Generalized Hadamard matrices with a hole and projective planes of prime order

秋山献之 (福岡大学), 末竹千博
Kenzi Akiyama (Fukuoka University), Chihiro Suetake

§1 導入

任意の素数 p に対して, 位数 p の射影平面は存在する。例えばデザルグ平面 $PG(2,p)$ は位数 p の射影平面である。しかしながら $PG(2,p)$ 以外の位数 p の射影平面は知られていない。素数位数の非デザルグ平面は存在するか否か, という問いは有名である。

π を任意の有限射影平面とし, その位数を n とする。π は部分結合構造として maximal holes を持つ対称可除デザイン $\mathrm{SDD}_1[n,n-1,n+1]$ $\mathcal{D}$ を含む。(逆に任意の maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_1[n,n-1,n+1]$ は位数 n のある射影平面に一意的に拡大できる。) もし, π が中心と軸を共有する homology group G (π のある特別な自己同型群) を持つならば, G が自己同型群として遺伝するような, maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_1[n,n-1,n+1]$ $\mathcal{D}$ を構成することが出来る。G の位数は小さくて, $|G||(n-1)$ であることがわかる。そこで n が素数 p であるとき, $|G||(p-1)$ であるような 中心と軸を共有する homology group G を持つ, maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_1[n,n-1,n+1]$ $\mathcal{D}$ を調べれば, 素数位数 p の射影平面について何らかの情報が得られるのではないか, というのが我々の研究の視点である。

クラス正則な対称可除デザイン $\mathrm{SDD}_\lambda[k,u,k+1]$, $k=u\lambda+1$ には generalized conference matrices が対応していることが知られている。我々はこのような SDD の全自己同型群を計算する方法とこのような SDD 間の同型非同型を判定する方法を提案する。特に $\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda+1,2,2\lambda+2]$, $\lambda=$ 奇数に対しては, これが maximal holes を持ち, 位数 $2\lambda+2$ の歪対称アダマール行列に対応していていることを証明する。

なお, 先行研究の情報については, 宗政先生に色々と教えていただいた。そこでこのノートのタイトルは, Symmetric divisible designs and generalized conference matrices とすべきだったかも知れない。小さい自己同型群を持つ素数位数の射影平面の研究は, まだスタート地点である。

§2 対称可除デザイン

定義 2.1 m,u,k を正の整数, $k\geq 2$, λ_1,λ_2 を非負整数とする。$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ を結合構造とする。点 $p\in\mathcal{P}$ とブロック $B\in\mathcal{B}$ に対して, $(p)=$

$\{X \in \mathcal{B}|\ pIX\}$, $(B) = \{x \in \mathcal{P}|\ xIB\}$ とおく。このとき次の条件を満たす $\mathcal{D}$ は $(m, u, k, \lambda_1, \lambda_2)$- **可除デザイン (divisible design)** と呼ばれる。

(i) 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して, $|(B)| = k$
(ii) 次の条件を満たす $\mathcal{P}$ の分割 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{m-1}$ が存在する。

- $|\mathcal{P}_i| = u \ \ (0 \leq i \leq m-1)$
- 任意の異なる $p, q \in \mathcal{P}$ に対して,

$|(p) \cap (q)| = \begin{cases} \lambda_1 & \text{もし } p, q \in \mathcal{P}_i \quad \text{ある } 0 \leq i \leq k-1 \text{ に対して} \\ \lambda_2 & \text{その他} \end{cases}$

$(\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}$ は $\mathcal{D}$ の**点クラス (point classes)**) と呼ばれる。

注意 2.2　上の定義において $|\mathcal{P}| = um$,
$|\mathcal{B}| = \dfrac{um\{(u-1)\lambda_1 + u(m-1)\lambda_2\}}{k(k-1)}$,
$|(p)| = \dfrac{(u-1)\lambda_1 + u(m-1)\lambda_2}{k-1} \ \ (p \in \mathcal{P})$ が成り立つ。

定義 2.3　m, u, k を正の整数, $k \geq 2$, λ_1, λ_2 を非負整数とする。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $(m, u, k, \lambda_1, \lambda_2)$-可除デザインとする。もし $\mathcal{D}$ の双対構造 $\mathcal{D}^{dual}$ もまた $(m, u, k, \lambda_1, \lambda_2)$-可除デザインであるならば, $\mathcal{D}$ は**対称可除デザイン (symmetric divisible design)** と呼ばれる。ここで, $\mathcal{D}^{dual}$ の点クラスは $\mathcal{D}$ の**ブロッククラス (block classes)** と呼ばれる。特に, 正整数 m, u, k, λ $(k \geq 2)$ に対して, 対称 $(m, u, k, 0, \lambda)$-可除デザインは簡単のため $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$ と書かれる。$\mathcal{D}$ の点クラス全体からなる集合, ブロッククラス全体からなる集合をそれぞれ $\Omega(\mathcal{D})$, $\Delta(\mathcal{D})$ と書くことにする。

補題 2.4　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m] \ \ (k \geq 2)$ とする。
このとき $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}| = mu$, $k(k-1) = u\lambda(m-1)$, $m \geq k \geq 2$

系 2.5　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m] \ \ (k \geq 2)$ とする。このとき

(i) $k \geq u\lambda$
(ii) $m = k \Longleftrightarrow k = u\lambda$
この場合 $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m] = \mathrm{STD}_\lambda[k, u]$ (STD は対称横断デザイン (symmetric transversal design) を意味する)
(iii) $m = k + 1 \Longleftrightarrow k = u\lambda + 1$
この場合 $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m] = \mathrm{SDD}_\lambda[u\lambda + 1, u, u\lambda + 2]$

