

平行平板間にある液体シートの 高ウェバー数領域での安定性と破断

同志社大学・高機能微粒子研究センター 吉永隆夫

Takao Yoshinaga

Research Center for Highly-Functional Nanoparticles,
Doshisha Univ.

1 まえおき

平面液体ジェットの安定性の問題は、微粒化、混合などの不安定化や製紙やコーティングなどの安定化に関して、工業上重要であり古くから理論的・実験的に研究されてきた [1, 2, 3]. 特に安定性の解析では, Squire [4] により周囲流体による影響が線形解析により示されて以来, Clark&Dombrowski [5] は最低次の非線形性によりシートの破断を説明し, 後に 2 次の非線形性による影響が調べられてきた [6, 7]. いずれの場合も周囲流体がシート破断に及ぼす影響が重要であることが示されているが, Mehring&Sirignano [8] は長波近似により得られた非線形方程式を用いて, 周囲流体がなくても非線形性により破断する可能性があることを示している. また, Kan&Yoshinaga [9] は 2 枚の平面壁間を平面ジェットが流れる場合のシートの挙動を数値的に調べ, シートと壁面間の距離の減少が非線形性と不安定性を増加させることを示し, 後に最低次の非線形性を考慮した解析も行われている [10, 11]. 最近, Fujiwara [12] は 2 枚の平行平板間のシートの振る舞いを, シート液体部と周囲気体部に長波近似 (薄膜近似) を用いた解析を行い, 周囲流体を含む液体シートの振る舞いを記述する非線形方程式を導出し比較的小さな Weber 数に対するシートの破断を調べている.

よく知られているように, 円柱ジェットによる微粒化現象では比較的大きな流速 (Weber 数) による空力不安定が重要であり, 第 2 空力不安定モードと呼ばれるジェット側面からの微細液滴の形成が知られており, それがさらに強くなるとアトマイゼーションが引き起こされる [13]. しかし平面ジェットにおけるそのような微細化に至る明確な振る舞いはこれまで報告されてい. 本解析の目的は, 比較的大きな Weber 数で円柱ジェットの第 2 空力不安定モードに対応する現象が現れるかを調べ, 高 Weber 数領域でのシート破断による微粒化現象の発生メカニズムを理解することである.

本解析では, Fujiwara [12] により示された 2 枚の平行平板間での平面ジェットの長波方程式を用いて, シートと壁面間距離や Weber 数によるシート形状の変化を数値的に調べる.

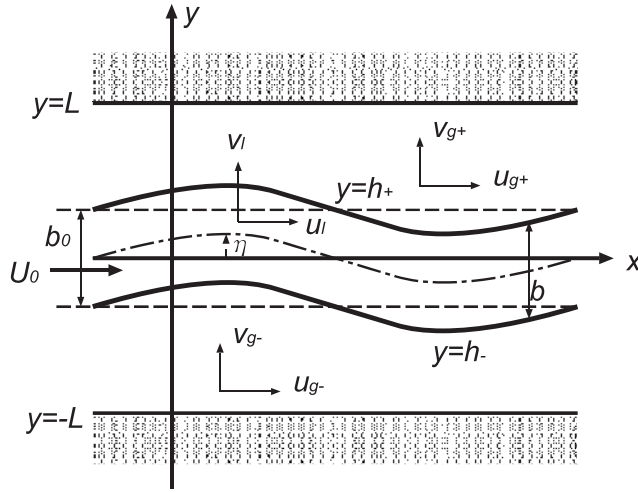


図 1: Schematic of a planar liquid sheet and surrounding gas between parallel solid walls.

