群的フュージョンを持つ VOA と二次形式
VOAs with group-like fusion and quadratic forms

東京女子大学 現代教養学部 数理科学科 山内 博
Hiroshi Yamauchi
Department of Mathematics, ToKyo Woman's Christian University

講演日：2018 年 12 月 10 日

概 要

本稿では一橋大学名誉教授の山田裕理氏との共同研究 [YY18] のあらましを解説する。

1 可換群上の二次形式

定義 1. A をアーベル群とする。写像 $q : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が以下の条件を満たすとき，群 A 上の**二次形式**という。
(1) $\alpha, \beta \in A$ に対し，$b(\alpha, \beta) := q(\alpha+\beta) - q(\alpha) - q(\beta) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は A 上の双線形形式を定める。
(2) $\alpha \in A$, $n \in \mathbb{Z}$ について，$q(n\alpha) = n^2 q(\alpha)$ が成り立つ[1]。

部分集合 $B \subset A$ に対し，その直交補を $B^\perp := \{\alpha \in A \mid b(\alpha, B) = 0\}$ で定める。$A^\perp = 0$ であるとき，二次形式 q は A 上非退化であるという。

$q(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in A$ を**等方的**といい，また部分集合 $B \subset A$ が $q(B) = 0$ を満たすとき，**全等方的**であるという。B が全等方的部分群ならば $B \subset B^\perp$ であるが，一般に逆は成り立たないことに注意する。

例 2. L を偶格子，$L^* \subset \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ をその双対格子とするとき，L^*/L 上に $q(\lambda+L) := (\lambda \,|\, \lambda)/2 + \mathbb{Z}$ として $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-値を定めると，$\mathrm{Disc}(L) := (L^*/L, q)$ は二次形式を伴う群の例を与える。$\mathrm{Disc}(L)$ を L に付随する**判別子形式** (discriminant form) という[2]。

2 よい VOA と二次形式

定義 3. V を頂点作用素代数 (VOA)，$\mathrm{Rep}(V)$ を有限生成 V 加群がなす表現圏とする。
(1) $\mathrm{Rep}(V)$ にフュージョン積の構造が備わっており，$\mathrm{Rep}(V)$ がフュージョン積に関してモジュラーテンソル圏 (Modular Tensor Category, 略して MTC) となるとき，V を**よい VOA** と呼ぶ[3]。

---

[1] この条件は $q(-\alpha) = q(\alpha)$ に置き換えてもよい。
[2] discriminant は判別式と訳されるが，この訳語は私が勝手に作ったものである。
[3] 組紐構造やツイストは VOA の場合には標準的に定まるものを考える。V を単純，自己双対，有理型，C_2 有限，CFT 型な VOA のとき，V は本稿の意味でよい VOA になることが知られている (cf. [H08])。

(2) V をよい VOA とし，$\mathrm{Irr}(V)$ で既約 V 加群の同型類全体の集合を表す[4]。このとき M, $N \in \mathrm{Irr}(V)$ に対し[5]，フュージョン積

$$M \underset{V}{\boxtimes} N = \bigoplus_{L \in \mathrm{Irr}(V)} n_{M,N}^{L}\, L \qquad (n_{M,N}^{L} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{2.1}$$

が定まっている。(ここで $n_{M,N}^{L}$ は $M \boxtimes_V N$ における L の重複度 $[M \boxtimes_V N : L]$ である。) $\mathrm{Irr}(V)$ の元を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群に (2.1) で代数構造を導入したものを V に付随する **Verlinde 代数**もしくは**フュージョン代数**といい，$\mathscr{F}(V)$ で表す。これはテンソル圏 $\mathrm{Rep}(V)$ の Grothendieck 環である。Verlinde 代数は有限階数可換結合代数である。

(3) $A \in \mathrm{Irr}(V)$ が任意の $M \in \mathrm{Irr}(V)$ に対し $A \boxtimes M \in \mathrm{Irr}(V)$ を満たすとき，A を**単純カレント**という。単純カレント加群の同型類全体のなす集合を $\mathrm{Irr}(V)^{\circ}$ で表す。[LY08] より，$\mathrm{Irr}(V)^{\circ}$ は $\mathscr{F}(V)$ における乗法的部分群をなす[6]。

