

Defect groups, inertial quotients and fixed point algebras

千葉大学大学院理学研究院 音喜多 純拓
Yoshihiro Otokita
Graduate School of Science,
Chiba University

概要

本稿は RIMS 共同研究 (公開型) 「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」(2018 年 12 月) における講演内容の要約と補足である。

以下では G を有限群とする. Maróti [1] はその共役類全体の集合 $\text{Cl}(G)$ について, 次の定理を示した:

$$\frac{\text{Maróti (2016)}}{|G| \text{ の最大素因数 } p \text{ に対し, } 2\sqrt{p-1} \leq |\text{Cl}(G)|.}$$

これは有限群論の結果であるが, 一方でこの不等式の右辺は環論的に解釈することもできる. kG を係数体 k 上の群環とすると, その中心 \mathcal{Z} の次元は $|\text{Cl}(G)|$ である. そこで本研究では k の標数, G の構造と \mathcal{Z} の関係性を明らかにし, 上の不等式を別の視点から精密化することを目標とする. 特に本稿では G の Sylow 部分群と \mathcal{Z} の Loewy 列に関する新たな結果を紹介する. なお, タイトルに含まれている「不足群 (defect group)», 「惰性商群 (inertial quotient)», 「固定点代数 (fixed point algebra)」は主定理の証明に用いる特別な群, 環の名称である.

1 Masckhe の定理

ここでは群環 kG とその中心 \mathcal{Z} の基本的な性質を述べる.

各共役類 $C \in \text{Cl}(G)$ に対し, その元の kG における和を \hat{C} とする. このとき $\{\hat{C} \mid C \in \text{Cl}(G)\}$ は \mathcal{Z} の基底となり, したがって次元は $|\text{Cl}(G)|$ と一致する. この値は k の選び方とは無関係である. 一方, \mathcal{Z} の環論的構造は k の標数に依存しており, それを端的に示すのが次の Masckhe の定理である. 以下では一般の環 Λ に対し, その Jacobson 根基を $\text{rad } \Lambda$ とする.

定理 1.1 (Masckhe の定理). 以下は同値である.

- (1) k の標数が 0, または正標数で $|G|$ と素である,

$$(2) \text{rad } kG = \{0\},$$

$$(3) \text{rad } \mathcal{Z} = \{0\}.$$

この定理より k の標数が $|G|$ の素因数のときに $\text{rad } \mathcal{Z}$ は非自明なイデアルとなり、これが本研究の考察対象である。

2 中心指標

k が特別な体の場合には \mathcal{Z} の指標を用いて $\text{rad } \mathcal{Z}$ を特徴付けることができる。講演では述べなかったが、重要な性質なので本章で紹介する。

ここでは p を素数、 R を複素数体 \mathbb{C} における代数的整数環とする。単項イデアル pR を含む R の極大イデアル \mathfrak{p} を固定すると、剰余体 $k = R/\mathfrak{p}$ は標数 p を持つ。また $*$: $R \rightarrow k$ を自然な環準同型写像とする。

各既約指標 $\chi \in \text{Irr}(G)$ に対し、

$$\omega_\chi(\hat{C}) := |C|\chi(x)/\chi(1) \quad (\text{ただし } x \in C)$$

とすると、この値は指標理論の基本定理により代数的整数であるから、多元環準同型写像

$$\begin{aligned} \omega_\chi^* : \mathcal{Z} &\longrightarrow k \\ \hat{C} &\longmapsto \omega_\chi(\hat{C})^* \end{aligned}$$

が定義できる。この1次表現は異なる既約指標から定められた2つが一致する場合がある。そこで $\text{Irr}(G)$ における同値関係を「 $\omega_\chi^* = \omega_\psi^*$ 」によって導入し、その同値類における完全代表系を Ω とすると、次が成り立つ。

定理 2.1 (中心指標と Jacobson 根基の関係)。

(1) 集合 $\{\omega_\chi^* \mid \chi \in \Omega\}$ は \mathcal{Z} の1次表現全体を成す。

(2) $\text{rad } \mathcal{Z} = \bigcap_{\chi \in \Omega} \text{Ker } \omega_\chi^*$.