2 長波近似と非線形発展方程式

図2に示すような平面壁間に挟まれた2次元平面液体ジェットを考え、主流方向を x 軸、厚み方向を y 軸に取る。ジェット上下界面は $y = h_{\pm}(x, t)$ 、厚み中央面は $\eta(x, t) \equiv (h_+(x, t) + h_-(x, t))/2$ 、 $\eta(x, t)_{\pm} \equiv (\pm L \pm h_{\pm})/2$ 、シート厚み $b(x, t) \equiv h_+(x, t) - h_-(x, t)$ 、気相厚み $b(x, t)_{\pm} \equiv L - |h(x, t)_{\pm}|$ 、壁面は $y = \pm L$ で規定される。ジェット液体部、周囲気体部での諸量をそれぞれ l, g で表し、流速 $(u_l, v_l), (u_g, v_g)$ 、圧力 p_l, p_g 、密度 ρ_l, ρ_g 、表面張力 σ 、粘性係数 μ_l とする。ただし、周囲気体部の粘性は無視($\mu_g = 0$)し、圧縮性と重力の影響は考えないものとする。

基礎方程式はジェット流体部 $(-h_- < y < h_+)$ 、及び周囲気体部 $(-L < y < h_-, h_+ < y < L)$ に対する連続の式と運動方程式であり、境界条件としては $y = \pm L, y = h_{\pm}$ での運動学的条件と、 $y = h_{\pm}$ での力学的条件(界面接線方向と法線方向)からなる。

解析を簡単にするため、液相、気相厚みがジェット変形波長に比べて十分小さいとし、以下の薄膜近似を考える：

(i) 液相部 $(h_- < y < h_+)$:

$$u_l(x, y, t) = u_{l0}(x, t) + (y - \eta)u_{l1}(x, t) + (y - \eta)^2u_{l2}(x, t) + \cdots, \quad (1a)$$

$$v_l(x, y, t) = v_{l0}(x, t) + (y - \eta)v_{l1}(x, t) + (y - \eta)^2v_{l2}(x, t) + \cdots, \quad (1b)$$

$$p_l(x, y, t) = p_{l0}(x, t) + (y - \eta)p_{l1}(x, t) + (y - \eta)^2p_{l2}(x, t) + \cdots, \quad (1c)$$

(ii) 気相部 ($-L < y < h_-$, $h_+ < y < L$) :

$$u_{g\pm}(x, y, t) = u_{g0\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})u_{g1\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})^2 u_{g2\pm}(x, t) + \cdots, \quad (2a)$$

$$v_{g\pm}(x, y, t) = v_{g0\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})v_{g1\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})^2 v_{g2\pm}(x, t) + \cdots, \quad (2b)$$

$$p_{g\pm}(x, y, t) = p_{g0\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})p_{g1\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})^2 p_{g2\pm}(x, t) + \cdots, \quad (2c)$$

ここで, $|h - \eta| \leq b/2 \sim O(b)$, $|h_{\pm} - \eta_{\pm}| \leq b_{\pm}/2 \sim O(b_{\pm})$ の程度であるが $\eta, \eta_{\pm}$ の大きさは変形波長 ($\sim \lambda$) 程度 $\sim O(1)$ であるが $b, b_{\pm} \ll \lambda$ であることに注意しよう.

このような近似を基礎方程式と境界条件に用い, 厚み $b, b_{\pm}$ の最低次の項を残して, 無次元化された以下の方程式系を得る:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u_{l0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{l0}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -u_{l0} \frac{\partial b}{\partial x} - b \frac{\partial u_{l0}}{\partial x}, \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{l0}}{\partial t} &= -u_{l0} \frac{\partial u_{l0}}{\partial x} - \frac{\partial p_{l0}}{\partial x} + p_{l1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 u_{l0}}{\partial x^2} - u_{l1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_{l1}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2u_{l2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{l0}}{\partial t} &= -u_{l0} \frac{\partial v_{l0}}{\partial x} - p_{l1} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v_{l0}}{\partial x^2} - v_{l1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v_{l1}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2v_{l2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3d)$$

$$\frac{\partial u_{g0\pm}}{\partial t} = -u_{g0\pm} \frac{\partial u_{g0\pm}}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_{g0\pm}}{\partial x} + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} \right) p_{g1\pm}, \quad (3e)$$

$$\frac{\partial v_{g0\pm}}{\partial t} = -u_{g0\pm} \frac{\partial v_{g0\pm}}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} p_{g1\pm}, \quad (3f)$$

