

## 有限変形を考慮したはりの中を伝播する弾性波の弱非線形理論

菊地 勇成 (Yusei KIKUCHI)      内山 祐介 (Yusuke UCHIYAMA)  
 筑波大学大学院システム情報研究群      筑波大学システム情報系

金川 哲也 (Tetsuya KANAGAWA)  
 筑波大学システム情報系

### 1 はじめに

近年、省エネルギー化や省資源化の観点から、各種部材の軽量化が望まれている。軽量化は、利点と引き換えに、剛性の低下による大変形といった欠点を招く。大変形すなわち有限の変形とは、たわみが微小ではなく、曲率が非線形となることを意味する。それゆえ、軽量化の促進に伴い、部材の非線形変形に対する精確な理解が、強く望まれる現状にある。

はりの非線形振動は、ひずみが小さいにもかかわらず、回転などによって引き起こされる。このとき、曲率による幾何学的非線形性による影響が無視できないが、これは、よく用いられる Hooke 弾性体 (線形弾性体) の仮定を逸脱している。そこで、幾何学的に正確な Cosserat 理論 [1] を用いた研究が行われつつある。しかしながら、Cosserat 理論に基づく基礎方程式系は、一般性の高さやその強い非線形性から、解析的に解くことが困難である。そのため、Lacarbonara [2] らに代表されるように、Bernoulli-Euler の仮定などの力学的制約を加えた特殊 Cosserat 理論が用いられてきた。

はりは構造物を構成する最も基本的な要素であり、その詳細な振動解析は複雑な形状の弾性体の動的挙動を知る上で重要である。これまでに、はりに発生する座屈現象 [3] や、強制加振 [4]、係数励振下での応答 [5] などに関する研究が多く、研究者によって行われてきた。しかしながら、これらの先行研究の多くは、時間依存のみを論じており、空間的な発展すなわち波動としての理解は未だ未解明にある。

本研究では、波動の挙動の解明に向けて、はりの非線形振動を、時空間を論ずる波動として扱い、変位の 3 次まで近似された運動方程式に減減振動法 [6] を適用した。その結果、長波と短波の 2 種類の非線形波動方程式を導き出した。

## 2 問題設定と基礎方程式

### 2.1 問題設定

図 1 に示すような一様なはりの平面運動を考える。有限回転を考慮する。簡単のため、せん断ひずみ、減衰、外力を無視する。 $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, 3)$  は慣性座標系の正規直交基底であり、 $\mathbf{a}_1$  は変形前のはりの中心軸と平行に、 $\mathbf{a}_2$  は直交するようにとる。このとき、はりの中心軸上の点 P における断面中心の初期空間座標  $\mathbf{X}$  を以下のよう表す。

$$\mathbf{X} = x\mathbf{a}_1 \quad (1)$$

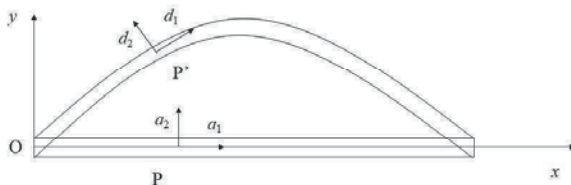


図1 Mechanical model of the beam.

点  $P$  が, 変形により,  $P'$  に変位した時の空間座標  $\boldsymbol{x}$  を以下のように表す:

$$\boldsymbol{x}(x, t) = \boldsymbol{X}(x) + \boldsymbol{u}(x, t) \quad (2)$$

ここで,  $\boldsymbol{u}$  は座標  $x$  と時刻  $t$  における変位をあらわすベクトルである:

$$\boldsymbol{u}(x, t) = u(x, t)\boldsymbol{b}_1 + v(x, t)\boldsymbol{b}_2 \quad (3)$$

