抽象バーンサイド環–Abstract Burnside rings

近畿大学・理工学部　小田文仁 (Fumihito Oda)
Faculty of Science and Engineering, Kindai University
odaf@math.kindai.ac.jp

1 Introduction

本稿は，吉田知行氏（北海道大学），竹ヶ原裕元氏（室蘭工業大学）との共同研究 [YOT18] に基づいている．G を有限群とする．有限 G-集合の圏 $\mathbf{set}^G$ の直和と直積に関する Grothendieck 環を **Burnside 環**といい $\Omega(G)$ と書く．圏 $\mathbf{set}^G$ を異なる圏に取り替えて，その圏から抽象バーンサイド環を構成する際のモデルとなるものが古典的な Burnside 環 $\Omega(G)$ である．

G の部分群の共役類全体の集合を $C(G) = \{(H) \mid H \leq G\}$，$WH = N_G(H)/H$ とする．有理整数環 $\mathbb{Z}$ の直積環

$$\widetilde{\Omega}(G) = \prod_{(H)\in C(G)} \mathbb{Z}$$

を G の **ghost 環**，位数 $|WH|$ $(H \leq G)$ の巡回群の直積群

$$\mathrm{Obs}(G) = \prod_{(H)\in C(G)} (\mathbb{Z}/|WH|\mathbb{Z})$$

を G の **obstraction 群**と呼ぶ．このとき，アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \Omega(G) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\Omega}(G) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(G) \longrightarrow 0,$$

ただし，**Burnside 準同型** φ は，

$$\varphi = (\varphi_H) : \Omega(G) \longrightarrow \widetilde{\Omega}(G); [X] \mapsto (|X^H|)_{(H)},$$

ψ は，G の ghost 環の任意の元 $\theta = (\theta(K))_{(K)}$ に対し，

$$\psi_H(\theta) = \sum_{gH\in WH} \theta(\langle g\rangle H) \bmod |WH|$$

で定義されるものとする，が存在する．特に，上の完全列は，$\Omega(G)$ が Burnside 準同型を通して ghost 環の部分環と同型であることを示している．本稿では，ある条件を満たす圏 $\boldsymbol{\Gamma}$ から構成される $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ に，上のような完全列が存在するような環構造を与えることで $\Omega(G)$ の一般化を目指した理論の一端の概要を述べる．

圏 $\boldsymbol{\Gamma}$ は，射の集合が有限であるとき**有限圏**という．$\boldsymbol{\Gamma}$ は，ある有限圏と圏同値である（このとき，$\boldsymbol{\Gamma}$ を**本質的有限圏**という）とする．$[X]$ を $X \in \boldsymbol{\Gamma}$ の同型類，$\boldsymbol{\Gamma}(I, X) :=$

$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Gamma}}(I,X)$，有限集合 S の基数を $|S|$，$[\boldsymbol{\Gamma}] := \{[I] \mid I \in \boldsymbol{\Gamma}:\ \text{irreducible}\}$，$\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} := \mathbb{Z}[\boldsymbol{\Gamma}]$，$\mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} := \prod_{[I]\in[\boldsymbol{\Gamma}]} \mathbb{Z}$ とする．

$\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ は，$\varphi_I([X]) = |\boldsymbol{\Gamma}(I,X)|$ で与えられる写像 ($\boldsymbol{\Gamma}$ の **Burnside 準同型**という) $\varphi = (\varphi_I) : \mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ が単射環準同型であるような環構造が与えられるとき **abstract Burnside 環 (ABR)** と呼ぶ．本稿の主題は以下の問の十分条件を与えることである．

問題． $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ が ABR となるような本質的有限圏 $\boldsymbol{\Gamma}$ の圏論的条件を求めよ．