ここで, 代表速度, 距離, 時間, 圧力はそれぞれ, 攪乱がない場合の主流速度 U_0 , ジェット半厚み $b_0/2$, 時間 $U_0/(b_0/2)$, 動圧力 $\rho_l U_0^2$ を用い, 無次元量としては密度比 $\gamma = \rho_g/\rho_l$, 壁面距離 $m = L/(b_0/2)$, レイノルズ数 $\text{Re} = \rho_l U_0(b_0/2)/\mu_l$, ウェバー数 $\text{Wb} = \rho_l U_0^2(b_0/2)/\sigma$ が導入されている. ここに,

$$\begin{aligned} 2v_{g0\pm} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial t} + u_{g0\pm} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial t} &= \pm \frac{\partial}{\partial x} \left[u_{g0\pm} \left(m - \frac{b}{2} \mp \eta \right) \right], \end{aligned}$$

の関係があり, $p_{l0}, p_{l1}, u_{l1}, v_{l1}, u_{l2}, v_{l2}$ は u_{l0}, v_{l0} の関数である.

3 近似の有効性と適用限界

前節で得られた長波方程式系で, 一様状態からの攪乱の線形時間安定性を調べ, 基礎方程式から得られる厳密な線形安定性の結果と比較する. 攪乱が波数 k と角周波数 ω の正弦攪乱

を仮定すると、基礎方程式系の厳密な安定性は諸量の平衡状態からの攪乱が $f(y) \exp[i(kx - \omega t)]$ のように固有関数 $f(y)$ を用いて表される。境界条件より $f(y)$ が決定されて、 $k - \omega$ の分散関係は、

(i) Bulge mode:

$$\Omega^2 \coth k + \gamma(\Omega + k)^2 \coth k(m-1) - \frac{k^3}{\text{Wb}} - \frac{4fk^2}{\text{Re}^2}(f \coth k - k \coth f) = 0, \quad (4a)$$

(ii) Sinuous mode:

$$\Omega^2 \tanh k + \gamma(\Omega + k)^2 \coth k(m-1) - \frac{k^3}{\text{Wb}} - \frac{4fk^2}{\text{Re}^2}(f \tanh k - k \tanh f) = 0, \quad (4b)$$

ここで、 $\Omega \equiv \omega - k$ で $f^2 = k^2 - i \text{Re} \Omega$. . 一方、近似した方程式での線形分散関係は諸量が $\exp[i(kx - \omega t)]$ に比例すると以下のように表される：

(i) Bulge mode:

$$\Omega^2 + \frac{\gamma(\Omega + k)^2}{4(m-1)}[4 + k^2(m-1)^2] - \frac{k^4}{\text{Wb}} + \frac{4i k^2}{\text{Re}} \Omega = 0, \quad (5a)$$

(ii) Sinuous mode:

$$\Omega^2 + \frac{\gamma(\Omega + k)^2}{4k^2(m-1)}[4 + k^2(m-1)^2] - \frac{k^2}{\text{Wb}} = 0. \quad (5b)$$

以下では時間安定性を考えるので、これらの分散関係において k は常に実数と仮定し、 ω すなわち Ω の虚数成分 (Ω_I) が正であれば時間不安定となる。図2は Bulge(対称) モード、図3では Sinuous(反対称) モードにおける増幅率 Ω_I の k に対する変化を示している。図では実線 ($\text{Re} = \infty$)、破線 ($\text{Re} = 100$) は厳密解、 $\square$ ($\text{Re} = \infty$)、 $\circ$ ($\text{Re} = 100$) は近似解を示す。両図において、Wb 数が大きくなるにつれて、また m が大きくなるにつれて近似解は厳密解から離れていく。

