多分散気泡流中の弱非線形圧力波を記述する KdV-Burgers 方程式

石塚 怜央奈 (Reona ISHITSUKA)
筑波大学大学院システム情報工学研究群

金川 哲也 (Tetsuya KANAGAWA)
筑波大学システム情報系

1 はじめに

小さな気泡をたくさん含む水 (気泡流) の中を伝わる圧力波の問題は, マイクロバブルによる超音波造影剤や薬剤入りカプセル気泡を利用したドラッグデリバリーシステムをはじめとした, 様々の技術の基礎となる問題である. これらの技術の発展のためには気泡流中の圧力波の理解が重要であるが, 人体を用いた実験や血管の状態の異なる患者一人一人について数値解析を実行するのは困難であるため, 理論的な予測への期待が高まりつつある.

著者らのグループ [1] では, 気泡流中における圧力波の中でも, 弱い非線形効果を伴う長距離伝播の結果として, いかなる波形が形成されるのかを予測可能な弱非線形波動方程式に着目してきた. しかし, この先行研究 [1] では, 気泡の大きさが一様であるという仮定がなされており, これは実現象としてありえない状況である. そこで本研究では, この仮定を取り払い, 気泡の大きさの分布を考慮にいれた弱非線形波動方程式を導くことを目的とする.

2 問題の定式化

2.1 問題設定

多数の微細な球形気泡を含む水 (気泡流) の中において, 音源から入射される平面圧力波の伝播を理論的に調べる. 初期において, 気泡流は静止しているとする. 気泡間の直接的相互作用は存在しないと仮定する. 気泡の合体, 分裂, 生成, 消滅は考慮しない. 熱伝導性, 気液界面以外における粘性, 気液界面における相変化は無視する.

気泡の数密度は初期一様であるが, 気泡の初期半径が空間座標によって変化する場合, すなわち, 気泡の大きさに分布を有する場合を扱う. 気泡径は, 音源近傍では初期に一様であるが, 音源から遠く離れた場では初期に非一様であるとする. ここが本研究の新規性である.

2.2 基礎方程式系

二流体モデルに基づいた, 気泡流の 1 次元の質量保存と運動量保存の式 [2] を用いる.

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*)+\frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*u_{\mathrm{G}}^*)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*\right]+\frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*u_{\mathrm{L}}^*\right]=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*u_{\mathrm{G}}^*)+\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*{u_{\mathrm{G}}^*}^2\right)+\alpha\frac{\partial p_{\mathrm{G}}^*}{\partial x^*}=F^* \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*u_{\mathrm{L}}^*\right]+\frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*{u_{\mathrm{L}}^*}^2\right]+(1-\alpha)\frac{\partial p_{\mathrm{L}}^*}{\partial x^*}+P^*\frac{\partial\alpha}{\partial x^*}=-F^* \tag{4}$$

ここに, t^* は時刻, x^* は位置座標, ρ^* は密度, u^* は流速, p^* は圧力, P^* は界面圧力であり, 添字 G は気相において体積平均された量を, L は液相において体積平均された量をそれぞれ表す. 界面での運動量輸送を表す仮想質量力 F^* として, Yano ら [3, 4] の付加質量力のモデルを用いる.

$$F^*=-\beta_1\alpha\rho_{\mathrm{L}}^*\left(\frac{\mathrm{D_G}u_{\mathrm{G}}^*}{\mathrm{D}t^*}-\frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L}}^*}{\mathrm{D}t^*}\right)-\beta_2\rho_{\mathrm{L}}^*(u_{\mathrm{G}}^*-u_{\mathrm{L}}^*)\frac{\mathrm{D_G}\alpha}{\mathrm{D}t^*}-\beta_3\alpha(u_{\mathrm{G}}^*-u_{\mathrm{L}}^*)\frac{\mathrm{D_G}\rho_{\mathrm{L}}^*}{\mathrm{D}t^*} \tag{5}$$

ここに, 球形気泡においては, 係数 β_j $(j=1,2,3)$ はいずれも 1/2 となる.

