

Some variants of analytic (cut) of modal logic **S5**, **K4B**, and **K_t4**

静岡大学 創造科学技術大学院 矢崎大志 *

Daishi Yazaki

Graduate School of Science and Technology,
Shizuoka University

1 はじめに

様相論理 **S5** と **K4B**, 及び時相論理 **K_t4** に対応したシークエント体系は全ての (*cut*) は取り除くことが出来ないことが知られている. 高野 [4] と丸山 他 [1] はこれらの体系の (*cut*) を以下に制限できることを示した.

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, C \quad C, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (cut)^a \text{ (ただし, } C \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda))$$

ここでは, $\text{Sf}(\Gamma)$ は論理式の集合 Γ の部分論理式全体の集合を表す. 特に丸山は, 三部分付値と呼ばれる特別な証明不可能な式を用いて, 意味論的な手法で証明を与えている.

2018 年, 高野 [6] は *analytically saturated* を用いて, 推論規則と Kripke モデルの間の関係を解析した. これは, 三部分付値を一般化させたとみることにも出来る. この結果を用いることで, **K4B** と **S5** の (*cut*) を (*cut*)^a に制限できることを意味論的な手法を用いて示すことが出来る.

本稿の目標は, 大きく二つに分けられる. 一つは, 高野 [6] の手法を改良することで, **S5** と **K4B** の (*cut*) を (*cut*)^a よりも強い制限に出来ることを意味論的に証明することである. そのために, **K4B** の推論規則は高野のものとは異なるものを用いる. もう一つは, 高野の手法を時相論理 **K_t4** に対応したシークエント体系に適用させることである. ここでは, 丸山の結果を基に, 推論規則と Kripke モデルの間の関係を調べる. さらに, この体系の (*cut*) を (*cut*)^a よりも強い制限に出来ることを示す.

2 Analytically saturated について

まず初めに, 高野 [6] が導入した *analytically saturated* について説明する. ここでは論理記号として \neg, \supset, \square のみを用い, p, q, r, \dots と A, B, C, \dots はそれぞれ命題変数と論理式を表す. また, $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$ は論理式の有限列を表す.

ここで扱う全てのシークエント体系は以下の性質を満たすものとする.

* 本稿は, 著者の博士論文の一部を含むものです.

Stipulation 1. 始式として $A \rightarrow A$ を持ち、推論規則として $(\rightarrow w)$, $(w \rightarrow)$, $(\rightarrow e)$, $(e \rightarrow)$, $(\rightarrow c)$, $(c \rightarrow)$ を持つ.

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta} (w \rightarrow) \quad \frac{\Delta, B, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, A, B, \Gamma \rightarrow \Theta} (e \rightarrow) \quad \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta} (c \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, A} (\rightarrow w) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B, A, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, A, B, \Lambda} (\rightarrow e) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A} (\rightarrow c)$$

よってこれ以降, Γ や Δ は有限集合として扱う.

定義 2.1. (高野 [6, Definition 1.1]) GL を Stipulation 1 を満たすシーケント体系とする. $\Gamma \rightarrow \Theta$ が GL で *analytically saturated* であるとは, 以下を満たす場合である.

- (a) $\Gamma \rightarrow \Theta$ は GL で証明不可能.
- (b) 任意の $A \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta)$ に対して, $A, \Gamma \rightarrow \Theta$ が GL で証明不可能ならば $A \in \Gamma$, $\Gamma \rightarrow \Theta, A$ が GL で証明不可能ならば $A \in \Theta$.

GL の *analytically saturated sequent* 全体の集合を W_{GL} とする.

analytically saturated sequent を u, v, w, \dots で表し, u の左辺と右辺に出現する論理式全体の集合をそれぞれ $a(u)$, $s(u)$ で表す. 明らかに, $a(u) \cap s(u) = \emptyset$ である. また, 各 *analytically saturated sequent* u に対し, Γ_u と Θ_u を以下のように定める.

$$\Gamma_u = \{B \mid \Box B \in a(u)\}, \quad \Theta_u = \{B \mid \Box B \in s(u)\}$$

analytically saturated sequent は証明不可能な式を基に構築することが出来る.

補題 2.2. (高野 [6, Lemma 1.3]) GL を Stipulation 1 を満たすシーケント体系とする. $\Gamma \rightarrow \Theta$ が GL で証明不可能であるとき, 以下を満たすような *analytically saturated sequent* u が存在する.

- (i) $\Gamma \subseteq a(u)$ かつ $\Theta \subseteq s(u)$
- (ii) $a(u) \cup s(u) \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta)$

analytically saturated sequent は, その体系で *admissible* な推論規則によって様々な性質をもつ. (推論が GL で *admissible* であるとは, その推論の下式が GL で証明可能か, 上式のいずれかが GL で証明不可能である場合である.) 例えば, 以下のようなものが挙げられる.

命題 2.3. (高野 [6, Proposition 3.1]) GL を Stipulation 1 を満たすシーケント体系とする. このとき, 以下が成り立つ.

GL で任意の $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda$ と $B \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda)$ に対して $(cut)^a$ が *admissible* $\Leftrightarrow \text{Sf}(a(u) \cup s(u)) \subseteq a(u) \cup s(u)$.

analytically saturated を導入する目的は, このような性質を用いてシーケント体系の

Kripke completeness を示すことである.

補題 2.4. (高野 [6, Proposition 1.4]) GL を *Stipulation 1* を満たすシークエント体系とする. $W \subseteq W_{GL}$ と W 上の二項関係 R からなる *Kripke frame* (W, R) が任意の A, B と $u \in W$ に対して以下の条件を満たしているとする.