特に、 $\Omega_I = 0$ となる臨界波数 k_c ($\neq 0$) は Re によらず、Wb により変わることから、厳密解と近似解の違いの指標として用いることができる。そこで以下では、厳密解との比較で k_c の相対誤差が5%以内となるような場合を近似が有効とみなす。さらに、 m が大きくなるにつれて壁面の影響は小さくなり、 m に対する k_c の変化は小さくなる。そこで、 m に対して厳密解の k_c の相対誤差が5%以内となるような m を壁面の影響がなくなる壁面距離とする。このようにして得られた2種類の m での Wb に対する変化が図4に示されている。図よりわかるように Bulge(対称) モード ((a) 図) も Sinuous(反対称) モード ((b) 図) のいずれの場合も、Wb の増加とともに、近似が有効な m (実線) が減少し、またそれよりも小さい値で壁面の影響がなくなる m (破線) も減少している。したがって、実線と破線の間の m では近似が有効でかつ壁面の影響が無視できる m があることに注意すべきである。

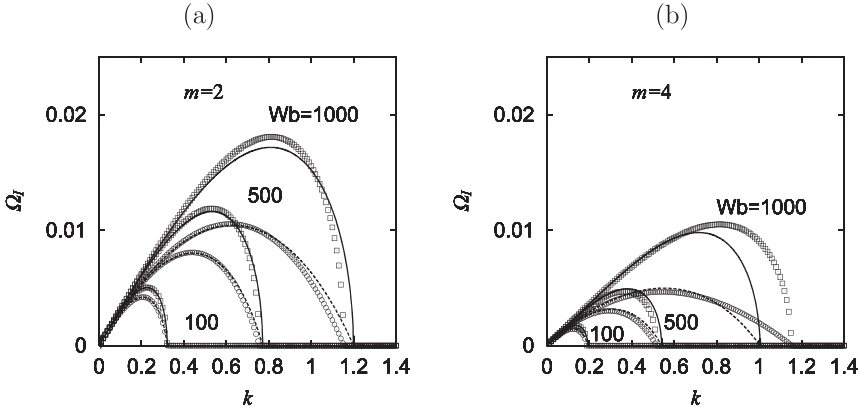


图 2: Variations of the temporal growth rate in the bulge mode with k for different Wb when $\gamma = 0.001$ where the solid lines denote the exact solutions for $Re = \infty$, broken lines denote the exact solutions for $Re = 100$, while open squares denote the approximation for $Re = \infty$ and open circles the approximation for $Re = 100$; (a) $m = 2$ and (b) $m = 4$.

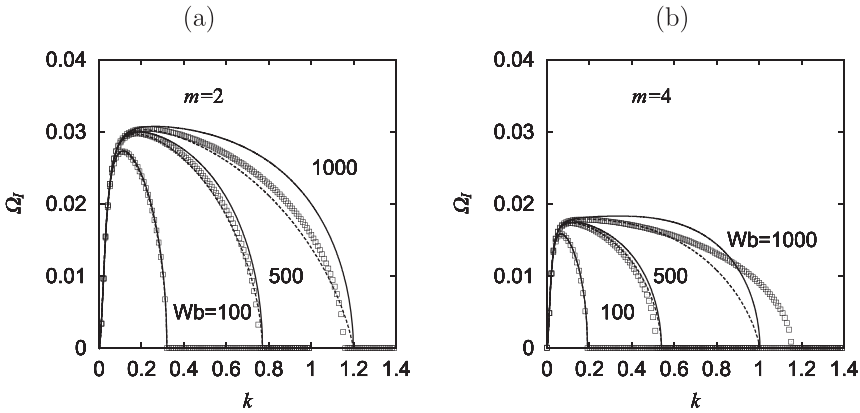


图 3: Variations of the temporal growth rate in the sinuous mode with k for different Wb when $\gamma = 0.001$, where solid lines denote the exact solutions for $Re = \infty$, broken lines denote the exact solutions for $Re = 100$, while open squares denote the approximation for $Re = \infty$ and open circles the approximation for $Re = 100$; (a) $m = 2$ and (b) $m = 4$.