3 Loewy 構造

本章では群環の中心の Loewy 構造に関する結果を述べる。

以下では係数体 k は素数標数 p を持つと仮定し、群環 kG の中心を \mathcal{Z} とする。ここで Jacobson 根基から得られるイデアルの列

$$\mathcal{Z} \supseteq \text{rad } \mathcal{Z} \supseteq (\text{rad } \mathcal{Z})^2 \supseteq \cdots \supseteq \{0\}$$

とその長さ

$$L(\mathcal{Z}) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid (\text{rad } \mathcal{Z})^l = \{0\}\}$$

を考えると $L(\mathcal{Z}) \leq |\text{Cl}(G)|$ である. また Masckhe の定理より $L(\mathcal{Z}) = 1$ となるのは p が $|G|$ と素の場合に限る.

さて, Okuyama [2] は $L(\mathcal{Z})$ の上限について次を示した.

定理 3.1. $L(\mathcal{Z}) \leq |S_p|$ (ただし S_p は G の Sylow p -部分群).

一方, 本研究では Maróti の結果との関係から $L(\mathcal{Z})$ の下限を知りたい. そこで次の定理を得た [3, Theorem].

定理 3.2 (主定理). S_p を G の Sylow p -部分群とすると

$$\frac{p^\varepsilon + p - 2}{p - 1} \leq L(\mathcal{Z}).$$

ただし $p^\varepsilon = \exp(Z(S_p))$.

ここで上の定理における注意を2つ挙げる.

- $\varepsilon \neq 0, 1$ のときは $2\sqrt{p-1} < L(\mathcal{Z}) \leq |\text{Cl}(G)|$ が成り立つ.
- $\varepsilon = 1$ のときは p や S_p に応じて変化する $L(\mathcal{Z})$ の下限を与えることは一般にはできない. 整数 $a \geq 1$ に対し

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} ; u \in \mathbb{F}_q^\times, v \in \mathbb{F}_q \right\}$$

(ただし $q = p^a$) とすると S_p は位数 p^a の初等可換群 (つまり $\varepsilon = 1$ の場合) である. このとき a の値に依らず常に $L(\mathcal{Z}) = 2$ が成り立つ.

以下, 主定理の証明を簡潔に述べる.

Masckhe の定理より $|S_p| \neq 1$ としてよい. また k は十分大きい (例えば代数的閉体) と仮定してよい. ここで b をブロックべき等元, D, E をその不足群, 惰性商群とする. 不足群と惰性商群の定義は省略するが, D は G の p -部分群で, E はその自己同型群 $\text{Aut}(D)$ のある p' -部分群と同型である. 特に b が主ブロックべき等元るとき, D は G の Sylow p -部分群で $E = N_G(D)/DC_G(D)$ である. このとき E は $Z(D)$ に作用するので群環 $k[Z(D)]$ にも作用し, 固定点代数

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in k[Z(D)] \mid \alpha^e = \alpha, \forall e \in E\}$$

が定義できる. ここで Broué の同型定理 (1979) より, $\mathcal{Z}b/N \simeq \mathcal{A}$ となる $\mathcal{Z}b$ のべき零イデアル N が存在する (この N は Brauer 準同型写像の核である). したがって $\mathcal{Z}b$ について考察するために, まずは固定点代数 \mathcal{A} について調べる必要があり, 次の補題が示される.

補題 3.3. $p^m = \exp(Z(D))$, $t = p^{m-1} + \cdots + p + 1$ とすると $\alpha^t \neq 0$, $\alpha^{p^m} = 0$ となる $\alpha \in A$ が存在する.

この補題を主ブロックべき等元に適用する. 上で述べた主ブロックの性質より, $\beta^u \neq 0$, $\beta^{p^e} \in N$ となる $\beta \in Zb$ が存在する (ただし $u = p^{e-1} + \cdots + p + 1$). N はべき零イデアルなので β はべき零元となり, したがって $0 \neq \beta \in \text{rad } Zb \subseteq \text{rad } Z$ より $u < L(Z)$ を得る. ここで u に 1 を加えた値が主定理の左辺なので, 以上で証明を完了する.

References

- [1] A. Maróti, *A lower bound for the number of conjugacy classes of a finite group*, Adv. Math. **290** (2016), 1062–1078.
- [2] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408
- [3] Y. Otokita, *Lower bounds on Loewy lengths of centers of blocks*, submitted.