- $(\neg - a)$ $\neg A \in a(u)$ ならば, $A \in s(u)$.
- $(\neg - s)$ $\neg A \in s(u)$ ならば, $A \in a(u)$.
- $(\supset - a)$ $A \supset B \in a(u)$ ならば, $A \in s(u)$ または $B \in a(u)$.
- $(\supset - s)$ $A \supset B \in s(u)$ ならば, $A \in a(u)$ かつ $B \in s(u)$.
- $(\Box - a)$ $\Box A \in a(u)$ ならば, 任意の $v \in W$ に対して uRv ならば $A \in a(v)$.
- $(\Box - s)$ $\Box A \in s(u)$ ならば, ある $v \in W$ が存在して, uRv かつ $A \in s(v)$.

このとき, \models を $u \models p \Leftrightarrow p \in a(u)$ となるような (W, R) 上の *satisfaction relation* とすると, 任意の論理式 C と $u \in W$ に対して以下が成り立つ.

$$C \in a(u) \Rightarrow u \models C, \text{ かつ } C \in s(u) \Rightarrow u \not\models C$$

仮に, 任意の $u \in W_{GL}$ に対して以下を満たすような *Kripke frame* (W, R) が存在しているとする.

- $u \in W \subseteq W_{GL}$.
- (W, R) は補題 2.4 の条件 $(\neg - a) \sim (\Box - s)$ を全て満たす.
- 二項関係 R は L の条件を満たす.

このとき, $\Gamma \rightarrow \Theta$ が GL で証明不可能であるとすると, 補題 2.2 よりこれを基にした *analytically saturated sequent* $u \in W_{GL}$ が存在する. この u に対し, 上の条件を満たすような *Kripke frame* が存在すると, 補題 2.4 の *satisfaction relation* \models を用いて, $C \in \Gamma$ ならば $u \models C$ かつ $C \in \Theta$ ならば $u \not\models C$ であるような *Kripke model* を構築することが出来る. すなわち, $u \not\models \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Theta$ となる. しかも, このモデルが L の条件を満たしているのであれば, GL の *Kripke completeness* が得られることになる.

よって, 任意の $u \in W_{GL}$ に対して上の条件を満たす *Kripke frame* を構築することが目標となる. このような *Kripke frame* が構築できるかは, GL の推論規則に依存する.

例えば, 以下が成り立つ.

命題 2.5. (高野 [6, Proposition 1.6]) GL を *Stipulation 1* を満たすシークエント体系とする. このとき, 任意の A, B に対して以下が成り立つ.

- (1) GL で $(\neg \rightarrow)$ が任意の Γ と Θ で *admissible*
 \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $\neg A \in a(u)$ ならば $A \in s(u)$.
- (2) GL で $(\rightarrow \neg)$ が任意の Γ と Θ で *admissible*
 \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $\neg A \in s(u)$ ならば $A \in a(u)$.

- (3) GL で $(\supset \rightarrow)$ が任意の Γ と Θ で *admissible*
 \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $A \supset B \in a(u)$ ならば $A \in s(u)$ または $B \in a(u)$.
- (4) GL で $(\rightarrow \supset)$ が任意の Γ と Θ で *admissible*
 \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $A \supset B \in s(u)$ ならば $A \in a(u)$ かつ $B \in s(u)$.

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} (\neg \rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A} (\rightarrow \neg)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta} (\supset \rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B} (\rightarrow \supset)$$

Stipulation 2 を以下のように導入する.

Stipulation 2. 推論規則として, $(\neg \rightarrow)$, $(\rightarrow \neg)$, $(\supset \rightarrow)$, $(\rightarrow \supset)$ をもつ.

命題 2.5 より, Stipulation 1 と 2 を満たす任意のシークエント体系 GL の *analytically saturated* で構築される Kripke frame は, $(\neg - a)$, $(\neg - s)$, $(\supset - a)$, $(\supset - s)$ を満たすことがわかる.

残りの $(\Box - a)$ と $(\Box - s)$ については推論規則だけでなく, 用いる二項関係にも依存する. 高野 [6] は様相論理の各体系に対して, その体系の *analytically saturated sequent* 全体の集合を用いて Kripke frame を構築した.

次の章では, **S5** と **K4B** の体系について, $(\Box - a)$ と $(\Box - s)$ を満たすために必要な *analytically saturated sequent* のみを用いるという手法で有限モデルを構築する.

3 S5 と K4B について

シークエント体系 $G(\mathbf{S5})$ は LK に以下の推論規則を足すことで得られるものとする.

$$\frac{\Box \Gamma \rightarrow \Box \Theta, A}{\Box \Gamma \rightarrow \Box \Theta, \Box A} (S5) \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Box A, \Gamma \rightarrow \Theta} (T)$$

K4B に対応したシークエント体系については, 以下の推論規則を用いたものが良く知られている.

$$\frac{\Gamma, \Box \Gamma \rightarrow \Box \Theta, \Box \Omega, A}{\Box \Gamma \rightarrow \Box \Theta, \Omega, \Box A} (B45)$$

しかし, この推論規則はこれ自身が *subformula property* を満たさない形をしているため, 今回の議論をするにあたって少し扱いにくい. そこで, ここではシークエント体系 $G(\mathbf{K4B})$ を LK に以下の推論規則を足すことで得られるものとする.

$$\frac{\Box \Gamma \rightarrow \Box \Theta, A}{\Box \Gamma \rightarrow \Box \Theta, \Box A} (S5) \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Box A, \Gamma \rightarrow \Theta, \Box B} (T)'$$

$G(\mathbf{S5})$ と $G(\mathbf{K4B})$ は全ての (*cut*) を取り除くことが出来ない. 例えば以下の証明図は $G(\mathbf{K4B})$ における (*cut*) を取り除くことが出来ない証明図の例である.