定義 2.6　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ $(k = u\lambda + 1)$ とする。$\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_k\}$ とおく。$\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ が, すべての $p \in \mathcal{P}_i$ に対して, $(p) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ を満たすとき, $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_j)$ を $\mathcal{D}$ の **hole** という。特に任意の $0 \leq i \leq k$ に対して, $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_j)$ が hole となるような $0 \leq j \leq k$ が存在するとき, $\mathcal{D}$ は **maximal holes** を持つという。この場合 $i \longmapsto j$ は $\{0, 1, \ldots, k\}$ 上

の全単射な写像を導入する。

注意 2.7　定義 2.6 において次が成り立つことを注意しておく。

$h \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \ldots, k\}$ とする。
すべての $p \in \mathcal{P}_i$ とすべての $B \in \mathcal{B}_{i^h}$ に対して $p \not I B$ $(0 \leq i \leq k)$
$\Longleftrightarrow$ すべての $p \in \mathcal{P}_i$ に対して $(p) \cap \mathcal{B}_{i^h} = \emptyset$ $(0 \leq i \leq k)$
$\Longleftrightarrow$ すべての $B \in \mathcal{B}_j$ に対して $(B) \cap \mathcal{P}_{j^{h^{-1}}} = \emptyset$ $(0 \leq j \leq k)$

補題 2.8　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とする。
ここで $k(k-1) = u(m-1)\lambda$, $m \geq k \geq 2$
$\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_{m-1}\}$ とおく。更に
$\mathcal{P}_i = \{p_{iu}, p_{iu+1}, \ldots, p_{(i+1)u-1}\}$, $\mathcal{B}_j = \{B_{ju}, B_{ju+1}, \ldots, B_{(j+1)u-1}\}$ $(0 \leq i, j \leq m-1)$ とする。点集合とブロック集合のこれらの番号付けに対応する $\mathcal{D}$ の結合行列を

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \ldots & L_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m-1,0} & \ldots & L_{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

とする。ここで各 $L_{i,j}$ は各行, 各列に 1 を高々1 個含むような $\{0, 1\}$ 上の u 次の正方行列である。このとき

$$(*) \qquad LL^T = L^T L = \begin{pmatrix} kE & \lambda J & \ldots & \lambda J \\ \lambda J & kE & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda J \\ \lambda J & \ldots & \lambda J & kE \end{pmatrix}.$$

注意 2.9　補題 2.8 で, $\mathcal{D}$ が maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ であるならば, $L_{i,i^h} = O,\ (0 \leq i \leq k)$ であるような $h \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \ldots, k\}$ が存在する。このとき, 他のすべての $L_{i,j}$ は u 次の置換行列である。

このノートでは $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$　$(k \geq 2,\ u \geq 2)$ を扱う。

§3 λ が奇数である $\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$

この節では $\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$ が maximal holes を持つか否かという問題について考える。

$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とする。$\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_{m-1}\}$ とする。更に $u = 2,\ m = k+1$ と仮定する。このとき $k = 2\lambda+1,\ m = 2\lambda+2$
$\mathcal{P}_0 = \{p_0, p_1\},\ \mathcal{P}_1 = \{p_2, p_3\}, \ldots, \mathcal{P}_{2\lambda+1} = \{p_{4\lambda+2}, p_{4\lambda+3}\}$,
$\mathcal{B}_0 = \{B_0, B_1\},\ \mathcal{B}_1 = \{B_2, B_3\}, \ldots, \mathcal{B}_{2\lambda+1} = \{B_{4\lambda+2}, B_{4\lambda+3}\}$ と $\mathcal{D}$ の点とブ

ロックに番号を付ける。これらの番号付けに対応する$\mathcal{D}$の結合行列を$L = (l_{i,j})_{0\le i,j\le 4\lambda+3}$とする。また$L = (L_{r,s})_{0\le r,s\le 2\lambda+1}$とする。
ここで$L_{r,s} = \begin{pmatrix} l_{2r,2s} & l_{2r,2s+1} \\ l_{2r+1,2s} & l_{2r+1,2s+1} \end{pmatrix}$

次の補題は定理3.2の証明でしばしば用いられる。

補題 3.1　$0 < t < k = 2\lambda + 1$を固定しておく。

(i) $0 \le i_1 \ne i_2 \le k$とする。
$\{2i_1, 2i_1+1\} = \{r_1, r_2\},\ \{2i_2, 2i_2+1\} = \{s_1, s_2\}$とする。
$L_{i_1,t}, \ldots, L_{i_1,k}, L_{i_2,t}, \ldots, L_{i_2,k} \in \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$とする。
このとき
$l_{r_1,0}l_{s_1,0} + \ldots + l_{r_1,t-1}l_{s_1,t-1} = 0 \Longrightarrow l_{r_2,0}l_{s_2,0} + \ldots + l_{r_2,t-1}l_{s_2,t-1} = 0$

(ii) $0 \le j_1 \ne j_2 \le k$とする。
$\{2j_1, 2j_1+1\} = \{r_1, r_2\},\ \{2j_2, 2j_2+1\} = \{s_1, s_2\}$とする。
$L_{t,j_1}, \ldots, L_{k,j_1}, L_{t,j_2}, \ldots, L_{k,j_2} \in \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$とする。
このとき
$l_{0,r_1}l_{0,s_1} + \ldots + l_{t-1,r_1}l_{t-1,s_1} = 0 \Longrightarrow l_{0,r_2}l_{0,s_2} + \ldots + l_{t-1,r_2}l_{t-1,s_2} = 0$

定理 3.2　λが奇数のとき, すべての$\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$はmaximal holesを持つ。

注意 3.3　$\mathrm{SDD}_2[5, 2, 6]$はmaximal holesを持つ(計算機で調べた)。$\lambda \ge 4$が偶数のとき, $\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$がmaximal holesを持つかどうかわかっていない。

§4 クラス正則$\mathrm{SDD}_\lambda[u\lambda+1, u, u\lambda+2]$と generalized conference matrices