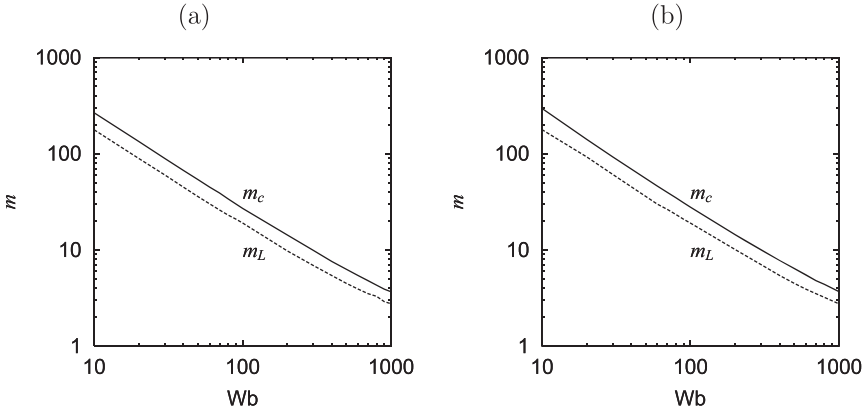


図 4: Validity and limitation of the approximation and influence of the wall in the parameter region of Wb and m when $\rho = 0.001$, where the wall does not affect when m is above the broken lines, while the approximation is valid when m is below the solid lines and, so that, the influence of the wall can be neglected for m in between the broken and solid lines; the bulge mode in (a), the sinuous mode in (b).

4 破断近傍での振る舞い

長波近似で得られた非線形方程式系を周期境界条件の下で数値解析をおこなう．特に，平面シートの場合，破断は Bulge(対称) モードでおこる (Sinuous モードの場合非線形性により Bulge モードが誘起される) ため，以下では Bulge(対称) モードの破断について述べる．初期条件は $b = 2 + 0.4 \cos kx$, $u_{l0} = 1$, $\eta = v_{l0} = v_{g0\pm} = u_{g0\pm} = p_0 = p_{g0\pm} = 0$ とする．このとき， k は最大増幅率を与える $k = k_m$ を用いている．

図 5 は $Wb = 100$ のときの厚みの最大値 b_{max} と最小値 b_{min} の時間発展と典型的な破断形状を異なる m について示している．(a) 図よりわかるように m が大きくなるほど b_{max} と b_{min} の増幅と減少が同程度であるのに対し， m が小さくなると， b_{max} の増加がより急激になることがわかる．このことは，図 (b) の破断形状からもわかるように m が小さいときには鋭い山の部分と緩やかな谷の部分からなる．一方，図 (c) で見るように m が大きくなると破断がおこるまで山谷両方とも緩やかに変形する．

一方，図 6 には $Wb = 500$ の場合の厚みの時間発展と典型的な破断形状が示されている．(a) からわかるようにいずれの m に対しても b_{max} の増加率が b_{min} の減少率よりおおきく， b_{min} は最終段階で急激に減少しシートは破断する．そのため，山の部分が常に鋭く，谷の部分も破断直前までは緩やかに変動することが予想される．

このように， Wb が大きくなるにつれて b_{max} が b_{min} にくらべてより早く増加し鋭い山と緩やかな谷からなる形状を示すが，谷の部分の厚みは最終的には急激に減少し破断する．このような特徴は Wb が小さくても， m が小さい場合 (平面壁がよりジェット界面に接近している場合) でも見られる．この鋭い山の形成は，円形ジェットの空力不安定性での第 2 空力不安定モードによる界面のカスプ形状と似ている．円柱ジェットの場合この鋭