$$\frac{\frac{\frac{\Box\neg p \rightarrow \Box\neg p}{\rightarrow \Box\neg p, \neg\Box\neg p} (\rightarrow\neg)}{\rightarrow \Box\neg p, \Box\neg\Box\neg p} (S5) \quad \frac{\frac{p \rightarrow p}{\neg p, p \rightarrow} (\neg\rightarrow)}{\Box\neg p, p \rightarrow \Box\neg\Box\neg p} (T)'}{\frac{p \rightarrow \Box\neg\Box\neg p, \Box\neg\Box\neg p}{p \rightarrow \Box\neg\Box\neg p} (\rightarrow c)} (cut)$$

ここからは、 $G(\mathbf{S5})$ と $G(\mathbf{K4B})$ の (cut) 制限について考える。 $G(\mathbf{S5})$ については、高野 [4] によって $(cut)^a$ に制限できることが示されているが、本稿ではさらに制限できることを示すことが目標になる。

まず初めに、特別な subformula である *box internal subformula* を導入する。

定義 3.1. Γ を空でない論理式の集合とする。論理式 A が Γ の *box internal subformula* であるとは、ある $\Box B \in \Gamma$ が存在して、 $A \in \text{Sf}(\{B\})$ となる場合である。 Γ の *box internal subformula* 全体の集合を $\text{BSf}(\Gamma)$ とする。

例えば、 $\Gamma = \{p \supset \Box q, \Box(r \supset s)\}$ であるとき、 $\text{Sf}(\Gamma)$ と $\text{BSf}(\Gamma)$ はそれぞれ以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \text{Sf}(\Gamma) &= \{p \supset \Box q, \Box q, p, q, \Box(r \supset s), r \supset s, r, s\} \\ \text{BSf}(\Gamma) &= \{r \supset s, r, s\} \end{aligned}$$

任意の空でない集合 Γ に対して $\text{BSf}(\Gamma) \subsetneq \text{Sf}(\Gamma)$ かつ $\text{Sf}(\Gamma) = \text{BSf}(\Box\Gamma)$ が成り立つ。また、 $\Gamma \subseteq \Theta$ であるとき、 $\text{BSf}(\Gamma) \subseteq \text{BSf}(\Theta)$ となる。

命題 3.2. $G(\mathbf{S5})$ と $G(\mathbf{K4B})$ の (cut) は、以下のものに制限することが出来る。

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \Box B \quad \Box B, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (cut)^b \quad (\text{ただし, } \Box B \in \text{BSf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda))$$

$G(\mathbf{S5})$ と $G(\mathbf{K4B})$ の (cut) を $(cut)^b$ に制限した体系をそれぞれ $G(\mathbf{S5})^-$ と $G(\mathbf{K4B})^-$ とする。上の命題を示すためには、これらの体系の Kripke completeness を示せばよい。

命題 3.3. GL を *Stipulation 1* を満たすシークエント体系とする。このとき、以下が成り立つ。

GL で任意の $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda$ と $\Box B \in \text{BSf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda)$ に対して $(cut)^b$ が *admissible* \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ と論理式 B に対し、 $\Box B \in \text{BSf}(a(u) \cup s(u))$ ならば $\Box B \in a(u) \cup s(u)$ 。

証明

(\Rightarrow) $\Box B \in \text{BSf}(a(u) \cup s(u))$ とする。仮定より、 $a(u) \rightarrow s(u), \Box B$ か $\Box B, a(u) \rightarrow s(u)$ のどちらか一方は GL で証明不可能である。よって *analytically saturated* の定義より、 $\Box B \in a(u) \cup s(u)$ となる。

(\Leftarrow) $\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda$ が GL で証明不可能で、 $\Box B \in \text{BSf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda)$ とする。補題 2.2 より、 $\Gamma \cup \Delta \subseteq a(u)$ かつ $\Theta \cup \Lambda \subseteq s(u)$ を満たす *analytically saturated sequent* $u \in W_{GL}$ が存在する。 $\Box B \in \text{BSf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda) \subseteq \text{BSf}(a(u) \cup s(u))$ であるので、

$\Box B \in a(u) \cup s(u)$ となる. よって $\Gamma \rightarrow \Theta, \Box B$ か $\Box B, \Delta \rightarrow \Lambda$ のどちらか一方は GL で証明不可能である. \square

定義 3.4. GL を Stipulation 1 を満たすシークエント体系とする. W_{GL} 上の二項関係 R_{S5} と R_{K4B} をそれぞれ以下で定義する.

$$uR_{S5}v \Leftrightarrow \Gamma_u = \Gamma_v \text{ かつ } \Theta_u = \Theta_v$$

$$uR_{K4B}v \Leftrightarrow uR_{S5}v \text{ かつ } \Theta_u \neq \emptyset$$

定義より, 任意の空でない $W \subseteq W_{GL}$ に対し, (W, R_{S5}) は反射的, 対称的かつ推移的な frame であり, (W, R_{K4B}) は対称的かつ推移的な frame である.

まず初めに, $(\Box - a)$ について考える. 推論規則 (T) に対し, 以下が成り立つ.

命題 3.5. (高野 [6, Proposition 2.2]) GL を Stipulation 1 を満たすシークエント体系とする. このとき, 任意の A に対して以下が成り立つ.

GL で任意の Γ と Θ で (T) が *admissible*

\Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $\Box A \in a(u)$ ならば $A \in a(u)$.

これによって, GL が (T) を推論規則として持つ場合, 任意の空でない $W \subseteq W_{GL}$ に対して (W, R_{S5}) は $(\Box - a)$ を満たすことがわかる.

同様に, $(T)'$ についても以下が成り立つ.

命題 3.6. GL を Stipulation 1 を満たすシークエント体系とする. このとき, 任意の A に対して以下が成り立つ.