この節で述べられていることは, 補題4.2と定義4.3の一部を除いて[J]の中に書かれている。

補題 4.1　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$を$\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$とする。$\Omega = \Omega(\mathcal{D})$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D})$とおく。このとき$\mathcal{D}$の任意の自己同型写像$\varphi$は$\Omega$上の置換と$\Delta$上の置換を導入する。すなわち, 任意の$\mathcal{P}_0 \in \Omega$, ${\mathcal{P}_0}^\varphi \in \Omega$で, 任意の$\mathcal{B}_0 \in \Delta$, ${\mathcal{B}_0}^\varphi \in \Delta$である。

Hine and Mavron [HM](1983)におけるのと同じ議論は次の補題を導く。

補題 4.2　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$を$\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$ $(k(k-1) = u(m-1)\lambda,\ m \ge$

$k \geq 2)$ とする。$\mathcal{D}$ の自己同型群 G が $\Omega(\mathcal{D})$ と $\Delta(\mathcal{D})$ に自明に作用するとする。このとき G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ 上半正則に作用する。

定義 4.3　λ, k, u, m を $k(k-1) = u(m-1)\lambda,\ m \geq k \geq 2$ を満たす正の整数とする。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とし, G を $\mathcal{D}$ 自己同型群とする。G が $\Omega(\mathcal{D})$ と $\Delta(\mathcal{D})$ 上自明に作用するとき, 補題 4.2 より, G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ 上半正則に作用する。従って, G は各点クラスと各ブロッククラス上半正則に作用し, $|G||u$ である。特に, G が各点クラスと各ブロッククラス上正則に作用するとき, $\mathcal{D}$ **は** G **に関して クラス正則 (class regular)** という。この場合 $|G| = u$

注意 4.4　クラス正則 $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ $(k = u\lambda + 1)$ は maximal holes を持つ。

命題 4.5　$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ $(k = u\lambda + 1, u \geq 2)$ とする。$\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k\}$ とする。$\mathcal{D}$ が自己同型群 G に関してクラス正則とする $(\because |G| = u)$。 各 $0 \leq i \leq k$ に対して, $\mathcal{P}_i$ から 1 点 p_i を取り固定しておく。各 $0 \leq j \leq k$ に対して, $\mathcal{B}_j$ から 1 ブロック B_j を取り固定しておく。この場合, 任意の $p \in \mathcal{P}_i$ と任意の $B \in \mathcal{B}_{i^h}$ に対して, $p \not I B$ $(0 \leq i \leq k)$ であるような $h \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \ldots, k\}$ が存在する。$0 \leq i, j \leq k$ に対して

$$D_{i,j} = \{\varphi \in G |\ {p_i}^{\varphi} I B_j\}$$

とおく。条件より, $|D_{i,j}| = \begin{cases} 1 & \text{もし } i^h \neq j, \\ 0 & \text{もし } i^h = j \end{cases}$ となる。
$D_{i,j} = \{\varphi_{i,j}\}$ $(0 \leq i, j \leq k)$ とする。ここで, $\varphi_{i,i^h} = 0$ $(0 \leq i \leq k)$ とする。

$$H = H(\mathcal{D}) = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,k} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} \end{pmatrix}$$

(H は群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の行列と考える。また, $0^{-1} = 0$ と定義する) とおく。
このとき H は次の性質を満たす。

(i) $0 \leq i_1 \neq i_2 \leq k$ に対して

$$\varphi_{i_1,0}{\varphi_{i_2,0}}^{-1} + \varphi_{i_1,1}{\varphi_{i_2,1}}^{-1} + \ldots + \varphi_{i_1,k}{\varphi_{i_2,k}}^{-1} = \lambda G$$

(ii) $0 \leq j_1 \neq j_2 \leq k$ に対して

$${\varphi_{0,j_1}}^{-1}\varphi_{0,j_2} + {\varphi_{1,j_1}}^{-1}\varphi_{1,j_2} + \ldots + {\varphi_{k,j_1}}^{-1}\varphi_{k,j_2} = \lambda G$$

この命題の逆が成り立つ。

命題 4.6 $u, \lambda \in \mathbb{N},\ u \geq 2,\ k = u\lambda + 1$ とする。G を位数 u の有限群とする。$h \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \ldots, k\}$, $\varphi_{i,j} \in G$ $(0 \leq i^h \neq j \leq k)$, $\varphi_{i,i^h} = 0$ $(0 \leq i \leq k)$ とし

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,k} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} \end{pmatrix}$$

が命題 4.5 の (i),(ii) を満足するとする。
$\mathcal{P} = \{(i, \alpha) |\ 0 \leq i \leq k,\ \alpha \in G\}$, $\mathcal{B} = \{[j, \alpha] |\ 0 \leq j \leq k,\ \alpha \in G\}$ とおく。
各 $0 \leq i \leq k$ に対して, $\mathcal{P}_i = \{(i, \alpha) |\ \alpha \in G\}$,
各 $0 \leq j \leq k$ に対して, $\mathcal{B}_j = \{[j, \alpha] |\ \alpha \in G\}$ とおく。
このとき
$\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の結合関係を

$$0 \leq i \leq k,\ \alpha, \beta \in G \text{ に対して，} (i, \alpha) \not{I} [i^h, \beta]$$
$$0 \leq i^h \neq j \leq k \text{ に対して，} (i, \alpha) I [j\, \beta] \Longleftrightarrow \alpha\beta^{-1} = \varphi_{i,j}$$

と定義すると, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H) = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ は点クラス $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_k$, ブロッククラス $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_k$ を持ち, maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ $(k = u\lambda + 1, u \geq 2)$ になる。
更に, 任意の $\alpha \in G$ に対して, $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ 上の置換 f_α を

$$(i, \beta)^{f_\alpha} = (i, \beta\alpha), \quad [j, \gamma]^{f_\alpha} = [j, \gamma\alpha]$$