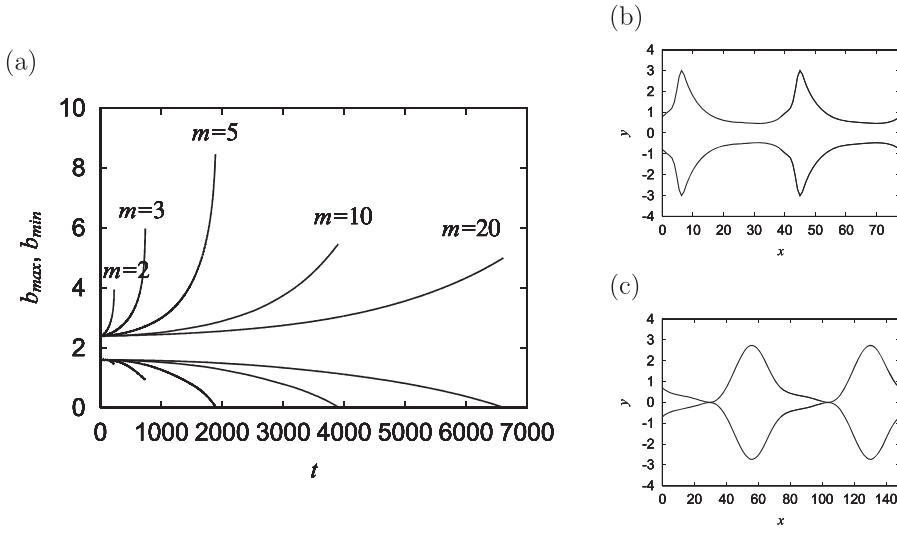


图 5: Evolutions of the maximum and minimum thickness b_{max} (solid lines) and b_{min} (broken lines) in (a) when $Wb = 100$, $\gamma = 0.001$ and $Re = \infty$, while typical breakup profiles for different m where $m = 3$ for $k_m = 0.162$ at $t = 736$ in (b) and $m = 10$ for $k_m = 0.0847$ at $t = 3905$ in (c).

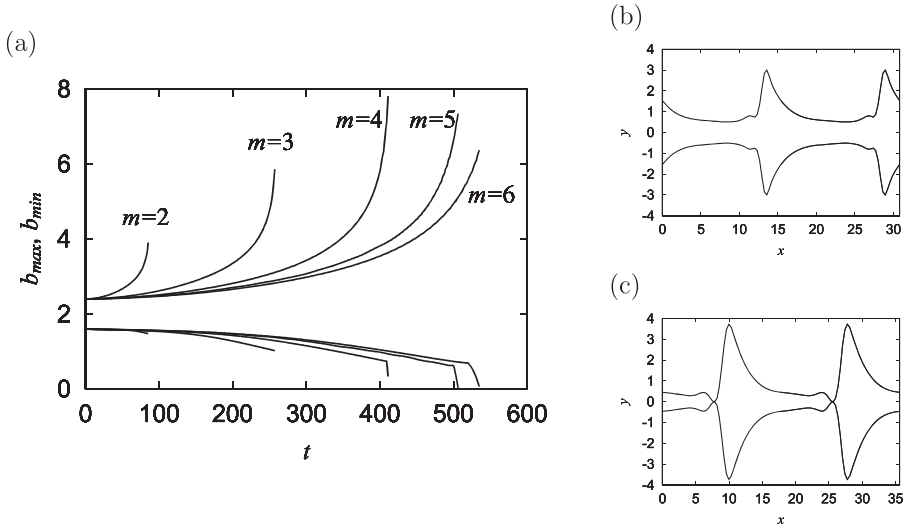


图 6: Evolutions of the maximum and minimum thickness b_{max} (solid lines) and b_{min} (broken lines) in (a) when $Wb = 500$, $\gamma = 0.001$ and $Re = \infty$, while typical breakup profiles for different m where $m = 3$ for $k_m = 0.408$ at $t = 257$ in (b) and $m = 5$ for $k_m = 0.353$ at $t = 506$ in (c).