GL で任意の Γ と Θ と B で $(T)'$ が *admissible*

\Leftrightarrow 任意の $u, v \in W_{GL}$ に対して, $\Box A \in a(u)$ かつ $uR_{K4B}v$ ならば, $A \in a(v)$.

証明

(\Rightarrow) $\Box A \in a(u)$ かつ $uR_{K4B}v$ とする. $\Theta_u \neq \emptyset$ であるので, ある B が存在して $\Box B \in s(u)$ となっていて, $uR_{S5}v$ より $\Box B \in s(v)$ である. $\Box A, a(v) \rightarrow s(v), \Box B$ は GL で証明不可能なので, 仮定より $A, a(v) \rightarrow s(v)$ も GL で証明不可能. よって $A \in a(v)$ となる.

(\Leftarrow) $\Box A, \Gamma \rightarrow \Theta, \Box B$ が GL で証明不可能とする. 補題 2.2 より, $\{\Box A\} \cup \Gamma \subseteq a(u)$ かつ $\Theta \cup \{\Box B\} \subseteq s(u)$ となる $u \in W_{GL}$ が存在する. $\Box B \in s(u)$ であるから, $uR_{K4B}u$ となり, $\Box A \in a(u)$ であるので仮定より $A \in a(u)$ となる. よって $A, \Gamma \rightarrow \Theta$ は GL で証明不可能. \square

これによって, GL が $(T)'$ を推論規則として持つ場合, 任意の空でない $W \subseteq W_{GL}$ に対して (W, R_{K4B}) も $(\Box - a)$ を満たすことがわかる.

あとは任意の u に対してそれを含むような $W \subseteq W_{GL}$ が存在して, (W, R_{S5}) や (W, R_{K4B}) が $(\Box - s)$ を満たすことを示せばよい. 高野 [6] は GL が推論規則として

(S5) を持つ場合, (W_{GL}, R_{S5}) が $(cut)^a$ の制限のもとで $(\Box - s)$ を満たすことを示した.

命題 3.7. (高野 [6, Proposition 3.3]) GL を *Stipulation 1* を満たし, $(cut)^a$ を持つ体系とする. このとき, 任意の A に対して以下が成り立つ.

GL で任意の Γ, Θ に対して (S5) が *admissible*

\Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $\Box A \in s(u)$ ならば, ある $v \in W_{GL}$ が存在して $uR_{S5}v$ かつ $A \in s(v)$.

これと全く同様に, $(cut)^a$ を $(cut)^b$ に制限した体系に対しても (W_{GL}, R_{S5}) が $(\Box - s)$ を満たすことを示すことが出来る. しかし, 一つのシーケント体系の *analytically saturated sequent* は一般的には無限個存在するので, この Kripke frame は無限フレームである. ただし, 与えられた証明不可能な式 $\Gamma \rightarrow \Theta$ に対し, 扱う *analytically saturated* を $a(u) \cup s(u) \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta)$ を満たすものだけに制限することで有限モデルにすることもできる. しかし, この有限モデルの中には $\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Theta$ の真偽を決定するうえで必要のない *analytically saturated sequent* も含まれてしまう.

そこで以下の命題で, 与えられた u に対し, $(\Box - s)$ を満たすために必要となる R_{S5} -successor のみを集めた, 無駄の少ない有限の Kripke frame が構築できることを示した.

命題 3.8. GL を *Stipulation 1* を満たし, $(cut)^b$ を持つシーケント体系とする. このとき, 以下が成り立つ.

GL で任意の Γ, Θ, A で (S5) が *admissible*

\Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, 以下を満たすような有限集合 $W \subseteq W_{GL}$ が存在する.

(i) $u \in W$

(ii) (W, R_{S5}) は $(\Box - s)$ を満たす.

証明

(\Rightarrow) $u \in W_{GL}$ とし, Λ_u と Δ_u を以下のように定める.

$$\Lambda_u = \{B \in \Theta_u \mid B \in s(u)\}$$

$$\Delta_u = \Theta_u \setminus \Lambda_u$$

もし $\Delta_u = \emptyset$ であれば, $\{u\}$ が条件を満たす集合となる.

$\Delta_u \neq \emptyset$ であるとき, $\Delta_u = \{A_1, \dots, A_n\}$ とする. 各 $A_i \in \Delta_u$ に対し, $A_i \in s(v_i)$ を満たすような u の R_{S5} -successor v_i を以下の手順により構築する.

$\Box \Gamma_u \rightarrow \Box \Theta_u, \Box A_i$ は GL で証明不可能であるので, 仮定より $\Box \Gamma_u \rightarrow \Box \Theta_u, A_i$ も GL で証明不可能である. 補題 2.2 より, $\Box \Gamma_u \subseteq a(v)$ かつ $\Box \Theta_u \cup \{A_i\} \subseteq s(v)$ かつ $a(v) \cup s(v) \subseteq \text{Sf}(\Box \Gamma_u \cup \Box \Theta_u \cup \{A_i\})$ を満たす $v \in W_{GL}$ が存在する. この v が $uR_{S5}v$ を満たすことを示す. 明らかに $\Gamma_u \subseteq \Gamma_v$ かつ $\Theta_u \subseteq \Theta_v$ が成り立つので, $\Gamma_v \subseteq \Gamma_u$ と $\Theta_v \subseteq \Theta_u$ を示すだけで十分である.