と定義すると, f_α は $\mathcal{D}$ の自己同型写像になる。G の $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ 上のこの作用は忠実になるので f_α を単に α と書くことにする。$\mathcal{D}$ は G に関して クラス正則になる。

注意 4.7 命題 4.5 の行列 H に対して, $\mathcal{D}(H)$ は命題 4.5 の $\mathcal{D}$ に同型になる。何故なら, ${p_i}^\alpha \longleftrightarrow (i, \alpha)$, ${B_j}^\beta \longleftrightarrow [j, \beta]$ と対応させると, $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}(H)$ が言える。従って, クラス正則 $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ $(k = u\lambda + 1,\ u \geq 2)$ を見つけるためには, 位数 u の群 G に対して命題 4.5 の (i),(ii) を満たす $G \cup \{0\}$ 上の $k+1$ 次の正方行列 A を見つければよい。しかしながら条件 (ii) は必要でないことが [J] の 6.7 Theorem でより一般的に示されている。

定義 4.8 $u, \lambda \in \mathbb{N},\ u \geq 2,\ k = u\lambda + 1$ とする。
G を位数 u の積を乗法記号で書かれた有限群とする。
$h \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \ldots, k\}$ とする。

$\varphi_{i,j} \in G\ (0 \leq i^h \neq j \leq k),\ \varphi_{i,i^h} = 0\ (0 \leq i \leq k)$ とし

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,k} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} \end{pmatrix}$$

(A は群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の行列と考える。また, $0^{-1} = 0$ と定義する) とおく。
A が次の条件を満たすとき, A を**指数** λ の **generalized conference matrix**, あるいは簡単に $GC(G;\lambda)$ という。(A は $|G|\lambda + 2$ 次の正方行列であることに注意せよ。) $0 \leq i_1 \neq i_2 \leq k$ に対して

$$\varphi_{i_1,0}{\varphi_{i_2,0}}^{-1} + \varphi_{i_1,1}{\varphi_{i_2,1}}^{-1} + \ldots + \varphi_{i_1,k}{\varphi_{i_2,k}}^{-1} = \lambda G$$

命題 4.9　$u, v, \lambda \in \mathbb{N},\ u \geq v \geq 2,\ k = u\lambda + 1$ とする。
G, K をそれぞれ位数 u, v の有限群で $f : G \longrightarrow K$ を上への準同型写像とする。このとき $A = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $GC(G;\lambda)$ とすると, $B = ({\varphi_{i,j}}^f)_{0 \leq i,j \leq k}$ は $GC(K; u\lambda/v)$ である。

§5 maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ の自己同型写像と maximal holes を持つ 2 つの $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ の同型判定

$u, \lambda \in \mathbb{N},\ u \geq 2,\ k = u\lambda + 1$ とする。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ とする。この節では $\mathcal{D}$ の自己同型写像について考える。
$\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\},\ \Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k\}$ とする。$\mathcal{D}$ の maximal holes を $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i)\ \ (0 \leq i \leq k)$ とする。$0 \leq i, j \leq k$ に対して,
$\mathcal{P}_i = \{p_{iu}, p_{iu+1}, \ldots, p_{iu+(u-1)}\},\ \mathcal{B}_j = \{B_{ju}, B_{ju+1}, \ldots, B_{ju+(u-1)}\}$ とする。
Φ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。このような点とブロックの番号付けに対応する $\mathcal{D}$ の結合行列を

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \ldots & L_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0} & \ldots & L_{k,k} \end{pmatrix}$$

とする。ここで, $L_{i,i} = O\ (0 \leq i \leq k),\ L_{i,j} \in \Phi\ (0 \leq i \neq j \leq k)$
各点クラス, 各ブロッククラス でそれぞれの点とブロックの番号を適当に打ち変えて, $L_{i,0} = E\ (1 \leq i \leq k),\ L_{0,j} = E\ (1 \leq j \leq k),\ L_{1,2} = E$ としてよい。

定義 5.1　$S = \{0, 1, \ldots, k\}$ とおく。$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k \\ f(0) & f(1) & \ldots & f(k) \end{pmatrix} \in$ Sym S とし, $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \Phi$ とする。このとき

(i) $(f,(X_0,X_1,\ldots,X_k))=\begin{pmatrix} X_{0,0} & \ldots & X_{0,k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ X_{k,0} & \ldots & X_{k,k} \end{pmatrix}$ を

$X_{i,j}=\begin{cases} X_i & \text{もし } j=f(i), \\ O & \text{その他} \end{cases}$ と定義する。ここで O は $u\times u$ 型の零行列である。

(ii) $(f,\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{0,0} & \ldots & X_{0,k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ X_{k,0} & \ldots & X_{k,k} \end{pmatrix}$ を $X_{i,j}=\begin{cases} X_j & \text{もし } i=f(j), \\ O & \text{その他} \end{cases}$

定義する。ここで O は $u\times u$ 型の零行列である。$\mathcal{D}$ の任意の自己同型写像は

$$(f,(X_0,X_1,\ldots,X_k))L(g,\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix})=L$$

を満たす $(f,g,X_0,X_1,\ldots,X_k,Y_0,Y_1,\ldots,Y_k)\in \mathrm{Sym}\ S\times\mathrm{Sym}\ S\times\underbrace{\Phi\times\cdots\times\Phi}_{2(k+1)}$

で与えられる。上の等式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} X_0L_{f(0),g(0)}Y_0 & X_0L_{f(0),g(1)}Y_1 & \ldots & X_0L_{f(0),g(k)}Y_k \\ X_0L_{f(1),g(0)}Y_0 & X_1L_{f(1),g(1)}Y_1 & \ldots & X_1L_{f(1),g(k)}Y_k \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ X_kL_{f(k),g(0)}Y_0 & X_kL_{f(k),g(1)}Y_1 & \ldots & X_kL_{f(k),g(k)}Y_k \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & \ldots & L_{0,k} \\ L_{1,0} & L_{1,1} & \ldots & L_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ L_{k,0} & L_{k,1} & \ldots & L_{k,k} \end{pmatrix}$$