ここに,  $\boldsymbol{b}$  は点  $P$  における正規直交基底であり,  $\boldsymbol{a}_1$  と  $\boldsymbol{b}_1$ ,  $\boldsymbol{a}_2$  と  $\boldsymbol{b}_2$  はそれぞれ平行であり,  $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2$  を満たす. はりの中心軸上のある点における断面中心を起点とする正規直交基底  $\boldsymbol{d}_i (i = 1, 2, 3)$  はディレクターとよばれ, 断面の方向を表す. これを考慮することによって, 微小要素の回転を考えることができる.  $\boldsymbol{b}_1$  と  $\boldsymbol{b}_2$  が張る平面内での回転を表す.  $\boldsymbol{d}_i$  と  $\boldsymbol{b}_i$  との関係は, 回転行列  $\boldsymbol{R}$  を用いて表される:

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}_i \quad (4)$$

ここで  $\boldsymbol{R}$  は, 剛体回転の角度  $\theta$  を用いて表される:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

曲率テンソル  $\boldsymbol{K}$  は  $\boldsymbol{R}$  を用いて定義される:

$$\boldsymbol{K} \equiv \boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{R}' \quad (6)$$

ここで,  $\top$  は転置を, ダッシュは初期位置で  $x$  に関する微分を表す. 式 (6) に式 (5) を代入する:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで, 曲率を  $\partial\theta/\partial x = k$  とした. このとき, ディレクター  $\boldsymbol{d}_i$  の微分  $\partial\boldsymbol{d}_i/\partial x$  は, 式 (4) と (6) から,

$$\frac{\partial\boldsymbol{d}_i}{\partial x} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_i \quad (8)$$

もとの微小要素  $PQ$  が  $P'Q'$  へ変位, 変形によって移動したとする. 純粋な変形は, 剛体並進変位  $\boldsymbol{u}$  および角度  $\theta$  の剛体回転による変位  $d\boldsymbol{u}^{(R)}$  を  $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$  から差し引きし, 剛体回転分の角度  $\theta$  を戻したものである.

ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は, 純粋な変形を変形と変位前の大きさ  $|d\boldsymbol{X}|$  で割ったもので定義される:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \frac{\boldsymbol{R}^\top (d\boldsymbol{u} - d\boldsymbol{u}^{(R)})}{|d\boldsymbol{X}|} \quad (9)$$

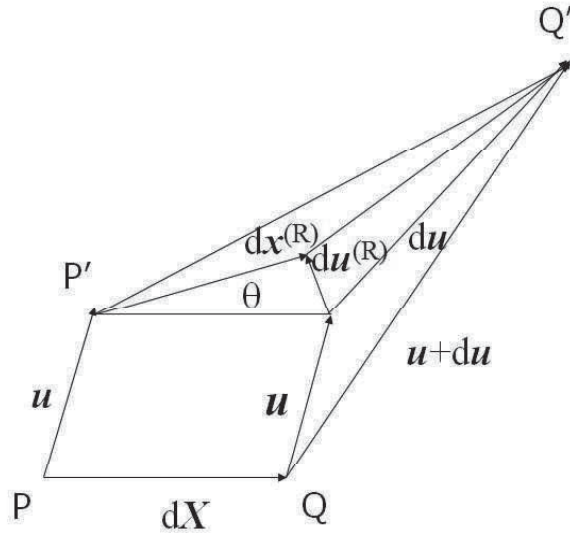


図2 Deformation from  $PQ$  to  $P'Q'$ :  $\mathbf{u}$  is the displacement,  $d\mathbf{u}$  is the increment of displacement, and  $d\mathbf{x}^{(R)}$  is the displacement due to the rotation with the angle  $\theta$ .

$\overrightarrow{PP'} = \mathbf{u}$ ,  $\overrightarrow{QQ'} = \mathbf{u} + d\mathbf{u}$  とすると, 剛体並進変位を除いた変位 (見かけ上の変形)  $d\mathbf{u}$  は,

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \quad (10)$$

並進変位と変形なしの時は, 剛体回転テンソル  $\mathbf{R}$  について次式が成り立つ:

$$d\mathbf{x}^{(R)} = \mathbf{R}d\mathbf{X} \quad (11)$$

このとき, 剛体回転による変位  $d\mathbf{u}^{(R)}$  は,

$$d\mathbf{u}^{(R)} = d\mathbf{x}^{(R)} - d\mathbf{X} \quad (12)$$

とかけると, 右辺第1項に式(11)を代入すると,

$$d\mathbf{u}^{(R)} = \mathbf{R}d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \quad (13)$$