$\Box B \in a(v)$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Box B \in a(v) \cup s(v) &\subseteq \text{Sf}(\Box\Gamma_u \cup \Box\Theta_u \cup \{A_i\}) \\ &= \Box\Gamma_u \cup \Box\Theta_u \cup \text{Sf}(\Gamma_u \cup \Theta_u) \\ &= \Box\Gamma_u \cup \Box\Theta_u \cup \text{BSf}(\Box\Gamma_u \cup \Box\Theta_u) \\ &\subseteq a(u) \cup s(u) \cup \text{BSf}(a(u) \cup s(u)) \end{aligned}$$

$(cut)^b$ があるので, 命題 3.3 より, $\Box B \in a(u) \cup s(u)$ となる. 仮に $\Box B \in s(u)$ とすると, $\Box B \in \Box\Theta_u \subseteq s(v)$ となり矛盾するので, $\Box B \in a(v)$ である. よって $\Gamma_v \subseteq \Gamma_u$ となる. 同様に, $\Theta_v \subseteq \Theta_u$ であるので, $\Gamma_u = \Gamma_v$ かつ $\Theta_u = \Theta_v$, すなわち $uR_{\mathbf{S5}}v$ となる.

$v_i := v$ とし, 同様に A_1, \dots, A_n のそれぞれで v_1, \dots, v_n を構築する.

$W = \{u, v_1, \dots, v_n\}$ とすれば, 明らかに $(W, R_{\mathbf{S5}})$ は $(\Box - s)$ を満たす.

(\Leftarrow) $\Box\Gamma \rightarrow \Box\Theta, \Box A$ が GL で証明不可能とする. 補題 2.2 より, $\Box\Gamma \subseteq a(u)$ かつ $\Box\Theta \cup \{\Box A\} \subseteq s(u)$ かつ $a(u) \cup s(u) \subseteq \text{Sf}(\Box\Gamma \cup \Box\Theta \cup \{\Box A\})$ となる $u \in W_{GL}$ が存在する. 仮定より, u を含むような有限集合 W が存在し, $(W, R_{\mathbf{S5}})$ は $(\Box - s)$ を満たす. $\Box A \in s(u)$ より, ある $v \in W$ が存在して, $uR_{\mathbf{S5}}v$ かつ $A \in s(v)$ となる. $\Box\Gamma \subseteq a(v)$ かつ $\Box\Theta \subseteq s(v)$ であるので, $\Box\Gamma \rightarrow \Box\Theta, A$ も GL で証明不可能である. \square

ここで構築される Kripke frame は $\mathbf{S5}$ frame というだけでなく, 必ず普遍的な frame になる.

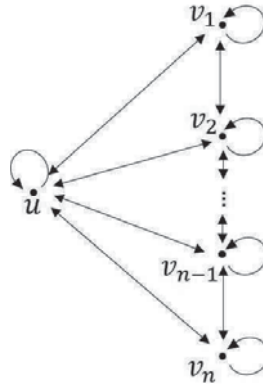


図 3.1 命題 3.8 で構築される frame

この命題から $G(\mathbf{S5})^-$ の Kripke completeness を示すことが出来, $G(\mathbf{S5})$ の (cut) を $(cut)^b$ に制限できることがわかる. そこから $G(\mathbf{S5})$ の subformula property が得られ, さらに構築されるモデルは常に有限モデルであるので, 有限モデル性も一挙に得られる.

また, $G(\mathbf{K4B})^-$ も同様に, 以下の命題から Kripke completeness を示すことが出来る. このことから, (cut) を $(cut)^b$ に制限できることがわかり, $G(\mathbf{K4B})$ の subformula

property と有限モデル性も一挙に得られる.

命題 3.9. GL を *Stipulation 1* を満たし, $(cut)^b$ を推論規則としてもつシークエント体系とする. このとき, 以下が成り立つ.

GL で任意の Γ, Θ, A で $(S5)$ が *admissible*

\Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, 以下を満たすような有限集合 $W \subseteq W_{GL}$ が存在する.

(i) $u \in W$

(ii) $(W, R_{\mathbf{K4B}})$ は $(\Box - s)$ を満たす.

証明は, 命題 3.8 と同様である.

4 時相論理 \mathbf{K}_t4 について

時相論理は 2 種類の様相演算子 $[F]$ と $[P]$ を用いて時間の流れを扱う論理である. $[F]A$ は「どんな未来でもずっと A が正しい」, $[P]A$ は「どんな過去でもずっと A は正しかった」と解釈する. この $[F]A$ と $[P]A$ の充足関係は以下の様になる.

$$u \models [F]A \Leftrightarrow \forall v, uRv \text{ ならば } v \models A$$

$$u \models [P]A \Leftrightarrow \forall v, vRu \text{ ならば } v \models A$$

時相論理 \mathbf{K}_t4 は以下の論理式を全て含むような最小の正規様相論理であり, 推移的な frame に対応する.

$$[F](p \supset q) \supset ([F]p \supset [F]q)$$

$$[P](p \supset q) \supset ([P]p \supset [P]q)$$

$$p \supset [F]\neg[P]\neg p$$

$$p \supset [P]\neg[F]\neg p$$

$$[F]p \supset [F][F]p$$

$$[P]p \supset [P][P]p$$

\mathbf{K}_t4 に対応するシークエント体系 $G(\mathbf{K}_t4)$ は, 西村 [2] によって導入された以下の推論規則を LK に加えることによって得られる.

$$\frac{[F]\Gamma, \Gamma \rightarrow [P]\Theta, [P]\Omega, A}{[F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, \Omega, [F]A} (T1)$$

$$\frac{[P]\Gamma, \Gamma \rightarrow [F]\Theta, [F]\Omega, A}{[P]\Gamma \rightarrow [F]\Theta, \Omega, [P]A} (T2)$$

この $G(\mathbf{K}_t4)$ も全ての (cut) は取り除くことが出来ない. 例えば, 以下の証明図が (cut) を取り除くことのできない例である.

