Solovay 還元を用いた第一不完全性定理の証明

首都大学東京 理学研究科 数理科学専攻
今井 裕幸
Hiroyuki Imai
Department of Mathematical Sciences, Tokyo Metropolitan University

Abstract

ゲーデルの第一不完全性定理の今日最もよく知られた証明方法は対角化定理を用いて「自分自身は証明できない」という意味をもつとされるゲーデル文を構成する方法である．しかしこの定理は形式化された証明への深い理解が必要で非専門家にとってはわかりにくい．本稿では解析的なアイディアに基づき，Chaitin の停止確率，Solovay 還元などの概念を用いて同定理に別証明を与えた．

1 序

ゲーデルの第一不完全性定理は 1931 年に発表されて以来, 様々な証明法が考案されたが, 今日最も標準的な定式化は以下のようなものである.

定理 1.1 (ゲーデルの第一不完全性定理)**.** 理論 T をペアノ算術 PA の拡大で計算可能であるとする. このとき, ある文（自由変数のない論理式）G が存在して以下が成り立つ.

1. T が無矛盾ならば $T \nvdash G$
2. T が Σ_1 健全ならば $T \nvdash \neg G$

Σ_1 健全ならば無矛盾である．よって理論 T が Σ_1 健全ならば $T \nvdash G$ かつ $T \nvdash \neg G$ である．

定理に現れる文 G は理論 T のゲーデル文と呼ばれる. ゲーデル文は「自分自身は証明できない」という意味を持つ文である. 第一不完全性定理の最もよく知られた証明で鍵となるのが，こうした自己言及的な文の存在である．ゲーデル文の存在を示すために用いられるのが対角化定理であり，その証明は以下の 3 つのアイディアが用いられる．第一に論理式がゲーデル数の概念を用

いて計算可能な手順で自然数化されること，第二に同様に自然数から論理式を再現できること, 第三に PA における計算可能関数の表現可能性である. しかしこの定理の証明は形式化された証明への理解が必要で, 慣れていない人にとってはわかりにくい．これを緩和するため，本稿では第一不完全性定理の別証明を紹介する．

対角化定理は，本質的にはある集合が計算不可能であることに基づいている．また，これまでの研究で様々な問題の計算不可能性から第一不完全性定理が証明されることがわかっている．その中で注目したのが Chaitin の不完全性定理である．Chaitin は自身が考案した停止確率と呼ばれる実数 Ω を用いて不完全性定理を証明している．

Ω は計算不可能な実数の代表例であり，Chaitin の証明は Ω の計算不可能性に基づいている．Ω については実数の複雑さに関するランダムネスの理論においても様々に論じられている．我々は 1-ランダムという性質と，Solovay 還元に注目した．1-ランダムは計算不可能よりも強い条件であり，停止確率 Ω はその性質をもつ．Solovay 還元は実数どうしの複雑さを比較する擬順序であり，ランダムネスや計算可能解析の分野で用いられている．また，Chaitin は Ω を用いた不完全性定理の証明とは別に，次で示すような Kolmogorov 計算量を用いた不完全性定理を証明している．

定理 1.2 (Chaitin の不完全性定理（1974）)**.** 理論 T は PA の拡大で計算可能，かつ無矛盾であるとする．このときある $b \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $a \in \mathbb{N}$ について

$$T \nvdash b < K(a)$$

となる．ただし，$K(x)$ を x の Kolmogorov 計算量とする．

x の Kolmogorov 計算量は，x を出力するプログラムで最小のもののサイズで定義される．この定理が述べているのは，ある自然数 b が存在して任意の自然数 a について「a の Kolmogorov 計算量が b よりも大きいこと」が証明できない，ということである．しかし，どんな自然数 n についても，Kolmogorov 計算量が n よりも大きくなる自然数は存在する．サイズが n 以下となるようなプログラムは有限個しか存在しないからである．この定理はある理論において，真であるが証明できない命題が存在するという一種の不完全性を表している[1]．この定理の証明は「自然数 b から Kolmogorov 計算量が b を超えるような自然数を実効的な手順で得ることはできない」という事実に基づいている．直感的には，計算量が大きい数は,「計算可能」な手順では生成できない，ということである．証明の概略は以下の通りである．

[1]「真ではあるが証明できない命題が存在する」という主張と第一不完全性定理がいっている構文論的な「肯定も否定も証明できない命題が存在する」という主張には違いがある．このことについては菊池誠 [7] の p.283-287 を参照.