従って, 任意の $0\le i\le k$ に対して, $L_{i,i}=O$ 故 $X_iL_{f(i),g(i)}Y_i=O$
$\therefore L_{f(i),g(i)}=O\ \therefore f(i)=g(i)\ \therefore f=g$
$X_iL_{f(i),f(j)}Y_j=L_{i,j}\quad(0\le i,j\le k)$
$1\le i\le k$ に対して, $X_iL_{f(i),f(0)}Y_0=E\ \therefore X_i={Y_0}^{-1}{L_{f(i),f(0)}}^{-1}$
$1\le j\le k$ に対して, $X_0L_{f(0),f(j)}Y_j=E\ \therefore Y_j={L_{f(0),f(j)}}^{-1}{X_0}^{-1}$
$\therefore 1\le i,j\le k$ に対して, ${Y_0}^{-1}{L_{f(i),f(0)}}^{-1}L_{f(i),f(j)}{L_{f(0),f(j)}}^{-1}{X_0}^{-1}=L_{i,j}$
特に, ${Y_0}^{-1}{L_{f(1),f(0)}}^{-1}L_{f(1),f(2)}{L_{f(0),f(2)}}^{-1}{X_0}^{-1}=L_{1,2}=E$
$\therefore {X_0}^{-1}=L_{f(0),f(2)}{L_{f(1),f(2)}}^{-1}L_{f(1),f(0)}Y_0$
$\therefore {Y_0}^{-1}{L_{f(i),f(0)}}^{-1}L_{f(i),f(j)}{L_{f(0),f(j)}}^{-1}L_{f(0),f(2)}{L_{f(1),f(2)}}^{-1}L_{f(1),f(0)}Y_0$

$= L_{i,j} \ \ (1 \le i, j \le k)$ こうして, 次の定理を得る。

定理 5.2 $u, \lambda \in \mathbb{N},\ u \geq 2,\ k = u\lambda + 1$ とする。
$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ とする。$\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k\}$ とする。$0 \le i, j \le k$ に対して, $\mathcal{P}_i = \{p_{iu}, p_{iu+1}, \dots, p_{iu+(u-1)}\}$, $\mathcal{B}_j = \{B_{ju}, B_{ju+1}, \dots, B_{ju+(u-1)}\}$ とする。Φ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。このような点とブロックの番号付けに対応する $\mathcal{D}$ の結合行列を

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \dots & L_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0} & \dots & L_{k,k} \end{pmatrix}$$

とする。ここで $L_{i,i} = O\ (0 \le i \le k)$, $L_{i,j} \in \Phi\ (0 \le i \ne j \le k)$
各 point classes, 各 block classes でそれぞれの点とブロックの番号を適当に打ち変えて, $L_{i,0} = E\ (1 \le i \le k)$, $L_{0,j} = E\ (1 \le j \le k)$, $L_{1,2} = E$ としてよい。このとき $\mathcal{D}$ の任意の自己同型写像は
$Y_0{}^{-1} L_{f(i),f(0)}{}^{-1} L_{f(i),f(j)} L_{f(0),f(j)}{}^{-1} L_{f(0),f(2)} L_{f(1),f(2)}{}^{-1} L_{f(1),f(0)} Y_0$
$= L_{i,j} \ \ (1 \le i, j \le k)$ を満たす $(f, Y_0) \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \dots, k\} \times \Phi$ で与えられる。

定理 5.3 $u, \lambda \in \mathbb{N},\ u \geq 2,\ k = u\lambda + 1$ とする。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ を maximal holes を持つ 2 つの $\mathrm{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ とする。Φ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。$\mathcal{D},\ \mathcal{D}'$ の結合行列をそれぞれ

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \dots & L_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0} & \dots & L_{k,k} \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} L_{0,0}{}' & \dots & L_{0,k}{}' \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0}{}' & \dots & L_{k,k}{}' \end{pmatrix}$$

とする。ここで $L_{i,i} = O \ \ (0 \le i \le k)$, $L_{i,j} \in \Phi \ \ (0 \le i \ne j \le k)$, $L_{1,2} = E$,
$L_{i,i}{}' = O \ \ (0 \le i \le k)$, $L_{i,j}{}' \in \Phi \ \ (0 \le i \ne j \le k)$, $L_{1,2}{}' = E$ とする。
このとき $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ が同型であるための必要十分条件は
$Y_0{}^{-1} L_{f(i),f(0)}{}^{-1} L_{f(i),f(j)} L_{f(0),f(j)}{}^{-1} L_{f(0),f(2)} L_{f(1),f(2)}{}^{-1} L_{f(1),f(0)} Y_0$
$= L_{i,j}{}' \ \ (1 \le i, j \le k)$ を満たす $(f, Y_0) \in \mathrm{Sym}\{0, 1, \dots, k\} \times \Phi$ が存在することである。

§6 generalized conference matrices の同値判定

定義 6.1 G を位数 $u (\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。H, K を $GC(G; \lambda)$ とする。このとき

H と K は**同値**である ($H \sim K$ と書く)。$\Longleftrightarrow \mathcal{D}(H) \cong \mathcal{D}(K)$

と定義する。

命題 6.2　G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。$\Phi = \Phi(G, \lambda)$ を $GC(G; \lambda)$ の全体からなる集合とする。このとき, $\sim$ は Φ 上の同値関係である。

命題 6.3　G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。$k = u\lambda + 1$ とする。$H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $GC(G; \lambda)$ とする。