$$\frac{\frac{\frac{[F]\neg p \rightarrow [F]\neg p}{\rightarrow [F]\neg p, \neg[F]\neg p} (\rightarrow \neg)}{\rightarrow \neg p, [P]\neg[F]\neg p} (T2)}{p \rightarrow [P]\neg[F]\neg p} \frac{p \rightarrow p}{\neg p, p \rightarrow} (\neg \rightarrow) \text{ (cut)}$$

しかし、丸山 他 [1] は $G(\mathbf{K}_t\mathbf{4})$ の (cut) を (cut)^a に、(T1)、(T2) をそれぞれ以下に制限した体系 $G(\mathbf{K}_t\mathbf{4})^*$ の Kripke completeness を示した。

$$\frac{[F]\Gamma, \Gamma \rightarrow [P]\Theta, [P]\Omega, A}{[F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, \Omega, [F]A} (T1)^a \quad ([P]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\}))$$

$$\frac{[P]\Gamma, \Gamma \rightarrow [F]\Theta, [F]\Omega, A}{[P]\Gamma \rightarrow [F]\Theta, \Omega, [P]A} (T2)^a \quad ([F]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\}))$$

証明には 三部分的付値と呼ばれる特別な証明不可能な式を用いた。これは analytically saturated とよく似た性質を持っているので、まずはその証明を基に、これらの推論規則が高野の analytically saturated の手法を適用できることを示す。

$G(\mathbf{K}_t\mathbf{4})^*$ の Kripke completeness を示すためには、以下の条件を満たし、かつ推移的な Kripke frame が存在すればよい。

- ([F] - a) $\square A \in a(u)$ ならば、任意の $v \in W$ に対して uRv ならば $A \in a(v)$ 。
- ([P] - a) $\square A \in a(u)$ ならば、任意の $v \in W$ に対して vRu ならば $A \in a(v)$ 。
- ([F] - s) $\square A \in s(u)$ ならば、ある $v \in W$ が存在して、 uRv かつ $A \in s(v)$ 。
- ([P] - s) $\square A \in s(u)$ ならば、ある $v \in W$ が存在して、 vRu かつ $A \in s(v)$ 。

丸山は以下の二項関係 R を導入し、上の条件を満たす Kripke frame を構築した。

$$uRv \Leftrightarrow \text{任意の } B \text{ に対し, } [F]B \in a(u) \text{ ならば, } B, [F]B \in a(v)$$

$$\text{かつ } [P]B \in a(u) \text{ ならば, } B, [P]B \in a(v)$$

この二項関係を用いることで、(cut)^a を持つシーケント体系 GL に対し、 GL が (T1)^a、(T2)^a を推論規則として持つならば、 (W_{GL}, R) が ([F] - s) と ([P] - s) を満たすことを示すことが出来る。しかしこの二項関係では、命題 3.7 のように逆を示すことは出来ない。そこで今回は、この逆も示せるように、二項関係にいくつかの条件を加えたものを用いる。

定義 4.1. GL を Stipulation 1 を満たすシーケント体系とする。 W_{GL} 上の二項関係 $R_F, R_P, R'_F, R'_P, R_T$ をそれぞれ以下で定義する。

$$uR_F v \Leftrightarrow \forall B, [F]B \in a(u) \text{ ならば } B, [F]B \in a(v)$$

$$uR_P v \Leftrightarrow \forall B, [P]B \in a(u) \text{ ならば } B, [P]B \in a(v)$$

$$uR'_F v \Leftrightarrow \forall B, [F]B \in s(u) \text{ ならば } [F]B \in s(v)$$

$$uR'_P v \Leftrightarrow \forall B, [P]B \in s(u) \text{ ならば } [P]B \in s(v)$$

$$uR_T v \Leftrightarrow uR_F v, vR_P u, vR'_F u \text{ かつ } uR'_P v$$

定義より, 任意の空でない $W \subseteq W_{GL}$ に対し, (W, R_T) は推移的であり, $([F] - a)$ と $([P] - a)$ を満たす.

命題 4.2. GL を *Stipulation 1* を満たし, $(cut)^a$ を推論規則としてもつシーケント体系とする. このとき, 任意の論理式 A に対して以下が成り立つ.

- (i) GL で任意の Γ, Θ と $[P]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ を満たす Ω で $(T1)^a$ が *admissible*
 \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対し, $[F]A \in s(u)$ ならば, ある $v \in W_{GL}$ が存在して $uR_T v$
かつ $A \in s(v)$.
- (ii) GL で任意の Γ, Θ と $[F]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ を満たす Ω で $(T2)^a$ が *admissible*
 \Leftrightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対し, $[P]A \in s(u)$ ならば, ある $v \in W_{GL}$ が存在して $vR_T u$
かつ $A \in s(v)$.

証明 (i) のみを示す. (ii) は (i) と同様にできる.

(\Rightarrow) $[F]A \in s(u)$ とする. Γ, Θ, Ω を以下のように定める.

$$\Gamma = \{B \mid [F]B \in a(u)\}, \Theta = \{B \mid [P]B \in s(u)\}$$

$$\Omega = \{B \in \Theta \mid [P]B \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})\}$$

明らかに, $[F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, \Omega, [F]A$ は GL で証明不可能である. $[P]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ であるので, 仮定より $\Gamma, [F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, [P]\Omega, A$ も証明不可能である. 補題 2.2 より, $\Gamma \cup [F]\Gamma \subseteq a(v)$ かつ $[P]\Theta \cup [P]\Omega \cup \{A\} \subseteq s(v)$ かつ $a(v) \cup s(v) \subseteq \text{Sf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{A\})$ を満たす $v \in W_{GL}$ が存在する. この v について, $uR_T v$ となることを示せばよい. $uR_F v$ と $uR'_P v$ は明らかなので, $vR_P u$ と $vR'_F u$ のみを示す.