式(9)に式(10)と(13)を代入する:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}' - \mathbf{X}' = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_1 + \gamma \mathbf{b}_2 \quad (14)$$

ここで, ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  を垂直ひずみ  $\varepsilon$  とせん断ひずみ  $\gamma$  に分解すると,

$$\varepsilon(x, t) = (1 + u') \cos \theta + v' \sin \theta - 1 \quad (15)$$

$$\gamma(x, t) = -(1 + u') \sin \theta + v' \cos \theta \quad (16)$$

せん断ひずみ  $\gamma$  を無視できると仮定する, すなわち  $\gamma \equiv 0$  とおくと, 式 (16) から回転角  $\theta$  が決まる:

$$\theta = \arctan\left(\frac{v'}{1+u'}\right) \quad (17)$$

式 (17) を式 (16) と (6) に代入すると, 結局, 垂直ひずみ  $\varepsilon$  と曲率  $k$  は以下のように表現できる:

$$\varepsilon = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1 \quad (18)$$

$$k = \theta' = \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{(1+\varepsilon)^2} \quad (19)$$

## 2.2 運動方程式

Cosserat 理論 [1] において, 直線と回転の運動方程式を書き下す:

$$\mathbf{n}' + \mathbf{f} = \rho A \ddot{\mathbf{x}} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{n} + \mathbf{c} = \rho I \dot{\theta} \mathbf{b}_3 \quad (21)$$

ここで,  $\mathbf{n}$  は面積力,  $\mathbf{M}$  は曲げモーメント,  $\mathbf{f}$  は単位体積あたりの体積力,  $\mathbf{c}$  は単位長さあたりの偶応力であり, 記号  $\times$  は外積を, 記号ドットは時間  $t$  による微分を表す. 本研究では, 先行研究 [5] 同様, 簡単のため体積力  $\mathbf{f}$  と偶応力  $\mathbf{c}$  を無視する一方で, 先行研究では無視されている回転慣性  $\rho I$  を考慮する.

$\mathbf{n}$  と  $\mathbf{M}$  を断面中心を起点とする正規直交基底  $\mathbf{d}_j$  で表す:

$$\mathbf{n} = N \mathbf{d}_1 + H \mathbf{d}_2 \quad (22)$$

$$\mathbf{M} = M \mathbf{d}_3 \quad (23)$$

運動方程式を  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  で表す:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{k}{1+\varepsilon} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k}{1+\varepsilon} (-\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) \right] \cos \theta - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M / \partial x}{1+\varepsilon} \right)' - kN + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-\rho I \partial^2 \theta / \partial t^2}{1+\varepsilon} \right) \right] \sin \theta = 0 \quad (24)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{k}{1+\varepsilon} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k}{1+\varepsilon} (-\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) \right] \sin \theta + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M / \partial x}{1+\varepsilon} \right) - kN + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-\rho I \partial^2 \theta / \partial t^2}{1+\varepsilon} \right) \right] \cos \theta = 0 \quad (25)$$

方程式系を閉じるために軸力とモーメントについて線形の構成則を使用する:

$$N(x, t) = EA\varepsilon(x, t) \quad (26)$$

$$M(x, t) = EI k(x, t) \quad (27)$$

式 (24) と (25) に式 (18)(19)(22)(23) を代入し, 運動方程式を縦変位  $u$  と横変位  $v$  のみで表す:

$$\begin{aligned}
 \rho A \ddot{u} - & \left\{ EA \left[ \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \right]' + EI \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{[(1+u')^2 + v'^2]^{3/2}} \left[ \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{[(1+u')^2 + v'^2]^{1/2}} \right]' \right. \\
 & \left. - \rho I \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{[(1+u')^2 + v'^2]^{3/2}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right] \right\} \cos \left[ \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right] \\
 & - \left[ \frac{EI}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \left[ \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{(1+u')^2 + v'^2} \right]' - EA \frac{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1}{(1+u')^2 + v'^2} \right. \\
 & \left. \rho I \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right]' \right] \sin \left[ \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 \rho A \ddot{v} - & \left\{ EA \left[ \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \right]' + EI \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{[(1+u')^2 + v'^2]^{3/2}} \left[ \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{[(1+u')^2 + v'^2]^{1/2}} \right]' \right. \\
 & \left. - \rho I \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{[(1+u')^2 + v'^2]^{3/2}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right] \right\} \sin \left[ \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right] \\
 & - \left[ \frac{EI}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \left[ \frac{v'' + u'v'' - u''v'}{(1+u')^2 + v'^2} \right]' - EA \frac{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1}{(1+u')^2 + v'^2} \right. \\
 & \left. \rho I \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right]' \right] \cos \left[ \arctan \left( \frac{v'}{1+u'} \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{29}$$

### 3 特異摂動解析

#### 3.1 無次元化

まず, 独立変数  $t$  と  $x$ , 未知変数  $u$  と  $v$  を無次元化する:

$$t^* = \frac{t}{T}, \quad x^* = \frac{x}{\ell}, \quad u^* = \frac{u}{\ell}, \quad v^* = \frac{v}{\ell} \tag{30}$$

ここで,  $\ell$  は代表長さであり,  $T^2 = \rho AL^4/(EI)$  を満たす. 以降, 簡単のためアスタリスク \* は省略する. 式 (28)(29) を変位の 3 次までで近似し無次元化する:

$$\begin{aligned} & \ddot{u} + \frac{AL^2}{I}(2u'v'v'' + 2u''v'^2 - u' - v'v'' - 2u'^2u'') \\ & + (3u'v'v''' + 4u'''v'v'' + 2u''v''^2 - v''v''' - v'v'''' + 3u'v'v'''' + 4u''v'v''' + u''''v'^2) \\ & + \frac{I}{AL^2}(v''\ddot{v} - 3u'v''\ddot{v} - 2u'\dot{v}'v'' + u'v'\dot{v}'' + 2\dot{u}'v'v'' + 2u''v'\dot{v}'' + \ddot{u}v'^2 - v'\ddot{v}'' - 4u'v'\ddot{v}''') = 0 \quad (31) \\ & \ddot{v} + \frac{AL^2}{I}\left(\frac{3}{2}v'^2v'' - u'v'' - u''v' - 2u'u''v'\right) + (v'''' + 31u'^2v'''' - 6v'^2v'''' - 2u'v'''' - 4u''v'''' \\ & + 12u'u''v'''' - u''''v' + 3u'u''''v' - 3u''''v'' + 9u'u''v'' + 7u''u''v' + 8u''^2v'' - 2v''^3 - 8v'v''v'''' \\ & + \frac{I}{AL^2}(-10u'^2\ddot{v}'' + 8v'^2\ddot{v}'' - 22u'u'\dot{v}'' - 22u'u'\dot{v}'' - 11u'u''\dot{v}' - 22u'u''\dot{v}'' + 5u'\dot{v}'' + 2u'^2v'' \\ & - 2v''\dot{v}'^2 + 4u'u''v' - 2u'\dot{v}'' + 6u''u'v' - 2u''\dot{v}' - 4v'\dot{v}'v'' - \ddot{u}v'' - u''\dot{v}' + \ddot{v}'' - 2u''\ddot{v}'' \\ & - 2v'v''\ddot{v}'' + 3u''\ddot{u}'v') = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

### 3.2 mKdV 方程式

遙減摂動法 [6] を使用し, Gardner–Morikawa 変換を導入する:

$$\tau = \epsilon^3 t, \quad \xi = \epsilon^1 (x - \lambda t) \quad (33)$$

ここで,  $\epsilon$  は小さな無次元パラメータ ( $0 < \epsilon \ll 1$ ),  $\lambda$  は位相速度である. 縦振動は横振動に比べ小さいという仮定から,

$$u = \epsilon^1 u, \quad v = \epsilon^0 v \quad (34)$$

と定めて, 式 (33)(34) を式 (31)(32) に代入して  $\epsilon$  のオーダーで整理すると, 次の結果を得る:

$$O(\epsilon^2): \quad \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} = 0 \quad (35)$$

$$O(\epsilon^4): \quad \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} - 2\lambda \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{3AL^2}{2I} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{I}{AL^2} \lambda^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = 0 \quad (36)$$

さて, 式 (36) に変数変換  $w = \partial v / \partial \xi$  を用いると, mKdV 方程式が導かれた:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{3AL^2}{4\lambda I} w^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda^2 \frac{I}{AL^2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (37)$$

左辺第 2 項は 3 次の非線形項, 第 3 項は分散項である. 分散項と非線形項の符号はいずれも負となる.