(4) $\mathrm{Irr}(V)^{\circ} = \mathrm{Irr}(V)$ となるとき，V は**群的フュージョン**を持つという。

(5) $M \in \mathrm{Irr}(V)$ に対し，$h(M) \in \mathbb{Q}$ でそのトップウェイトを表す。$A \in \mathrm{Irr}(V)^{\circ}$, $M \in \mathrm{Irr}(V)$ として写像 $q_V : \mathrm{Irr}(V) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ および $b_V : \mathrm{Irr}(V)^{\circ} \times \mathrm{Irr}(V) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ をそれぞれ以下で定める。

$$q_V(M) := h(M) + \mathbb{Z}, \qquad b_V(A, M) := q_V(A \boxtimes M) - q_V(A) - q_V(M).$$

次の命題は VOA の単純カレント拡大を考えた際，誘導加群の構造を決めるのに用いられる。

命題 4 ([YY18])**.** 以下が成り立つ。
(1) A, $B \in \mathrm{Irr}(V)^{\circ}$, $M \in \mathrm{Irr}(V) \Longrightarrow b_V(A \boxtimes B, M) = b_V(A, M) + b_V(B, M)$.
(2) A, $B \in \mathrm{Irr}(V)^{\circ}$, $M \in \mathrm{Irr}(V) \Longrightarrow b_V(A, B \boxtimes M) = b_V(A, B) + b_V(A, M)$.
(3) $0 \neq \forall A \in \mathrm{Irr}(V)^{\circ}\ \exists M \in \mathrm{Irr}(V)$ s.t. $b_V(A, M) \neq 0$.

上の命題より，V が群的フュージョンを持つならば，$(\mathrm{Irr}(V)^{\circ}, q_V)$ は非退化な二次形式を伴う可換群となる。

命題 5 ([EMS15, YY18])**.**
(1) q_V は $\mathrm{Irr}(V)^{\circ}$ 上に b_V を付随する双線形形式とする二次形式を定める。
(2) $\mathrm{Irr}(V)^{\circ} = \mathrm{Irr}(V)$ のとき，b_V は $\mathrm{Irr}(V)^{\circ}$ 上非退化となる。

例 6. L を正定値偶格子とし，V_L を付随する格子頂点作用素代数とするとき，V_L は群的フュージョンを持ち，$(\mathrm{Irr}(V_L), q_{V_L}) \cong \mathrm{Disc}(L)$ が成り立つ。

3 二次形式と双対性

[YY18] では次の設定を考えた。

設定 1. V および W は以下を満たすよい VOA とする。
(1) V は群的フュージョンを持つ。抽象群として $\mathrm{Irr}(V)^{\circ} \cong C$ とし，同型 $C \ni \alpha \longmapsto V^{\alpha} \in \mathrm{Irr}(V)$ をとり，$\mathrm{Irr}(V) = \{V^{\alpha} \mid \alpha \in C\}$ と表す。ここで C の積は加法的に表す。$\alpha \in C$ に対して

[4]今回の設定から，自動的に $|\mathrm{Irr}(V)| < \infty$ となる。
[5]加群 M とそれが定める同型類は厳密には区別して表記する必要があるが，ここでは意図的に混同させている。
[6]$\mathrm{Irr}(V)^{\circ}$ の単位元は V であり，また $A \in \mathrm{Irr}(V)^{\circ}$ に対し，その逆元は双対 A^{*} で与えられる。

$q_V(\alpha) = q_V(V^\alpha)$ と定め，(C, q_V) を二次形式を伴う群とみなす。
(2) ある部分群 $D < C$ と単射準同型 $D \ni \alpha \longmapsto W^\alpha \in \mathrm{Irr}(W)^\circ$ があり，二次形式を伴う群として $(\{W^\alpha \mid \alpha \in D\}, q_W) \cong (D, -q_V)$ が成り立つ[7]。
(3) $0 \neq \alpha \in D$ について $h(V^\alpha) > 0$ かつ $h(W^\alpha) > 0$ が成り立つ[8]。

