Clifford-Hermite wavelets in Euclidean space*, J. Fourier Anal. Appl. 299-310.

[2] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[3] J. Du, M. W. Wong and H. Zhu, *Continuous and Discrete Inversion Formulas for the Stockwell Transform*, Integral Transforms and Special Functions Vol. 18, No 8, August 2007, 537-543.

[4] A. Grossmann and J. Morlet, *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM J. Math. Anal. (1984), 15, pp. 723-736.

[5] S. Helgason, *The Radon transform. Second edition*, Progress in Mathematics 5, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[6] E. A. Lebedeva and E. B. Postnikov, *On alternative wavelet reconstruction formula: a case study of approximate wavelets*, R. Soc. Open Sci. **1** (2014), October, 140124, 5pp.

[7] S. Moritoh and N. Takemoto, *Further research on wavelet inversion formula*, to appear in Annual Report of Graduate School of Human Culture, Nara Women's Univ, 2018.

[8] S. Moritoh and N. Takemoto, *Some variations on wavelet inversion formula*, submitted.

[9] R. Murenzi, *Wavelet transforms associated to the n-dimensional Euclidean group with dilations: signal in more than one dimension*, Wavelets (Marseille, 1987), 239-246, Inverse Probl. Theoret. Imaging, Springer, Berlin, 1989.

[10] G. Shimura, *Arithmetic of quadratic forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[11] N. Takemoto, *Wavelet and Stockwell inversion formulae*, to appear in Annual Report of Graduate School of Human Culture, Nara Women's Univ, 2019.