次に, 圧縮性の液体中にある代表気泡の球形振動を記述する, Keller の方程式 [5] を以下に示す.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{c_{\mathrm{L0}}^*}\frac{\mathrm{D_G}R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)R^*\frac{\mathrm{D_G^2}R^*}{\mathrm{D}{t^*}^2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3c_{\mathrm{L0}}^*}\frac{\mathrm{D_G}R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\left(\frac{\mathrm{D_G}R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)^2&\\ =\left(1+\frac{1}{c_{\mathrm{L0}}^*}\frac{\mathrm{D_G}R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\frac{P^*}{\rho_{\mathrm{L0}}^*}+\frac{R^*}{\rho_{\mathrm{L0}}^*c_{\mathrm{L0}}^*}\frac{\mathrm{D_G}}{\mathrm{D}t^*}(p_{\mathrm{L}}^*+P^*)&\end{aligned} \tag{6}$$

ここに, $R^*(x^*,t^*)$ は代表気泡の半径, c_{L0}^* は単相水中の音速である. Lagrange 微分は次式で定義される.

$$\frac{\mathrm{D_G}}{\mathrm{D}t^*}\equiv\frac{\partial}{\partial t^*}+u_{\mathrm{G}}^*\frac{\partial}{\partial x^*},\quad\frac{\mathrm{D_L}}{\mathrm{D}t^*}\equiv\frac{\partial}{\partial t^*}+u_{\mathrm{L}}^*\frac{\partial}{\partial x^*} \tag{7}$$

以上の方程式系 (1)–(6) に, 以下の 4 つの構成方程式を加えて数学的に閉じる. それぞれ, 気相についてのポリトロープ状態方程式, 液相についての Tait の状態方程式, 気泡内気体の質量保存の式, 気液界面での圧力の釣り合い式である.

$$\begin{aligned}&\frac{p_{\mathrm{G}}^*}{p_{\mathrm{G0}}^*}=\left(\frac{\rho_{\mathrm{G}}^*}{\rho_{\mathrm{G0}}^*}\right)^\gamma,\quad p_{\mathrm{L}}^*=p_{\mathrm{L0}}^*+\frac{\rho_{\mathrm{L0}}^*c_{\mathrm{L0}}^{*2}}{n}\left[\left(\frac{\rho_{\mathrm{L}}^*}{\rho_{\mathrm{L0}}^*}\right)^n-1\right],\\ &\frac{\rho_{\mathrm{G}}^*}{\rho_{\mathrm{G0}}^*}=\left(\frac{R_0^*}{R^*}\right)^3,\quad p_{\mathrm{G}}^*-(p_{\mathrm{L}}^*+P^*)=\frac{2\sigma^*}{R^*}+\frac{4\mu^*}{R^*}\frac{\mathrm{D_G}R^*}{\mathrm{D}t^*}\end{aligned} \tag{8}$$

ここに, γ はポリトロープ指数, n は物性定数, σ^* は表面張力, μ^* は液体の粘性である. 添字の 0 は初期静止状態における物理量であることを表しており, いずれも定数である.

2.3 多重尺度解析

波の代表伝播速度 U^* と代表波長 L^* の間に $U^*=L^*\omega^*$ という関係があるとし, ω^* $(\equiv 1/T^*)$ は入射した音波の代表周波数, T^* は代表周期である. ここで, 3 つの無次元数の大きさを, 先行研究 [1] に従って決定する.

$$\frac{U^*}{c_{\mathrm{L0}}^*}\equiv O(\sqrt{\epsilon})=V\sqrt{\epsilon},\quad\frac{R_0^*}{L^*}\equiv O(\sqrt{\epsilon})=\mathit{\Delta}\sqrt{\epsilon},\quad\frac{\omega^*}{\omega_{\mathrm{B}}^*}\equiv O(\sqrt{\epsilon})=\mathit{\Omega}\sqrt{\epsilon} \tag{9}$$

ここに, ϵ ($\ll 1$) は弱非線形波動の代表振幅を表す無次元量であり, また, ω_B^* は単一気泡の固有周波数である．定数 V, $\mathit{\Delta}$, $\mathit{\Omega}$ はいずれも $O(1)$ とする．式 (9) は, 気泡流中音速は単相水中音速に比べてとても小さい, 気泡径は波長に比べてとても小さい, 入射音波の周波数は気泡の固有周波数に比べてとても小さい, ということをそれぞれ表している．

時刻 t^* と位置 x^* を $t \equiv t^*/T^*$ と $x \equiv x^*/L^*$ のように, それぞれ無次元化する．そして, 音源近傍場に対して添字 0 の, 音源遠方場に対して添字 1 の, 新しい独立変数を導入する [6].

$$t_0 = t, \quad x_0 = x, \qquad t_1 = \epsilon t, \quad x_1 = \epsilon x \tag{10}$$