命題 7 ([EMS15, CKM17, YY18])**.** V および W を設定 1 の条件を満たす VOA とするとき，

$$U = \bigoplus_{\alpha \in D} V^\alpha \otimes W^\alpha$$

には $V \otimes W$ の単純カレント拡大として単純な VOA 構造が一意に入る。さらに V および W は U における互いの交換団部分代数をなす。

上記の設定の下で，[YY18] では，U 加群のなす圏 $\mathrm{Rep}(U)$ から得られるフュージョン代数 $\mathscr{F}(U)$ と W 加群のなす圏 $\mathrm{Rep}(W)$ から得られるフュージョン代数 $\mathscr{F}(W)$ の構造を相互に記述する結果を得た。すなわち，$(\mathrm{Irr}(V)^\circ, q_V)$ を既知として，以下の 2 点を記述する理論を得た。

1. フュージョン代数の基底である $\mathrm{Irr}(W)$ および $\mathrm{Irr}(U)$ を相互に決定する。

2. $\mathscr{F}(W)$ および $\mathscr{F}(U)$ の積構造に関する構造定数を相互に決定する。

1. については，$\mathrm{Irr}(W) \rightsquigarrow \mathrm{Irr}(U)$ は容易である。設定より，U は $V \otimes W$ の単純カレント拡大であるから，V の表現および W の表現を既知とした場合，そこから U の表現を決定する一般論 [Y03] がすでに整備されており，誘導加群を考えることでツイスト加群を含め，すべての既約 U 加群について構成・記述でき，さらにその間のフュージョン規則も完全に記述可能である。問題は $\mathrm{Irr}(U) \rightsquigarrow \mathrm{Irr}(W)$ であるが，誘導 $\mathrm{Irr}(W) \rightsquigarrow \mathrm{Irr}(U)$ の様子が分かっているので，$\mathrm{Irr}(U)$ を既知とした場合，既約 U 加群の部分加群としてすべての既約 W 加群が現れることが分かる。あとはそれらがいつ同型になるかを決定できればよいが，こちらは $\mathrm{Irr}(W)^\circ$ および $\mathrm{Irr}(U)^\circ$ の部分群を用いることで解決した。$\alpha \in D^\perp$ のとき，$V^\alpha \otimes W$ から誘導される既約加群

$$U^\alpha = \mathrm{Ind}_{V \otimes W}^U V^\alpha \otimes W = U \underset{V \otimes W}{\boxtimes} (V^\alpha \otimes W)$$

は (ツイストではない) 単純カレント U 加群となり，$\{U^\alpha \mid \alpha \in D^\perp\}$ は $\mathrm{Irr}(U)^\circ$ において $D^\perp$ と同型な部分群をなすことが分かる。より詳しく，二次形式を伴う群として $(\{U^\alpha \mid \alpha \in D^\perp\}, q_U) \cong (D^\perp, q_V)$ が成り立つ。一方，設定から，$\{W^\alpha \mid \alpha \in D\}$ は $\mathrm{Irr}(W)^\circ$ において D と同型な部分群をなしている。よって，$\mathrm{Irr}(W)$ および $\mathrm{Irr}(U)$ には単純カレントによる置換としてそれぞれ D および $D^\perp$ による自然な作用が与えられる。[YY18] では，これらの軌道分解の間に自然な一対一対応があり，さらに対応する軌道の長さの比は常に一定であることを示した。すなわち，D および $D^\perp$ による $\mathrm{Irr}(W)$ および $\mathrm{Irr}(U)$ の軌道分解として

$$\mathrm{Irr}(W) = \bigsqcup_{j \in J} \mathscr{O}_W^j, \qquad \mathrm{Irr}(U) = \bigsqcup_{j \in J} \mathscr{O}_U^j$$

なる分解があり，軌道の長さについて $|\mathscr{O}_W^j| : |\mathscr{O}_U^j| = |D| : |D^\perp|$ が成り立つことを示した。上記軌道分解において共通の添字集合 J が使われていることに注意されたい。軌道の対応をみることで，既約 U 加群に現れる既約 W 部分加群の間の同型判定が可能となる。