定理 1.2 の証明 [6]
まず，背理法の仮定から任意の自然数 b についてある自然数 a が存在して

$$T \vdash b < K(a)$$

となる．理論 T が計算可能であることから，以下を満たす計算可能関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する．

$$T \vdash b < K(f(b))$$

このことは，上で述べた事実と矛盾する． □

我々はこの証明の手法に注目し，背理法の仮定により計算可能関数を構成できることを用いて矛盾を導くことにした．

以上で述べたいくつかの点を参考にして，解析的なアイディアに基づいて，理論から証明も反証もできない命題を構成し，第一不完全性定理を示した．

2 準備

定義 2.1 (Chaitin の停止確率)**.** U を万能 prefix-free な Turing 機械とする．Ω は以下で定義される実数である．

$$\Omega := \sum_{p \in \mathrm{dom} U} 2^{-|p|}$$

これは，以下の定理より収束し，$0 < \Omega < 1$ となる．

定理 2.2 (Kraft の不等式)**.** prefix-free 集合 $A \subseteq \{0,1\}^*$ に対して

$$\sum_{\sigma \in A} 2^{-|\sigma|} \leq 1$$

Ω を Chaitin の停止確率（halting probability）と呼ぶ．

定義 2.3 (Solovay)**.** 実数 α が実数 β に Solovay 還元可能 (Solovay reducible) であるとは，定数 c と計算可能関数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ が存在して，$q \in \mathbb{Q},\ q < \beta$ である任意の q に対して

$$f(q) \downarrow < \alpha \text{ かつ } \alpha - f(q) < c(\beta - q)$$

となることであり，$\alpha \leq_S \beta$ とかく．

定義 2.4 (left-c.e. real)**.** 実数 α が left-c.e. であるとは，以下の集合が帰納的可算（c.e.）となることである．

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\}$$

補足 2.5. また，実数 α が left-c.e. であることと，実数 α に収束する計算可能な狭義単調増加有理数列が存在することは同値である．

定義 2.1 において，部分和をとることによって Ω に収束する計算可能，狭義単調増加有理数列が得られるので，Ω は left-c.e. であることがわかる．

命題 2.6. α, β を left-c.e. 実数とし，$\{q_i\}, \{r_i\}$ をそれぞれ実数 α, β に収束する狭義単調増加，計算可能な有理数列とする．このとき，$\alpha \leq_S \beta$ となる必要十分条件は，定数 c と計算可能関数 g が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して以下を満たすことである．

$$\alpha - q_{g(n)} < c(\beta - r_n)$$

定義 2.7 (Solovay 完全)**.** left-c.e. 実数 β が Solovay 完全であるとは，任意の left-c.e. 実数 α に対して

$$\alpha \leq_S \beta$$

となることをいう．

定理 2.8 (Solovay)**.** Ω は Solovay 完全である．

3　結果

結果を紹介する．ここで left-c.e. 実数 α に対して $\{\alpha_s\} \nearrow \alpha$ と書いたとき $\{\alpha_s\}$ は実数 α に収束する計算可能，狭義単調増加な有理数列で $\alpha_0 > 0$ であるとする．

定理 3.1 (Solovay 還元を用いた決定不能命題)**.** 理論 T を PA の拡大で帰納的可算かつ Σ_1 健全であるとする．Ω は Chaitin の停止確率，β は実数で left-c.e. かつ Solovay 完全でないものとし，$\{\omega_s\}, \{q_s\} \nearrow \Omega$，$\{\beta_s\}, \{r_s\} \nearrow \beta$ とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\forall L > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m, t \in \mathbb{N} \\
&T \nvdash \forall s \geq \bar{t}\ \left(|\omega_s - q_{\overline{m}}| < L|\beta_s - r_{\overline{n}}|\right)
\end{aligned}$$

この定理の証明は背理法を用いる．論理式 $\forall s \geq \bar{t}\ \left(|\omega_s - q_{\overline{m}}| < L|\beta_s - r_{\overline{n}}|\right)$ を $\varphi(\bar{t}, \overline{m}, \overline{n})$ とおく．背理法の仮定から，正の有理数 L を固定したとき，任意の n に対して

$$T \vdash \varphi(\bar{t}, \overline{m}, \overline{n})$$

が成り立つような自然数 m, t を計算可能な手順で得られることから矛盾を導く．

補足 3.2. 定理 3.1 における論理式 $\varphi(\bar{t}, \overline{m}, \overline{n})$ すなわち

$$\forall s \geq \bar{t}\ \left(|\omega_s - q_{\overline{m}}| < L|\beta_s - r_{\overline{n}}|\right)$$