以下，その条件を与えるための準備をする．

2 余核条件

一般の圏 $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象 I の自己同型群の任意の部分群 $S \leq \mathrm{Aut}(I)$ に対し $c_S : I \to I/S$ を $S \subseteq \boldsymbol{\Gamma}(I,I)$ の**余核 (coequalizer)** という:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, shift right, "S"'] & I \arrow[r, "c_S"] \arrow[dr, "f"'] & I/S \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & & X. \end{tikzcd}$$

これは，任意の $\sigma \in S$ に対し $c_S \circ \sigma = c_S$ が成り立ち, もし $f : I \longrightarrow X$ が任意の $\sigma \in S$ に対し条件 $f \circ \sigma = f$ を満たすならば，$f = f' \circ c_S$ を満たす $f' : I/S \longrightarrow X$ が一意的に存在することを示している．特に，

$$|\boldsymbol{\Gamma}(I/S,X)| = |\boldsymbol{\Gamma}(I,X)^S|$$

をえる．

以下の条件を (C) とする．

Condition(C) $\forall I \in \boldsymbol{\Gamma}$, $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(I)$, $\exists$ a coequalizer $c_\sigma : I \to I/\sigma$ of the pair $(1_I, \sigma)$.

3 全射単射分解系

圏 $\boldsymbol{\Gamma}$ のすべての全射のクラスを $\mathrm{Epi}(\boldsymbol{\Gamma})$，すべての単射のクラスを $\mathrm{Mon}(\boldsymbol{\Gamma})$，すべての同型のクラスを $\mathrm{Iso}(\boldsymbol{\Gamma})$ とする．$X \in \boldsymbol{\Gamma}$ のすべての自己同型の集合を $\mathrm{Aut}(X)$ とする．$\boldsymbol{\Gamma}$ の射のクラスの対 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$ は以下の条件を満たすとき $\boldsymbol{\Gamma}$ の**分解系 (factorization system)** という：

(F1) The classes $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{M}$ are both closed under composition.
(F2) Any isomorphism belongs to both of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{M}$.
(F3) Any $f : X \to Y$ admits an $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$-factorization

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Im}(f) \arrow[dr, "m"] & \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"'] & & Y, \end{tikzcd}$$

where $e \in \boldsymbol{E}$ and $m \in \boldsymbol{M}$.
(F4) The above factorization is unique, that is, $f : X \xrightarrow{e'} \mathrm{Im}(f)' \xrightarrow{m} Y$ is another $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$-factorization, then there exists a unique isomorphism $i : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f)'$ such that the following diagram is commutative :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Im}(f) \arrow[dd, "i"', "\cong"] \arrow[dr, "m"] & \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & & Y. \\ & \mathrm{Im}(f)' \arrow[ur, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

条件 (F4) により f の像 **image** $\mathrm{Im}(f)$ は同型を度外視して一意的に定まる．さらに，以下が成り立つ:

$$\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{M} = \mathrm{Iso}(\boldsymbol{\Gamma}).$$

Definition 3.1. 分解系 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$ は，次の条件をみたすとき**全射単射分解系** (**epi-mono factorization system**) と呼ばれる：

(EM) $\boldsymbol{E} \subset \mathrm{Epi}(\boldsymbol{\Gamma})$ and $\boldsymbol{M} \subset \mathrm{Mon}(\boldsymbol{\Gamma})$.

圏 $\boldsymbol{\Gamma}$ は分解系 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$ をもつとする．$\boldsymbol{E}$ の対象 X, Y の間のすべての射の集合を $\boldsymbol{E}(X, Y)$，$\boldsymbol{M}$ の対象 X, Y の間のすべての射の集合を $\boldsymbol{M}(X, Y)$ とする．行列 Γ, E, M をそれぞれ以下のように定める:

$$\begin{aligned} \Gamma &:= (|\boldsymbol{\Gamma}(X, Y)|)_{X,Y \in [\boldsymbol{\Gamma}]}, \\ E &:= (|\boldsymbol{E}(X, Y)|)_{X,Y \in [\boldsymbol{\Gamma}]}, \\ M &:= (|\boldsymbol{M}(X, Y)|)_{X,Y \in [\boldsymbol{\Gamma}]}. \end{aligned}$$