広田の直接法 [7] を用いて 1-ソリトン解を求めた.

$$w = \frac{8\beta \exp(p\xi + \beta p^3 \tau + c)}{8\beta + \alpha \exp 2(p\xi + \beta p^3 \tau + c)} \quad (38)$$

ここで,

$$\alpha = \frac{AL^2}{8\lambda I}, \quad \beta = \frac{1 + \lambda^2 I / (AL^2)}{2\lambda} \quad (39)$$

変位  $v$  に直しておく:

$$v = \frac{2}{p} \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} \frac{\exp(p\xi + \beta p^3 \tau + c)}{2} \right] \quad (40)$$

### 3.3 NLS 方程式

一般化された通減摂動法 [6] を使用するべく 式 (31)(32) をベクトル表記に直す:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \left[ \sum_{\beta=1}^{36} \prod_{\alpha=1}^3 \left( \mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (41)$$

ここで,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}$  は  $4 \times 4$  の正方行列であり, 次式で与えられる  $\mathbf{U}$  に依存する:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u' \\ \dot{v} \\ v' \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここで, 時間と空間の微分ともにを含む 2 階導関数項は以下のように変換した:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \quad (43)$$

線形分散関係は,

$$\det \mathbf{W}_1 = 0 \quad (44)$$

とかける. ただし,  $\omega$  は角周波数,  $k$  は波数である.

$$\mathbf{W}_{\ell} = -i\ell\omega \mathbf{I} + i\ell k \mathbf{A}_0 - i\ell^3 k^3 (\mathbf{K}_1^1)_0 + i\ell^3 k^2 \omega (\mathbf{H}_1^1)_0 - i\ell^3 k \omega^2 (\mathbf{H}_1^2)_0 \quad (45)$$

ここで, 下付き添え字の 0 は,  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  を代入されていることを示す. また, 独立変数を以下のように定義する.

$$\xi = \epsilon(x - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 t \quad (46)$$

ここで,  $\lambda$  は群速度  $\partial\omega/\partial k$  である. 式 (41) の解を以下のように仮定する:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \epsilon^{\alpha} \mathbf{U}^{(\alpha)} \quad (47)$$

$$\mathbf{U}^{(\alpha)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_{\ell}^{(\alpha)}(\xi, \tau) e^{i\ell(kx - \omega t)} \quad (48)$$

とする. ここで,  $\mathbf{U}^{(\alpha)}$  は実数であるから,  $\mathbf{U}_{\ell}^{(\alpha)} = \mathbf{U}_{-\ell}^{(\alpha)*}$  を満たす (アスタリスクは共役な複素数を表す). 周波数  $\omega$ , 波数  $k$  の平面波 (搬送波) の変調を考えているので,  $\ell \neq \pm 1$  に対しては,  $\mathbf{U}_{\ell}^{(1)} = \mathbf{0}$  とする.

$\epsilon^1$  の項

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbf{W}_{\ell} \cdot \mathbf{U}_{\ell}^{(1)} \exp[i\ell(kx - \omega t)] = \mathbf{0} \quad (49)$$

$\exp[i\ell(kx - \omega t)] \neq 0$  から, 各  $\ell$  について,

$$\mathbf{W}_\ell \cdot \mathbf{U}_\ell^{(1)} = \mathbf{0} \quad (50)$$

が成り立つ.  $\mathbf{W}_1$  の右固有ベクトルを

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\omega/k \\ 1 \\ k^3 \\ \frac{\omega[-1 + Ik^2/(AL^2)]}{k^2} \\ \frac{1 - Ik^2/(AL^2)}{1} \end{bmatrix} \quad (51)$$