い山の部分より細かい液滴が形成されるため、平面ジェットでも Wb が大きい場合や m の小さい場合同様な液滴形成がおこる可能性があると考えられる。なお、 Wb の小さい場合の破断形状は円柱ジェットにおける第 1 空力不安定モードに対応すると考えられる。

5 結論

2 枚の平行平板壁間を流れる平面ジェットの振る舞いを、薄膜近似により導出した方程式を用いて調べた結果、以下のことがわかった：

- 薄膜近似の有効性を線形解析により調べ、 Wb が大きくなるにつれて近似の有効な m の領域が急激に減少することがわかった。壁面の影響も同様に減少することが示された。
- Wb が小さい場合、線形不安定な対称モード攪乱に対して、最大厚みの増加と最小厚みの減少は同程度になり破断に至る。
- Wb が大きいときは、破断直前まで最大厚みの増加は最小厚みの減少より大きくなり、緩やかな谷部分と鋭い山部分の形状を示し、その後最小厚み部が急激に減少し破断に至る。同様な現象は Wb が小さくても m が小さければみられる。
- この Wb が大きいもしくは m の小さい場合の破断現象は円柱ジェットにみられる第 2 空力不安定モードと類似しており、鋭い山尖端部より微小液滴が形成されることが予想される。

謝辞

本研究は科研費（C:16K06082）の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Lin, S.P., *Breakup of liquid sheets and jets* (Cambridge, 2003).
- [2] Eggers, J. and Villermaux, E., “Physics of liquid jets”, Rep. Prog. Phys., 71 (2008) pp.036601.
- [3] Ashgriz, N., *Handbook of atomization and sprays* (Springer, 2011).
- [4] Squire, H.B., “Investigation of the instability of a moving liquid film”, British J. Appl. Phys., 4 (1953) pp.167-169.
- [5] Clark, C. J. and Dombrowski, N., “Aerodynamic instability and disintegration of inviscid liquid sheets”, Proc. R. Soc. Lond. A 329 (1972) pp. 467-478.

- [6] Jazayeri, S. A. and Li, X., “Nonlinear instability of planar liquid sheets”, *J. Fluid Mech.* 406 (2000) pp. 281-308.
- [7] Yang, L., Wang, C., Fu, Q., Du, M. and Tong, M., “Weakly nonlinear instability of planar viscous sheets”, *J. Fluid Mech.* 735 (2013) pp. 249-287
- [8] Mehring, C. and Sirignano, W. A., “Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets”, *J. Fluid Mech.* 388 (1999) pp. 69-113.
- [9] Kan, K. and Yoshinaga, T., “Instability of a planar liquid sheet with surrounding fluids between two parallel walls”, *Fluid Dyn. Res.* 39 (2007) pp. 389-412.
- [10] ; Yoshinaga, T. and Hishi, Y., “平面液体ジェットの安定性に及ぼす周囲流体と壁面の影響”, *流体力学会年会 2010* (北海道大学, 2010).
- [11] Nath, S., Mukhopadhyay, A., Datta, A., Sarkar, S. and Sen, S., “Effect of confinement on breakup of planar liquid sheets sandwiched between two gas streams and resulting spray characteristics”, *Fluid Dyn. Res.* 46 (2014) 015511.
- [12] Fujiwara, K., “Instabilities and breakup phenomena of a planar viscous liquid sheet with surrounding fluids between solid walls”, Master thesis (Osaka Univ. 2007) [in Japanese].
- [13] Reitz, R. D. and Bracco, F. V. 1982 “Mechanism of atomization of a liquid jet”, *Phys. Fluids* 25 (1982) pp.1730-1742.