(i) K を H に任意の行の入れ替えを施して得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
(ii) K を H に任意の列の入れ替えを施して得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
(iii) K を H の**固定された任意の行**の各成分に, 固定された G の任意の元を**左から乗じて**得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
(iv) K を H の**固定された任意の列**の各成分に, 固定された G の任意の元を**右から乗じて**得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
(v) $\rho \in \mathrm{Aut}\ G$ とする。すなわち, $\rho : G \to G$ は全単射写像で, 任意の $\alpha, \beta \in G$ に対して, $(\alpha\beta)^\rho = \alpha^\rho \beta^\rho$ とする。また, $0^\rho = 0$ と定義して ρ を $G \cup \{0\}$ 上の全単射写像に拡張する。このとき, $\tau_{i,j} = {\varphi_{i,j}}^\rho$ $(0 \leq i, j \leq k)$ とおき, $K = (\tau_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ と定義すると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。

定義 6.4　G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。$k = u\lambda + 1$ とする。$H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $GC(G; \lambda)$ とする。このとき, $\varphi_{i,i} = 0$ $(0 \leq i \leq k)$, $\varphi_{i,0} = \varphi_{0,j} = 1$ $(1 \leq i, j \leq k)$, $\varphi_{1,2} = 1$ であるならば, H は**正規化**されているという。

命題 6.5　任意の generalized conference matrix は, ある正規化された generalized conference matrix に同値である。

補題 6.6　G を位数 u の有限群とする。Φ を u 次の置換行列の全体とする (Φ は行列の積に関して群をなす)。G の元に順番を付け, それを固定しておく。$G = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{u-1}\}$
任意の $\varphi \in G$ に関して, $p(\varphi) = (p(\varphi)_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in G} \in \Phi$ を次のように定義する。

$$p(\varphi)_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{もし } \alpha = \varphi\beta \\ 0 & \text{もし } \alpha \neq \varphi\beta \end{cases}$$

このとき, $p : G \ni \varphi \longmapsto p(\varphi) \in \Phi$ は単射準同型写像である。

次の定理と系は, コンピュータを使って GC の同値性の判定したり, GC に対応する SDD の全自己同型群を計算するとき, 有用である。

定理 6.7　G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。$k = u\lambda + 1$ と

する。$H=(\varphi_{i,j})_{0\le i,j\le k}$ と $K=(\tau_{i,j})_{0\le i,j\le k}$ を共に正規化された $GC(G;\lambda)$ とする。$S=\{0,1,\ldots,k\}$ とする。このとき

H と K は同値である。
$\Longleftrightarrow \varphi_{f(i),f(0)}{}^{-1}\varphi_{f(i),f(j)}\varphi_{f(0),f(j)}{}^{-1}\varphi_{f(0),f(2)}\varphi_{f(1),f(2)}{}^{-1}\varphi_{f(1),f(0)}$
$=m(\tau_{i,j})\ \ (1\le i,j\le k)$
を満たす $(f,m)\in \mathrm{Sym}\ S\times \mathrm{Aut\ G}$ が存在する。

系 6.8　G を位数 $u(\ge 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。$k=u\lambda+1$ とする。$H=(\varphi_{i,j})_{0\le i,j\le k}$ を正規化された $GC(G;\lambda)$ とする。
$S=\{0,1,\ldots,k\}$,
$\Lambda=\{f\in \mathrm{Sym}\ S|\ \varphi_{f(i),f(0)}{}^{-1}\varphi_{f(i),f(j)}\varphi_{f(0),f(j)}{}^{-1}\varphi_{f(0),f(2)}$
$\varphi_{f(1),f(2)}{}^{-1}\varphi_{f(1),f(0)}=m(\varphi_{i,j})\ (1\le i,j\le k)\ \ \text{for some } m\in \mathrm{Aut}\ G\}$
このとき, $|\mathrm{Aut}\ \mathcal{D}(H)|=|\Lambda|u$

§7 $GC(G;\lambda)$ の 2 つの型

この節では, G が有限アーベル群あるとき, $GC(G;\lambda)$ が 2 つの型を持つことを述べる。このことは [IK] の 6.29 定理で書かれている。

補題 7.1　G を有限アーベル群とすると,

$$\prod_{x\in G} x=\begin{cases} 1 & \text{もし } |G|=\text{奇数 または } |I(G)|>1,\\ \alpha & \text{もし } I(G)=\{\alpha\}\end{cases}$$

この補題を使って次の定理を証明することが出来る。

定理 7.2([IK] の 6.29 定理)　G を位数 u のアーベル群とする。
$H=(\varphi_{i,j})_{0\le i,j\le k}$ を正規化された $GC(G;\lambda)$　$(k=u\lambda+1)$ とする。このとき任意の $0\le i\ne j\le k$ に対して

$$\varphi_{j,i}=\begin{cases} \alpha\varphi_{i,j} & \text{もし } \lambda=\text{奇数},\ I(G)=\{\alpha\},\\ \varphi_{i,j} & \text{その他}\end{cases}$$

系 7.3　G を位数 u のアーベル群とする。$H=(\varphi_{i,j})_{0\le i\ne j\le k}$ を上の $GC(G;\lambda)$　$(k=u\lambda+1)$ とする。このとき任意の $0\le i\ne j\le k$ に対して

$$\varphi_{j,i}=\begin{cases} \alpha(\varphi_{0,i}\varphi_{j,0})\varphi_{i,j}(\varphi_{i,0}\varphi_{0,j})^{-1} & \text{もし } \lambda=\text{奇数},\ I(G)=\{\alpha\},\\ (\varphi_{0,i}\varphi_{j,0})\varphi_{i,j}(\varphi_{i,0}\varphi_{0,j})^{-1} & \text{その他}\end{cases}$$

命題 7.4　G を位数 u のアーベル群とする。$H=(\varphi_{i,j})_{0\le i,j\le k}$ を正規化された $GC(G;\lambda)$ とする。u 次の行列 $L_{i,j}$　$(0\le i,j\le u-1)$ と p を補題 6.6 に