とすると,  $\ell = 1$  で,

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \phi^{(1)} \mathbf{R} \quad (52)$$

ここで,  $\phi^{(1)}$  は  $\tau$  と  $\xi$  のスカラー関数である. また,  $\ell = -1$  では,

$$\mathbf{U}_{-1}^{(1)} = \phi^{(1)*} \mathbf{R}^* \quad (53)$$

となる.  $\epsilon^2$  の項は,  $\exp[i\ell(kx - \omega t)] = Z_\ell$  とすると,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbf{W}_\ell \cdot \mathbf{U}_\ell^{(2)} + [-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 + \ell^2(2k\omega + k^2\lambda)(\mathbf{H}_1^1)_0 - 3\ell^2 k^2 (\mathbf{K}_1^1)_0 - \ell^2(\omega^2 + 2\omega k\lambda)(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_\ell^{(1)}}{\partial \xi} \right\} Z_\ell \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i Z_{n+m} \mathbf{U}_m^{(1)} \cdot \left\{ m k \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 + m^3 k \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot [\nabla_u (-k^2 \mathbf{K}_1^1 + k\omega \mathbf{H}_1^1 - \omega^2 \mathbf{H}_1^2)]_0 \right. \\ & - m^3 k^3 \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{K}_1^6)_0 \cdot (\mathbf{K}_3^6)_0 + m^2(n+m) k \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot [\nabla_u (-k^2 \mathbf{K}_2^3 + k\omega \mathbf{H}_2^3 - \omega^2 \mathbf{H}_2^4 + k\omega \mathbf{K}_2^4)]_0 \\ & + m^2(n+m) k \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \left\{ \nabla_u [-k^2 (\mathbf{K}_1^5)_0 \mathbf{K}_2^5 + k\omega (\mathbf{H}_1^7)_0 \cdot \mathbf{K}_2^7 - \omega^2 (\mathbf{H}_1^8)_0 \cdot \mathbf{K}_2^8 + k\omega (\mathbf{K}_1^9)_0 \cdot \mathbf{K}_2^9 - \omega^2 (\mathbf{K}_1^{10})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{10} \right. \\ & \left. \left. + k\omega (\mathbf{K}_1^{11})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{11} - \omega^2 (\mathbf{K}_1^{12})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{12} \right\} \right\} = \mathbf{0} \quad (54) \end{aligned}$$

ここで,  $\exp[i\ell(kx - \omega t)] \neq 0$  から, 各  $\ell$  について,  $\exp[i\ell(kx - \omega t)]$  の係数がゼロとなる.  $\ell \neq \pm 1$  に対しては,  $\mathbf{U}_\ell^{(1)} = \mathbf{0}$  としたので,  $Z_\ell = \exp[i\ell(kx - \omega t)]$  は,  $\exp[i(n+m)(kx - \omega t)]$  を,  $Z_{n+m} = \exp[i(n+m)(kx - \omega t)]$  は,  $\exp(0)$  または  $\exp[2i(kx - \omega t)]$  を考える必要がある.

$\exp[i(kx - \omega t)]$  の項は,

$$\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{U}_1^{(2)} + [-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 + (2k\omega + k^2\lambda)(\mathbf{H}_1^1)_0 - 3k^2(\mathbf{K}_1^1)_0 - (\omega^2 + 2\omega k\lambda)(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_1^{(1)}}{\partial \xi} = \mathbf{0} \quad (55)$$

式と (44) から,  $\mathbf{W}_1$  の左固有ベクトル  $\mathbf{L}$  をもちいて,

$$\mathbf{L} \cdot [-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 + (2k\omega + k^2\lambda)(\mathbf{H}_1^1)_0 - 3k^2(\mathbf{K}_1^1)_0 - (\omega^2 + 2\omega k\lambda)(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (56)$$

となる必要がある.