さらに対角行列 D を

$$D := (|\mathrm{Aut}(X)|\delta(X, Y))_{X,Y \in [\boldsymbol{\Gamma}]}, \quad \delta(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } X \cong Y, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める．最後に 2 つの有理数行列 Q, S を

$$\begin{aligned} Q &:= ED^{-1} = (|\boldsymbol{E}(X, Y)|/|\mathrm{Aut}(Y)|)_{X,Y \in [\boldsymbol{\Gamma}]}, \\ S &:= D^{-1}M = (|\boldsymbol{M}(X, Y)|/|\mathrm{Aut}(X)|)_{X,Y \in [\boldsymbol{\Gamma}]} \end{aligned}$$

とする．

Proposition 3.2. *Assume that $\boldsymbol{\Gamma}$ has a factorization system $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$.*
(1) *The hom-set matrix Γ factors as follows:*

$$\Gamma = ED^{-1}M = QDS$$

(2) *If $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M})$ is an epi-mono factorization system, then Q (resp. S) is permutation-similar to a unipotent lower (resp. upper) triangular integral matrix.*

4 主定理

Theorem 4.1. *[YOT18] Let $\boldsymbol{\Gamma}$ be an essentially finite category. If $\boldsymbol{\Gamma}$ satisfies* (EM), (C)*, then*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0$$

is exact.

Proof. まず，以下の 4 つを示す．(1) φ is injective，(2) $|\mathrm{Cok}(\varphi)| = |\mathrm{Obs}(\boldsymbol{\Gamma})|$，(3) $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$，(4) ψ is surjective.

(1) φ is injective.

まず，$\boldsymbol{\Gamma}$ が有限圏であるとする．$\boldsymbol{\Gamma}$ の既約な対象間の射の個数からなる行列のサイズは有限である．

$$\boldsymbol{E}(X, X) = \boldsymbol{M}(X, X) = \mathrm{Aut}(X)$$

が任意の $X \in \boldsymbol{\Gamma}$ について成り立つから，LDU-分解をもちいて

$$\det(\Gamma) = \prod_{I \in \Gamma} |\mathrm{Aut}(X)| \neq 0 \text{ in } \mathbb{Z}$$

を得る．

一般の場合，

$$\mathbf{r} = \sum_{X \in \boldsymbol{\Gamma}} r_X[X] \in \ker\varphi$$

とおき，$\boldsymbol{\Lambda}$ を $r_X \neq 0$ を満たすすべての対象からなる $\boldsymbol{\Gamma}$ の充満部分圏とする．$r_X \neq 0$ をみたす同型類 $[X]$ は有限であるから圏 $\boldsymbol{\Lambda}$ は本質的有限圏である．このとき，[YOT18, Lemma 1.4] より $\boldsymbol{\Lambda}$ と圏同値となる $\boldsymbol{\Lambda}$ の本質的有限部分圏 $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}$ が存在し $(\overline{\boldsymbol{\Lambda}} \cap \boldsymbol{E}, \overline{\boldsymbol{\Lambda}} \cap \boldsymbol{M})$ を分解系としてもつことがわかる．従って $\mathbf{r} = 0$ を得る．

(2) は，Proposition 3.2 より従う．

(3) $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$.

任意の対象 $X \in \Gamma$ に対し，Cauchy-Frobenius の補題より $\psi \circ \varphi([X])$ の第 I 成分について

$$\begin{aligned}
\psi_I \circ \varphi([X]) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \overline{\varphi_{I/\sigma}([X])} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \overline{\Gamma(I/\sigma, X)} \\
&= |\mathrm{Aut}(I)| \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \overline{|\Gamma(I, X)^{\langle\sigma\rangle}|} \\
&\equiv 0 \quad (|\mathrm{Aut}(I)|)
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．

(4) ψ is surjective.