[7]言い換えれば，任意の $\alpha \in C$ について $h(V^\alpha \otimes W^\alpha) = h(V^\alpha) + h(W^\alpha) \in \mathbb{Z}$ を仮定する。
[8]この条件の代わりに圏論的次元について $V \not\cong M$ のとき $\dim M > 0$ としてもよい。

次に 2. であるが，$\mathscr{F}(W) \rightsquigarrow \mathscr{F}(U)$ はやはり上述した一般論により易しい。$\mathscr{F}(U) \rightsquigarrow \mathscr{F}(W)$ を完全に決定したところが [YY18] における主結果となる。両者の対応を簡単に述べる。$M^i \in \mathrm{Irr}(U)$, $X^i \in \mathrm{Irr}(W)$ $(i = 1, 2, 3)$ として，$\alpha, \beta, \gamma \in C$ について $V^\alpha \otimes X^1 \subset M^1$, $V^\beta \otimes X^2 \subset M^2$, $V^\gamma \otimes X^3 \subset M^3$ を仮定する。(このような組合せが存在することは分かっている。) このとき [YY18] では $\delta = \alpha + \beta - \gamma$ としたとき，フュージョン積における重複度に関して，次が成り立つことを示した。

$$[M^1 \underset{U}{\boxtimes} M^2 : M^3] = \begin{cases} [X^1 \underset{W}{\boxtimes} X^2 : W^\delta \underset{W}{\boxtimes} X^3] & (\delta \in D) \\ 0 & (\delta \notin D) \end{cases}$$

$$[X^1 \underset{W}{\boxtimes} X^2 : X^3] = \begin{cases} [M^1 \underset{U}{\boxtimes} M^2 : U^\delta \underset{U}{\boxtimes} M^3] & (\delta \in D^\perp) \\ 0 & (\delta \notin D^\perp) \end{cases}$$

この条件は二次形式を伴う群 (C, q_V) における二つの部分群 $D < \mathrm{Irr}(W)^\circ$, $D^\perp < \mathrm{Irr}(U)^\circ$ の間の双対性がフュージョン代数の積構造にも反映されていることを示しており，大変興味深い。

なお，[YY18] を書き上げたあとで分かったことだが，[CKM17] において，VOA の拡大が与えられたとき，その表現圏の間のテンソル関手の存在とその基本性質について，詳しく調べられており，今回の我々の主結果は (定式化が異なるものの) 彼らの結果に含まれてしまっている。ただ，[YY18] では単純カレントのなす群上に定まる二次形式を用いた定式化を行い，双対性を明確にしている。

設定 1 を満足する例としては，格子頂点作用素代数 V_L を含む VOA U について W をその交換団部分代数, V を W の交換団部分代数としてとったものが典型的である。特に U がアフィン頂点作用素代数のとき，このようにして得られる W の (VOA とは限らない) 拡大はパラフェルミオン代数と呼ばれ，よく研究されているが[9]，[YY18] はこれまでの個別研究を包含する一般論を構築したといえる。

参考文献

[CKM17] T. Creutzig, S. Kanade and R. McRae, Tensor categories for vertex operator superalgebra extensions, `arXiv.1705.05017`

[EMS15] J. van Ekeren, S. Mller, N. Scheithauer, Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras to appear in *J. Reine Angew. Math.*, `arXiv:1507.08142`.

[H08] Y.Z. Huang, Rigidity and modularity of vertex tensor categories. *Communications in Contemporary Mathematics* Vol. **10**, No. supp01, pp. 871–911 (2008).

[LY08] C.H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers. *Communications in Mathematical Physics* **277** (2008), 237–285.

[YY18] H. Yamada and H. Yamauchi, Simple current extensions of tensor products of vertex operator algebras. `arXiv:1804.08242`

[Y03] H. Yamauchi, Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras. Journal of Pure and Applied Algebra **189** (2004), 315–328.

[9] 先行研究については [YY18] の参考文献を参照されたい。