$\mathbf{R}$  は  $\mathbf{W}_1$  の右固有ベクトルから,

$$\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (57)$$



$k$  で微分すると,

$$\mathbf{W}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + i [-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 + (2k\omega + k^2\lambda)(\mathbf{H}_1^1)_0 - 3k^2(\mathbf{K}_1^1)_0 - (\omega^2 + 2\omega k\lambda)(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (58)$$

このとき,

$$\mathbf{U}_1^{(2)} = \varphi^{(2)} \mathbf{R} - i \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} \right) \quad (59)$$

$\exp(0)$  の項は,  $n = 1, m = -1$  または,  $n = -1, m = 1$  のときであるが,  $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$  となるので,  $\mathbf{U}_0^{(2)}$  は任意。ただし,

$$\mathbf{U}_{-1}^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{U}_1^{(1)} - \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{U}_{-1}^{(1)} - k^2 \mathbf{U}_{-1}^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{K}_1^6)_0 \cdot (\mathbf{K}_3^6)_0 \cdot \mathbf{U}_1^{(1)} + k^2 \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{K}_1^6)_0 \cdot (\mathbf{K}_3^6)_0 \cdot \mathbf{U}_{-1}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (60)$$

を満たす。  $\exp[2i(kx - \omega t)]$  の項は,  $n = 1, m = 1$  のときであり,

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{U}_2^{(2)} + ik \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \mathbf{U}_1^{(1)} + ik \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot [\nabla_u (-k^2 \mathbf{K}_1^1 + k\omega \mathbf{H}_1^1 - \omega^2 \mathbf{H}_1^2)]_0 \cdot \mathbf{U}_1^{(1)} \\ & - ik^3 \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{K}_1^6)_0 \cdot (\mathbf{K}_3^6)_0 \cdot \mathbf{U}_1^{(1)} + 2ik \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot [\nabla_u (-k^2 \mathbf{K}_2^3 + k\omega \mathbf{H}_2^3 - \omega^2 \mathbf{H}_2^4 + k\omega \mathbf{K}_2^4)]_0 \cdot \mathbf{U}_1^{(1)} \\ & + 2ik \mathbf{U}_1^{(1)} \cdot \left\{ \nabla_u [-k^2 (\mathbf{K}_1^5)_0 \cdot \mathbf{K}_2^5 + k\omega (\mathbf{H}_1^7)_0 \cdot \mathbf{K}_2^7 - \omega^2 (\mathbf{H}_1^8)_0 \cdot \mathbf{K}_2^8 + k\omega (\mathbf{K}_1^9)_0 \cdot \mathbf{K}_2^9 - \omega^2 (\mathbf{K}_1^{10})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{10} \right. \\ & \left. + k\omega (\mathbf{K}_1^{11})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{11} - \omega^2 (\mathbf{K}_1^{12})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{12} \right\} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (61)$$

よって,  $|\mathbf{W}_2| \neq 0$  から,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2^{(2)} &= -\mathbf{W}_2^{-1} \left\{ ik \mathbf{R} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{R} + ik \mathbf{R} \cdot [\nabla_u (-k^2 \mathbf{K}_1^1 + k\omega \mathbf{H}_1^1 - \omega^2 \mathbf{H}_1^2)]_0 \cdot \mathbf{R} \right. \\ & - ik^3 \mathbf{R} \cdot (\nabla_u \mathbf{K}_1^6)_0 \cdot (\mathbf{K}_3^6)_0 \cdot \mathbf{R} + 2ik \mathbf{R} \cdot [\nabla_u (-k^2 \mathbf{K}_2^3 + k\omega \mathbf{H}_2^3 - \omega^2 \mathbf{H}_2^4 + k\omega \mathbf{K}_2^4)]_0 \cdot \mathbf{R} \\ & + 2ik \mathbf{R} \cdot \left\{ \nabla_u [-k^2 (\mathbf{K}_1^5)_0 \cdot \mathbf{K}_2^5 + k\omega (\mathbf{H}_1^7)_0 \cdot \mathbf{K}_2^7 - \omega^2 (\mathbf{H}_1^8)_0 \cdot \mathbf{K}_2^8 + k\omega (\mathbf{K}_1^9)_0 \cdot \mathbf{K}_2^9 - \omega^2 (\mathbf{K}_1^{10})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{10} \right. \\ & \left. + k\omega (\mathbf{K}_1^{11})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{11} - \omega^2 (\mathbf{K}_1^{12})_0 \cdot \mathbf{H}_2^{12} \right\} \mathbf{R} \left. \right\} \left\{ \varphi^{(1)} \right\}^2 \\ &= \mathbf{R}_2 \left\{ \varphi^{(1)} \right\}^2 \end{aligned} \quad (62)$$