$[P]B \in a(v)$ とする. このとき, 命題 2.3 より以下が成り立つ.

$$B, [P]B \in a(v) \cup s(v) \subseteq \text{Sf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{A\}) \subseteq \text{Sf}(a(u) \cup s(u)) \subseteq a(u) \cup s(u)$$

仮に $[P]B \in s(u)$ とすると, $[P]B \in [P]\Theta \subseteq s(v)$ となるため矛盾するので, $[P]B \in a(u)$ である. また, 仮に $B \in s(u)$ とすると, $[P]B \notin [P]\Theta$ より $[P]B \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ となるので, $B \in \Omega$ となる. これは $[P]\Omega \subseteq s(v)$ となり矛盾するので, $B \in a(u)$ である. よって $vR_P u$ となる. 同様に, $[F]B \in s(v)$ とすると, $[F]B \in a(u) \cup s(u)$ となる. 仮に $[F]B \in a(u)$ とすると, $[F]B \in [F]\Gamma \subseteq a(v)$ となり矛盾するので, $[F]B \in s(u)$ となる. よって $vR'_F u$ となる.

したがって, $uR_T v$ となる.

(\Leftarrow) $[F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, \Omega, [F]A$ が GL で証明不可能とする.(ただし, $[P]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ とする.) 補題 2.2 より, $[F]\Gamma \subseteq a(u)$ かつ $[P]\Theta \cup \Omega \cup \{[F]A\} \subseteq s(u)$ かつ $a(u) \cup s(u) \subseteq \text{Sf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{[F]A\})$ を満たす $u \in W_{GL}$ が存在する. $[F]A \in s(u)$ より, ある $v \in W_{GL}$ が存在して, $uR_T v$ かつ $A \in s(v)$ となる. この v について, $uR_F v$ かつ $uR'_P v$ であるので, $\Gamma, [F]\Gamma \subseteq a(v)$ かつ $[P]\Theta \subseteq s(v)$ である. あとは $[P]\Omega \subseteq s(v)$ を示せばよい.

$B \in \Omega$ とする. このとき, 命題 2.3 より以下が成り立つ.

$$[P]B \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\}) \subseteq \text{Sf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{A\}) \subseteq \text{Sf}(a(v) \cup s(v)) \subseteq a(v) \cup s(v)$$

仮に $[P]B \in a(v)$ とすると, $vR_P u$ より $B \in a(u)$ となり矛盾する. よって $[P]B \in s(v)$ である.

したがって, $\Gamma, [F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, [P]\Omega, A$ は GL で証明不可能である. \square

これによって, $(W_{G(\mathbf{K}_4)^*}, R_T)$ は $([F] - a), ([P] - a), ([F] - s), ([P] - s)$ を満たすことがわかり, かつ推移的な frame であるので, Kripke completeness を得る.

さらに, 先程の **S5** と **K4B** の場合と同様に, $G(\mathbf{K}_4)$ も (*cut*) を box internal subformula を用いることで (*cut*)^a よりも強い制限のものに変更することが出来る. そのために, まずは時相論理のために box internal subformula の定義を拡張する.

定義 4.3. Γ を空でない論理式の集合であるとする. A が Γ の *Box internal subformula* であるとは, ある $[F]B \in \Gamma$ が存在して $A \in \text{Sf}(\{B\})$, または, ある $[P]B \in \text{Sf}(\Gamma)$ が存在して $A \in \text{Sf}(\{B\})$ となる場合である.

このとき, $\{A_1, \dots, A_n\}$ を論理式の集合とすると, 各 i で $\Box_i \in \{[F], [P]\}$ を満たす様相演算子の列 \Box_1, \dots, \Box_n に対して以下が成り立つ.

$$\text{Sf}(\{A_1, \dots, A_n\}) = \text{BSf}(\{\Box_1 A_1, \dots, \Box_n A_n\})$$

例えば, $\text{Sf}(\{A, B\}) = \text{BSf}(\{[F]A, [P]B\}) = \text{BSf}(\{[P]A, [F]B\}) = \text{BSf}(\{[F]A, [F]B\}) = \text{BSf}(\{[P]A, [P]B\})$ である.

命題 4.4. $G(\mathbf{K}_4)$ の (*cut*) は, 以下のものに制限することが出来る.

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B \quad B, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda} (\text{cut})^b \quad (\text{ただし, } B \in \text{BSf}(\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \cup \Lambda))$$

これを示すために, $G(\mathbf{K}_4)$ の $(T1), (T2)$ をそれぞれ $(T1)^a, (T2)^a$ に, (*cut*) を (*cut*)^b に制限した体系 $G(\mathbf{K}_4)^-$ の Kripke completeness を示す.

命題 4.5. GL を *Stipulation 1* を満たすシーケント体系とする. このとき, 以下の条件は同値である.

- GL で任意の $\Gamma, \Theta, \Delta, \Lambda$ と $B \in \text{BSf}(\Gamma \cup \Theta \cup \Delta \cup \Lambda)$ を満たす任意の B に対して (*cut*)^b が *admissible*
- 任意の $u \in W_{GL}$ に対して, $B \in \text{BSf}(a(u) \cup s(u))$ ならば $B \in a(u) \cup s(u)$

証明は命題 3.3 と同様である.

命題 4.6. GL を *Stipulation 1* を満たし, (*cut*)^b を推論規則としてもつシーケント体系とする. このとき, 任意の論理式 A に対して以下が成り立つ.