線型写像 $\widetilde{\psi}$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi} = (\widetilde{\psi}_I)_I &: \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}};\\ \widetilde{\psi}_I &: \chi \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \chi(I/\sigma)\end{aligned}$$

で定める．$\mathrm{pr} \circ \widetilde{\psi} = \psi$，ただし，$\mathrm{pr} : \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} \to \mathrm{Obs}(\boldsymbol{\Gamma})$ は，$\chi \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ に対し

$$\mathrm{pr}(\chi) = \chi(I) \bmod |\mathrm{Aut}(I)|$$

で定義されるから，$\widetilde{\psi}$ が surjective であることを示せば十分である．

$\mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ の標準基底に関する表現行列 K は，

$$K(I, J) = \sharp\{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)_{(p)} \mid I/\sigma \cong J\}$$

で与えられる．$c_\sigma : I \to I/\sigma$ が同型であることと σ が恒等写像であることが同値であることを注意する．関係

$$[X] \leq_e [Y] \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{E}(Y, X) \neq \emptyset$$

により $\Gamma/\cong$ に定義される順序関係の線形な拡張により，行列 K は，整数を成分にもつ下三角べき単行列になる．従って，K は可逆であり，$\widetilde{\psi}$ は surjective である．

あとは，$\mathrm{Cok}(\varphi) \cong \mathrm{Obs}(\boldsymbol{\Gamma})$ を示せば十分である．以下の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "c"'] & \mathrm{Obs}(\boldsymbol{\Gamma}) \arrow[r] & 0. \\ & & & \mathrm{Cok}(\varphi) \arrow[u, dotted, "c'"'] & \end{tikzcd}$$

(4) より ψ が surjective であるから，c' もそうである．さらに，(2) より $|\mathrm{Cok}(\varphi)| = |\mathrm{Obs}(\boldsymbol{\Gamma})|$ であるから c' は同型である． □

Theorem 4.2. *[YOT18] Let $\boldsymbol{\Gamma}$ be an essentially finite category. If $\boldsymbol{\Gamma}$ satisfies* (EM), (C), *then $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ is an abstract Burnside ring.*

Proof. • $\varphi([X]) \cdot \varphi([Y]) \in \varphi(\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma})$

写像 φ が単射であるから $\varphi(\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma})$ が $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ の部分環であることを示せば十分である．$X, Y \in \boldsymbol{\Gamma}$ とする．Cauchy-Frobenius の補題より任意の $I \in \boldsymbol{\Gamma}$ に対し,

$$\begin{aligned}\psi_I(\varphi([X]) \cdot \varphi([Y])) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \overline{\varphi_{I/\sigma}([X]) \cdot \varphi_{I/\sigma}([Y])}\\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \overline{|\boldsymbol{\Gamma}(I, X)^{\langle\sigma\rangle}| \cdot |\boldsymbol{\Gamma}(I, Y)^{\langle\sigma\rangle}|}\\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(I)} \overline{|(\boldsymbol{\Gamma}(I, X) \times \boldsymbol{\Gamma}(I, Y))^{\langle\sigma\rangle}|}\\ &= \overline{|\mathrm{Aut}(I)| \cdot |(\boldsymbol{\Gamma}(I, X) \times \boldsymbol{\Gamma}(I, Y))/\mathrm{Aut}(I)|} = 0\end{aligned}$$

であるから $\varphi([X]) \cdot \varphi([Y]) \in \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$ を得る．

- $\varphi(\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma})$ に単位元が存在すること

単位元の存在を示すためには，$1 = (1)_I \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ が φ の像に含まれることを示せば十分である．

$$\psi_I(1) = \sum_{g \in \mathrm{Aut}(J)} 1 \bmod |\mathrm{Aut}(J)| = 0$$

と Theorem 4.1 より以下が従う：

$$\mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} \ni 1 = (1)_I \in \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi).$$

□

参考文献

[YOT18] Yoshida, T.; Oda, F.; Takegahara, Y.: *Axiomatic theory of Burnside rings. (I)*, J. Algebra **505** (2018), 339–382.