は任意の n に対してある t, m が存在し，$\mathbb{N} \models \varphi(\bar{t}, \overline{m}, \overline{n})$ となる．このことから T の不完全性が導かれる．

4　結果に関する補足

ここでは，定理 3.1 に関するいくつかの注意と補足を行う．

4.1　論理式に関する注意

まず，定理 3.1 に現れる論理式に現れる計算可能関数について注意を述べる．

補足 4.1 (論理式の形に関する注意)**.** 定理 3.1 に現れる論理式 $\varphi(\bar{t}, \overline{m}, \overline{n})$

$$\forall s \geq \bar{t}\ \left(|\omega_s - q_{\overline{m}}| < L|\beta_s - r_{\overline{n}}|\right)$$

は以下の Π_1 論理式の略記であるとする．

$$\forall s \geq \bar{t}\Big(\forall\omega\forall q\forall\beta\forall r\big(\psi_1(s,\omega)\wedge\psi_2(\overline{m},q)\wedge\psi_3(s,\beta)\wedge\psi_4(\overline{n},r) \to |\omega-q| < L|\beta-r|\big)\Big)$$

ただし，$\psi_1(x,y), \psi_2(x,y), \psi_3(x,y), \psi_4(x,y)$ はそれぞれ計算可能関数 $n \mapsto \omega_n, n \mapsto q_n, n \mapsto \beta_n, n \mapsto r_n$ を表現する Σ_1 論理式であるとする．

つまり，数列 ω_n などは自然数の入力 n に対して数列の第 n 項を出力する計算可能関数 $\omega(n) = \omega_n$ と同一視し，また，論理式 $\varphi(\bar{t}, \overline{m}, \overline{n})$ に現れるこれらの計算可能関数は $\omega(n)$ を表す関数記号が言語に入っているのではなく，あくまで上で補足したように扱われているとする．

さらに，論理式内の $|\omega - q| < L|\beta - r|$ についても注意が必要である．ここで現れる ω などは有理数であり，ここで構成した算術の言語はあくまで自然数に関する命題を論理式で表現するものであり，有理数を扱える体系ではない．また，絶対値記号などもこの論文で定義した言語には含まれていない．このことについてここでは，$\omega = \omega^\top/\omega^\perp, q = q^\top/q^\perp, L = L^\top/L^\perp, \beta = \beta^\top/\beta^\perp, r = r^\top/r^\perp$ と考え，$|\omega - q| < L|\beta - r|$ は分母を払った形の論理式

$$\begin{aligned}&|\omega^\top r^\perp \beta^\perp L^\perp - q^\top \omega^\perp r^\perp \beta^\perp L^\perp|\\&< |L^\top \beta^\top \omega^\perp r^\perp q^\perp - L^\top r^\top \omega^\perp \beta^\perp q^\perp|\end{aligned}$$

を表すとする．また，絶対値記号については，2 つの自然数からその差の絶対値を得る関数 $f(x,y)=|x-y|=z$ は計算可能であるから，f を表現する Σ_1 論理式を $\psi_f(x,y,z)$ として $|\omega-q|<L|\beta-r|$ は

$$\forall u\forall v(\psi_f(\omega,q,u)\wedge\psi_f(\beta,r,v)\to u<Lv)$$

と表すとする．上記の 3 つを合わせて得られる Π_1 論理式が略記表現のない論理式である．

4.2　定理の仮定に関する補足

前の節において，定理 3.1 の理論 T は PA の拡大で帰納的可算，Σ_1 健全という仮定であった．しかし，定理の証明に実質的に必要なのは，理論が帰納的可算であること，全域的な計算可能関数が表現可能であることおよび Π_1 健全であることである．この条件を満たすのは，より弱い仮定でも可能である．

定理 4.2 (弱い算術における計算可能関数の表現可能性)**.** 理論 R はモストウスキ-ロビンソン-タルスキの体系であるとし，理論 T を R の拡大で無矛盾であるとする．f を全域的な計算可能関数とするとき，以下は同値．

(1) f は計算可能である．

(2) f は T 上で Σ_1 論理式で表現可能である．

(3) f は T 上で表現可能である．

この定理は，ロビンソン算術 Q に不等号の公理 $\forall x\forall y(x<y\leftrightarrow\exists z(z+S(x)=y))$ を加えた理論（$Q_<$ と表す）でも証明可能である．この定理と R の Σ_1 完全性などの証明は田中一之 [9] を参照．