- (i) GL で任意の Γ, Θ と $[P]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ を満たす Ω で $(T1)^a$ が admissible
 \Rightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対し, $[F]A \in s(u)$ ならば, ある $v \in W_{GL}$ が存在して $uR_T v$
かつ $A \in s(v)$.
- (ii) GL で任意の Γ, Θ と $[F]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ を満たす Ω で $(T2)^a$ が admissible
 \Rightarrow 任意の $u \in W_{GL}$ に対し, $[P]A \in s(u)$ ならば, ある $v \in W_{GL}$ が存在して $vR_T u$
かつ $A \in s(v)$.

証明 (i) のみを示す. (ii) は (i) と同様に出来る

$[F]A \in s(u)$ とする. Γ, Θ, Ω を命題 4.2 と同様に定める. 明らかに, $[F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, \Omega, [F]A$ は GL で証明不可能である. $[P]\Omega \subseteq \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ であるので, 仮定より $\Gamma, [F]\Gamma \rightarrow [P]\Theta, [P]\Omega, A$ も証明不可能である. 補題 2.2 より, $\Gamma \cup [F]\Gamma \subseteq a(v)$ かつ $[P]\Theta \cup [P]\Omega \cup \{A\} \subseteq s(v)$ かつ $a(v) \cup s(v) \subseteq \text{Sf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{A\})$ を満たす $v \in W_{GL}$ が存在する. この v について, $uR_T v$ となることを示せばよい. uR_{Fv} と $uR'_P v$ は明らかなので, vR_{Pu} と $vR'_F u$ のみを示す.

$[P]B \in a(v)$ とする. このとき, 明らかに $[P]B \notin [P]\Theta$ であるから, $[P]B \in \text{Sf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{A\})$ より, $[P]B \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ となる.

$$\begin{aligned} B, [P]B &\in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\}) \\ &= \text{BSf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{[F]A\}) \\ &\subseteq \text{BSf}(a(u) \cup s(u)) \end{aligned}$$

よって, $(cut)^b$ より $B, [P]B \in a(u) \cup s(u)$ となる. 仮に $[P]B \in s(u)$ とすると $B \in \Theta$ となり矛盾であるので, よって $[P]B \in a(u)$ となる. また, 仮に $B \in s(u)$ とすると, $[P]B \in \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ より $B \in \Omega$ となり, $[P]B \in [P]\Omega \subseteq s(v)$ となるので矛盾. よって $B \in a(u)$ である. よって vR_{Pu} となる.

同様に $[F]B \in s(v)$ とすると, $[F]B \in \text{Sf}([F]\Gamma \cup \Theta \cup \{A\})$ であるので, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} [F]B &\in \text{Sf}([F]\Gamma \cup \Theta \cup \{A\}) \\ &= [F]\Gamma \cup \text{Sf}(\Gamma \cup \Theta \cup \{A\}) \\ &= [F]\Gamma \cup \text{BSf}([F]\Gamma \cup [P]\Theta \cup \{[F]A\}) \\ &\subseteq a(u) \cup \text{BSf}(a(u) \cup s(u)) \end{aligned}$$

よって $[F]B \in a(u) \cup s(u)$ となるが, 仮に $[F]B \in a(u)$ とすると $B \in \Gamma$ となり矛盾. よって $[F]B \in s(u)$ となる. よって $vR'_F u$ となる.

したがって, $uR_T v$ となる. □

これによって, $(W_{G(\mathbf{K}_t4)^-}, R_T)$ は $([F] - a)$, $([P] - a)$, $([F] - s)$, $([P] - s)$ を満たすことがわかり, かつ推移的な frame であるので, Kripke completeness を得る. よって, $G(\mathbf{K}_t4)$ の (cut) は $(cut)^b$ に制限できることがわかる.

$G(\mathbf{K}_t4)$ に対して注意すべき点が2点ある. まず一点目は, 命題 4.6 は Kripke completeness を導くことは出来るが, 命題 4.2 のように逆は成り立たない点である. そしてもう一

点は, $G(\mathbf{K}_t4)^-$ 及び $G(\mathbf{K}_t4)^*$ では, **S5** や **K4B** のように必要な analytically saturated のみを集めて有限フレームを構築する手段が出来るかが今のところわかっていない点である. これらを解決するには, 著者は二項関係の定義を変更する必要があると考えている.

参考文献

- [1] A. Maruyama, S. Tojo and H. Ono, *Temporal epistemic logics for multi-agent models and their efficient proof-search procedures*, **Computer Software** (in Japanese), 20(1) (2003), pp 51-65
- [2] H. Nishimura, *A study of some tense logics by Gentzen's sequential method*, **Publ. Res Inst. Math. Sci**, 16 (1980), pp 343-353
- [3] M. Ohnishi and K. Matsumoto, *Gentzen method in modal calculi, II*, **Osaka Math. J**, 11 (1959), pp. 115-120
- [4] M. Takano, *Subformula property as a substitute for cut-elimination in modal propositional logics*, **Mathematical Japonica**, 37 (1992), pp. 1129-1145
- [5] M. Takano, *A modified subformula property for the modal logics $K5$ and $K5D$* , **Bulletin of the Section of Logic**, 30 (2001), pp. 115-122
- [6] M. Takano, *A semantical analysis of cut-free calculi for modal logics*, **Reports on Mathematical Logic**, 53 (2018), pp. 43-65
- [7] D. Yazaki, *Semantical proof of subformula property for the modal logics $K4.3$, $KD4.3$ and $S4.3$* , **Bulletin of the Section of Logic**, 48 (2019), pp. 245-257
- [8] D. Yazaki, *Semantical approach to subformula property of modal logics related to $K4$* , 博士論文, 静岡大学創造科学技術大学院, 2019年12月

Graduate School of Science and Technology,
Shizuoka University
Ohya 836, Suruga-ku Shizuoka 422-8529,
JAPAN
yazaki.daishi.14@cii.shizuoka.ac.jp