$\epsilon^3$  の項

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbf{W}_\ell \cdot \mathbf{U}_\ell^{(3)} + [-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 + \ell^2(2k\omega + k^2\lambda)(\mathbf{H}_1^1)_0 - 3\ell^2 k^2 (\mathbf{K}_1^1)_0 - \ell^2(\omega^2 + 2\omega k\lambda)(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_\ell^{(2)}}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + [\mathbf{I} + \ell^2 k^2 (\mathbf{H}_1^1)_0 + 2\ell^2 \omega k (\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_\ell^{(1)}}{\partial \tau} + i\ell [-2(k\lambda + \omega)(\mathbf{H}_1^1)_0 + 3k(\mathbf{K}_1^1)_0 - 2\omega(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}_\ell^{(1)}}{\partial \xi^2} \right\} Z_\ell \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_m^{(1)}}{\partial \xi} + imk \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{U}_m^{(2)} + imk \mathbf{U}_n^{(2)} \cdot (\nabla_u \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{U}_m^{(1)} \right\} Z_{n+m} \\ & = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (63)$$

左から  $\mathbf{L}$  をかけ, (52) と (59) を代入すると,

$$\begin{aligned} & \mathbf{L} \cdot [\mathbf{I} + k^2(\mathbf{H}_1^1)_0 + 2\omega k(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \mathbf{R} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau} + i\mathbf{L} \cdot [-2(k\lambda + \omega)(\mathbf{H}_1^1)_0 + 3k(\mathbf{K}_1^1)_0 - 2\omega(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \mathbf{R} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} \\ & + i\mathbf{L} \cdot [-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_0 + (2k\omega + k^2\lambda)(\mathbf{H}_1^1)_0 - 3k^2(\mathbf{K}_1^1)_0 - (\omega^2 + 2\omega k\lambda)(\mathbf{H}_1^2)_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} \\ & + iP|\varphi^{(1)}|^2\varphi^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

ここで,  $P$  は  $|\varphi^{(1)}|^2\varphi^{(1)}$  の係数である.

最終的に,  $\phi^{(1)}$  についての nonlinear Schrödinger (NLS) 方程式が得られた.

$$i \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + q |\phi^{(1)}|^2 \phi^{(1)} = 0 \quad (65)$$

ここに,  $p$  と  $q$  は実定数係数であり, その様な形は次報で報告する.

## 4 おわりに

一様なりの中を伝播する非線形波動を有限変形を考慮し, 長波と短波領域において幾何学的に正確である Cosserat 理論を用いて, 理論的に調べた. 長波においては, mKdV 方程式を, 準単色の短い搬送波においては, NLS 方程式を導出した. mKdV 方程式では, 非線形項と分散項はともに負の値を持ち, 非線形性は軸方向の剛性によるものであり, 分散項は曲げ剛性と回転慣性によって決定される. NLS 方程式では, 非線形性は, 軸方向剛性と曲げ剛性によって, 分散は, 回転慣性および軸方向剛性によって決まることが分かった. 今後は, mKdV 方程式の変数が, 変位ではなく変位の空間 1 階微分となる原因の解明を目指す.

## 参考文献

- [1] Cosserat & Cosserat, *Théorie des corps déformables* (Hermann, 1909).
- [2] Lacarbonara & Yabuno, *Mech. Res. Commun.*, **43** (2006), 5066.
- [3] Lacarbonara, Paolone & Yabuno, *Mech. Res. Commun.*, **31** (2004), 301.
- [4] Saito, Sato & Yutani, *J. Sound Vib.*, **46** (1976), 515.
- [5] Son, Uchiyama, Lacarbonara & Yabuno, *Nonlinear Dyn.*, **53** (2008), 129.
- [6] Jeffrey & Kawahara, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory* (Pitman, 1982).
- [7] Hirota, *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications* (Springer, 1976).