また, 次の事実がある．

補題 4.3. 理論 T を R の拡大で無矛盾ならば，Π_1 健全である．

証明. φ を Π_1 文とする．$T\vdash\varphi$ を仮定する．T の無矛盾性から $T\nvdash\neg\varphi$ である．R は Σ_1 完全だから $\mathbb{N}\nvDash\neg\varphi$ が成り立つ．ゆえに $\mathbb{N}\models\varphi$. □

以上より，以下を得る．

定理 4.4 (Solovay 還元を用いた第一不完全性定理の証明)**.** 理論 T を理論 R（$Q_<$）の拡大で帰納的可算かつ無矛盾であるとする．$\varphi(x,y,z)$ は補足 4.1 でみた論理式であるとする．このとき，以下が成り立つ．

$$\forall L>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall m,t\in\mathbb{N}\ \ T\nvdash\varphi(\overline{t},\overline{m},\overline{n})$$

補足 3.2 で見たように，任意の n に対してある (t,m) が存在して $\mathbb{N} \models \varphi(\bar{t},\overline{m},\overline{n})$ となるため，T では真なる命題が証明できないことになり，不完全性定理の一種の証明になっていることがわかる．しかし，ここで注意が必要なのは定理 4.4 では Σ_1 健全性を仮定していないので $\varphi(\bar{t},\overline{m},\overline{n})$ について $T \nvdash \neg\varphi(\bar{t},\overline{m},\overline{n})$ となることまではいえない．つまり，意味論的に T が不完全であることはわかっても, それは T が構文論的な完全性を満たしていないことを示せたわけではない．

また定理において 1-ランダムな実数 Ω を使ったが，2 つの left-c.e. 実数 α, β で，Solovay 還元について $\alpha \leq_S \beta$ かつ $\beta \not\leq_S \alpha$ が成り立つ（すなわち，次数（degree）が異なる）ものであれば同様の証明ができる．本質的には定理の証明において，Ω の計算不可能性を用いたわけではなく Solovay 還元に関する次数の差を利用した，ということである．

5　今後の課題

今回，ランダムネス，計算可能解析の分野で用いられるいくつかの事実を用いて，第一不完全性定理を示した．その中の実数どうしの擬順序になる Solovay 還元はある性質をもつ Lipschitz 連続関数の存在と同値になることがわかっている．以下に示す．

定理 5.1 (M.Kumabe,T.Suzuki,K.Miyabe,Y.Mizusawa [3]Theorem1.)**.**
以下は同値.

- $\alpha \leq_S \beta$
- ある関数 $f : (-\infty,\beta) \to (-\infty,\alpha)$ が存在して以下を満たす.
    1. f は「計算可能」.
    2. f は Lipshitz 連続.
    3. $x \to \beta$ のとき $f(x) \to \alpha$.
    4. f は単調増加.

ただし，ここでいう「計算可能」とは通常の自然数上で定義される計算可能とは異なり，実数上の関数に対して新たに定義される概念である（詳細は省く）.

今後はこのことを利用して決定不能命題の構成を試みる.

謝辞

今回原稿を書くにあたり，指導教員の鈴木登志雄准教授にはご丁寧にご指導頂きました．深く御礼申し上げます．

6 参考文献

[1] G.J.Chaitin, Information-theoretic limitations of formal systems. Journal of the ACM21, pp.403-424,1974.

[2] G. J. Chaitin, Incompleteness Theorems for Random Reals, Advances in Applied Mathematics Volume 8, Issue 2, June 1987, Pages 119-146.

[3] M.Kumabe, K.Miyabe, Y.Mizusawa, T.Suzuki, Solovay reduction and continuity, arXiv:1903.08625 [math.LO],2019.

[4] R. G. Downey, D. R. Hirschfeldt, Algorithmic Randomness and Complexity, Theory and Applications of Computability, Springer, New York 2010.

[5] A.Nies, Computability and Randomness, Oxford university press, 2009.

[6] L.D.Beklemishev, Gödel incompleteness theorems and the limits of their applicability.I Russian Math. Surveys 65:5 857-899,2010.

[7] 菊池誠， 不完全性定理， 共立出版 2014.

[8] 田中一之編， ゲーデルと 20 世紀の論理学 3:不完全性定理と算術の体系，東京大学出版会 2007.

[9] 田中一之著， 数学基礎論序説:数の体系への論理的アプローチ， 裳華房 2019.

[10] 前原昭二， 数学基礎論入門, 朝倉書店 1977.