おけるように決めておく。このとき

(i) $1 \leq i \neq j \leq k$ に対して,
$\lambda =$ 奇数 で $I(G) = \alpha$ のとき, $L_{i,j} = p(\varphi_{i,j}) = p(\alpha)p(\varphi_{j,i}) = p(\alpha)L_{j,i}$
$\lambda =$ 偶数 または $|I(G)| \neq 1$ のとき, $L_{i,j} = p(\varphi_{i,j}) = p(\varphi_{j,i}) = L_{j,i}$
(ii) $|G| = 2$ で $I(G) = \{\alpha\}$ のとき
$\lambda =$ 奇数 ならば, $L_{i,j} = p(\alpha){L_{j,i}}^T \quad (1 \leq i \neq j \leq k)$
$\lambda =$ 偶数 ならば, $L_{i,j} = {L_{j,i}}^T \quad (1 \leq i \neq j \leq k)$
従って $\mathcal{D}(H)$ は self dual である。

補題 8.2 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を maximal holes を持つ $\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda, 2, 2\lambda+2]$, $k = 2\lambda + 1$ とする。(補題 8.1 より $\mathcal{D}$ はクラス正則である。) $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $\mathcal{D}$ に対応する $\varphi_{i,0} = \varphi_{0,j} = 0$ $(1 \leq i, j \leq k)$ である $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ (位数 2 の群 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ の演算は加法的に書く) とする (ただし, $\varphi_{1,2}$ は 0 でも 1 でもよい)。ここで $\varphi_{i,j} \in \mathbb{Z}_2 \quad (0 \leq i \neq j \leq k)$, また $0^* = 1$, $1^* = 0$ と定義する。このとき

(i) $\lambda =$ 奇数 のとき
- 任意の異なる $0 \leq i, j \leq k$ に対して ${\varphi_{i,j}}^* = \varphi_{j,i}$
- $\varphi_{i,i} \in \mathbb{Z}_2$ を

$$\varphi_{i,i} = \begin{cases} 0 & もし\ i = 0, \\ 1 & もし\ 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

と定義しなおすと, $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ は $\mathbb{Z}_2$ 上のアダマール行列になる。更に

$$f_{i,j} = \begin{cases} +1 & もし\ j = 0, \\ +1 & もし\ j \neq 0,\ 0 \leq i \leq k,\ \varphi_{i,j} = 1 \\ -1 & もし\ j \neq 0,\ 0 \leq i \leq k,\ \varphi_{i,j} = 0 \end{cases}$$

と定義すると $F = F(H) = (f_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ は $\{+1, -1\} (\subseteq \mathbb{C})$ 上の歪対称アダマール行列になる。
(ii) $\lambda =$ 偶数 のとき
任意の異なる $0 \leq i, j \leq k$ に対して $\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}$

補題 8.3 $\lambda =$ 奇数, $k = 2\lambda+1$ とする。$F = (f_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $f_{i,0} = +1$ $(0 \leq i \leq k)$, $f_{0,j} = -1$ $(1 \leq j \leq k)$ である位数 $k+1$ の歪対称アダマール行列とする。このとき, $\mathbb{Z}_2$ 上の $k+1$ 次の正方行列 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq k}$ を次のように定義すると, H は $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ である。$0 \leq i \neq j \leq k$ に対して

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} 0 & もし\ j = 0,\ 1 \leq i \leq k \\ 0 & もし\ 0 \leq i \neq j \leq k,\ j \neq 0,\ f_{i,j} = -1 \\ 1 & もし\ 0 \leq i \neq j \leq k,\ j \neq 0,\ f_{i,j} = +1 \end{cases}$$

例 8.4　$GC(\mathbb{Z}_2;7)$

$$H=\begin{pmatrix}
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & * & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & * & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & * & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & * & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & * & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & *
\end{pmatrix}$$

(H から自然に $\mathrm{SDD}_7[15,2,16]$ が定義される) に対応する位数 16 の歪対称アダマール行列は

$$F=\begin{pmatrix}
+ & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & -\\
+ & + & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + & + & +\\
+ & + & + & - & - & - & + & + & + & - & - & - & - & + & + & +\\
+ & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & - & + & +\\
+ & + & + & - & + & - & - & + & + & - & + & + & + & - & - & -\\
+ & + & + & - & + & + & + & - & - & + & - & + & - & + & - & -\\
+ & + & - & + & + & - & + & - & + & + & + & - & - & - & - & +\\
+ & + & - & + & - & + & + & + & - & - & + & - & + & + & - & -\\
+ & + & - & + & - & + & - & + & + & + & - & + & - & - & + & -\\
+ & - & + & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & -\\
+ & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + & + & - & + & - & +\\
+ & - & + & + & - & - & + & + & - & + & - & + & + & - & - & +\\
+ & - & + & - & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & + & -\\
+ & - & - & + & + & - & + & - & + & - & - & + & + & + & + & -\\
+ & - & - & - & + & + & + & + & - & - & + & + & - & - & + & +\\
+ & - & - & - & + & + & - & + & + & + & - & - & + & + & - & +
\end{pmatrix}$$

である。ここで簡単のため $+1=+,\ -1=-$ と書いた。非同値な $GC(\mathbb{Z}_2;7)$ は 1 個で, それは H である。非同値な位数 16 の歪対称アダマール行列は 2 個でそれらは F と F^T である。

§9 位数 n の射影平面と $\mathrm{SDD}_1[n,n-1,n+1]$

定理 9.1　$\pi=(\mathcal{Q},\mathcal{L},J)$ を位数 n の有限射影平面とする。$(r_\infty,L_\infty)\in\mathcal{Q}\times\mathcal{L}$ を anti-flag, すなわち $r_\infty \not{I} L_\infty$ とする。π の部分結合構造 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ を次のように定義する。

$(L_\infty)=\{r_0,r_1,\ldots,r_n\}$,

$(r_\infty)=\{L_0=r_0r_\infty,\ L_1=r_1r_\infty,\ldots,\ L_n=r_nr_\infty\}$,

$\mathcal{P}_i=(L_i)\backslash\{r_i,r_\infty\},\ \mathcal{B}_j=(r_j)\backslash\{L_j,L_\infty\}\ (0\le i,j\le n)$,

$\mathcal{P}=\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1\cup\ldots\cup\mathcal{P}_n,\ \mathcal{B}=\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1\cup\ldots\cup\mathcal{B}_n$,

$I = (\mathcal{P} \times \mathcal{B}) \cap J$
このとき, $\mathcal{D}$ は点クラスの集合 $\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\}$, ブロッククラスの集合 $\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$ を持つ $\mathrm{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ である。また任意の $p \in \mathcal{P}_i$ に対して, $(p) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, 任意の $B \in \mathcal{B}_j$ に対して, $(B) \cap \mathcal{P}_i = \emptyset$ $(0 \le i, j \le n)$ が成り立つ。この $\mathcal{D}$ を anti-flag (r_∞, L_∞) に関する $\mathrm{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ という。

定理 9.1 の逆が成り立つ。

定理 9.2　$n(\ge 2)$ を正整数とし, $\mathrm{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ とする。$\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n\}$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_n\}$ とする。また, $\mathcal{D}$ は maximal holes $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i)$　$(0 \le i \le n)$ を持つとする。$\mathcal{D}$ を部分構造として含む結合構造 $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を次のように定義する。$r_0, \ldots, r_n, r_\infty$, $L_0, \ldots, L_n, L_\infty$ を $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ に属さない $2(n+2)$ 個の記号とする。$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{r_0, \ldots, r_n, r_\infty\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} \cup \{L_0, \ldots, L_n, L_\infty\}$ とおく。I を含む $\mathcal{Q} \times \mathcal{L}$ の部分集合 J を次のように与える。
$p \in \mathcal{P}$, $L \in \mathcal{B}$ のとき, $pJL \Longleftrightarrow pIL$
$p \in \mathcal{P}$ のとき, $pJL_i \Longleftrightarrow p \in \mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le n)$
$L \in \mathcal{B}$ のとき, $r_jJL \Longleftrightarrow L \in \mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le n)$
r_iJL_j $(0 \le i, j \le n) \Longleftrightarrow i = j$
$r_\infty JL_i$ $(0 \le i \le n)$
r_jJL_∞ $(0 \le j \le n)$
$r_\infty \not{J} L_\infty$
このとき, π は位数 n の射影平面である。

命題 9.3　$n \ge 2$ を正整数で, $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を位数 $n(\ge 2)$ の射影平面とする。$(r_\infty, L_\infty) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{L}$ を固定された π の anti-flag とする。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を π の部分結合構造で, (r_∞, L_∞) に関する $\mathrm{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ とする。$\mathcal{D}$ の点クラスからなる集合, ブロッククラスからなる集合をそれぞれ Ω, Δ とする。このとき

(i) $f : (\mathrm{Aut}\ \pi)_{r_\infty, L_\infty} \ni \varphi \longmapsto \varphi|_{\mathcal{P} \cup \mathcal{B}} \in \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$ は上への同型写像になる。
(ii) G を π の (r_∞, L_∞)-homology group とすると, G^f は $\Omega \cup \Delta$ 上自明に作用する。($\therefore G^f$ は $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ 上半正則に作用する。)
(iii) H を Aut $\mathcal{D}$ の部分群で $\Omega \cup \Delta$ 上自明に作用すると, $H^{f^{-1}}$ は (r_∞, L_∞)-homology group である。

§10 $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ $(1 \le \lambda \le 11)$ の分類

E. Spence [S](1995) は位数 $4l$ $(l = 1, 2, \ldots, 7)$ の非同値な歪対称アダマール行列がそれぞれ $1, 1, 1, 2, 2, 15, 54$ 個あることを示した。この節では $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$　$(\lambda = 1, 2, \ldots, 11)$ の非同値類とそれらの全自己同型群を決定する。なお $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$　$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$ は位数 $4, 8, 12, 16, 20, 24$ の歪対称アダマール行列に対応することを注意しておく。これらの計算のために定理 6.7

と系 6.8 を用いた。

表 10.1

λ	$k=2\lambda+1$	$GC(\mathbb{Z}_2;\lambda)$ の個数	全自己同型群の位数
1	3	1	48
2	5	1	240
3	7	1	672
4	9	1	2880
5	11	1	2640
6	13	1	4368
7	15	1	672
8	17	1	9792
9	19	2	240,13680
10	21	0	
11	23	9	

注意 10.2 (i) 定理 2.2 より, 表 10.1 は $\lambda = 1, 3, 5, 7, 9$ のとき, $\mathrm{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$ の分類も与えていることを注意しておく。
(ii) $\lambda = 11$ の場合の 9 個の GC に対応する SDD の全自己自己同型群の位数は, それぞれ 40,12,24,16,16,24,48,2640,24288 である。

参考文献

[HM] T. C. Hine and V. C. Mavron, Translations of symmetric and complete nets, *Math. Z.* **182**, (1983), 237-244.

[IK] Y. J. Ionin and H. Kharaghani, Balanced generalized weighing matrices and conference matrices, in *Handbook of Combinatorial Designs, 2nd ed.*, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), Boca Raton, CRC Press(2007), 306–313.

[J] D. Jungnickel, On automorphism groups of divisible designs, *Canad. J. Math.* **34**(1982), 257-297.

[S] E. Spence, Classification of Hadamard matrices of order 24 and 28, *Discrete Math.* **140**(1995), 185-243.