従属変数は, 無次元化をして ϵ のべき級数で展開する．代表例として p_L^*, ρ_L^*, u_L^* の摂動展開を以下に与える．

$$p_\mathrm{L}^*/(\rho_\mathrm{L0}^* U^{*2}) = p_\mathrm{L0} + \epsilon p_\mathrm{L1} + \epsilon^2 p_\mathrm{L2} + O(\epsilon^3) \tag{11}$$

$$u_\mathrm{L}^*/U^* = \epsilon u_\mathrm{L1} + \epsilon^2 u_\mathrm{L2} + O(\epsilon^3) \tag{12}$$

$$\rho_\mathrm{L}^*/\rho_\mathrm{L0}^* = 1 + \epsilon^2 \rho_\mathrm{L1} + \epsilon^3 \rho_\mathrm{L2} + O(\epsilon^4) \tag{13}$$

摂動展開は, ρ_L^* を除き, 全て $O(\epsilon^1)$ から始められる．

初期静止状態における気相と液相に対する圧力 p_G0^* と p_L0^*, 液相部の粘性 μ^* について, それらを特徴付ける無次元量を, 以下の式でそれぞれ導入する．

$$\frac{p_\mathrm{G0}^*}{\rho_\mathrm{L0}^* U^{*2}} \equiv O(1) = p_\mathrm{G0}, \quad \frac{p_\mathrm{L0}^*}{\rho_\mathrm{L0}^* U^{*2}} \equiv O(1) = p_\mathrm{L0}, \quad \frac{\mu^*}{\rho_\mathrm{L0}^* U^* L^*} \equiv O(\epsilon) = \mu\epsilon \tag{14}$$

ここに, p_G0, p_L0, μ はいずれも $O(1)$ の定数である．この研究では, 液体の粘性は気液間の界面上でのみ働くとする．

2.4 気泡径の多分散性

気泡径の非一様性を考慮した展開として, R^* は次式の形で展開する．

$$R^*/R_0^* = 1 + \epsilon[R_1 + \delta_R(x_1)] + \epsilon^2 R_2 + O(\epsilon^3) \tag{15}$$

この式における δ_R は, 初期静止状態における気泡径の代表値からの差を表す．式 (15) と同様にボイド率 α を次式の形で展開する．

$$\alpha/\alpha_0 = 1 + \epsilon[\alpha_1 + \delta_\alpha(x_1)] + \epsilon^2 \alpha_2 + O(\epsilon^3) \tag{16}$$

この式における δ_R は, 初期静止状態におけるボイド率の代表値からの差を表す．ここで, δ_R と δ_α は, x_1 のみに依存して遠方場のみでの非一様効果を記述する, 既知の関数である．

3 結果

3.1 近傍場での解析結果

式 (9)–(16) を 式 (1)–(8) に代入して, 得られた方程式を ϵ について整理し, 線形化した方程式を以下に示す．

(i) 気相における質量保存の式

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_0} = 0 \tag{17}$$

(ii) 液相における質量保存の式

$$\alpha_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial x_0} = 0 \tag{18}$$

(iii) 気相における運動量保存の式

$$\beta_1\frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial t_0} - \beta_1\frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{\mathrm{G0}}\frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0 \tag{19}$$

(iv) 液相における運動量保存の式

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_0} = 0 \tag{20}$$

(v) Keller の方程式

$$R_1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2}p_{\mathrm{L1}} = 0 \tag{21}$$

式 (17)–(21) から, 変数 α_1, u_{G1}, u_{L1}, p_{L1} を取り除くことで, 気泡径に対する線形波動方程式を得る.

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - v_{\mathrm{p}}^2\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} = 0 \tag{22}$$

ただし, v_{p} は次式で与えられる.

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{3\alpha_0(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{\mathrm{G0}} + \beta_1(1-\alpha_0)\Delta^2/\Omega^2}{3\beta_1\alpha_0(1-\alpha_0)}} \tag{23}$$

以降, $v_{\mathrm{p}} \equiv 1$ を簡単化のために用いる.

よって, 近傍場における結果は, 単分散を仮定した場合の結果と完全に同一である [1].

3.2 遠方場での解析結果

2 次のオーダについての方程式を以下に示す.

(i) 液相における質量保存の式

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_2}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{\mathrm{G2}}}{\partial x_0} = \tilde{K}_1 \tag{24}$$

(ii) 液相における質量保存の式

$$\alpha_0\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L2}}}{\partial x_0} = \tilde{K}_2 \tag{25}$$

(iii) 気相における運動量保存の式

$$\beta_1\frac{\partial u_{\mathrm{G2}}}{\partial t_0} - \beta_1\frac{\partial u_{\mathrm{L2}}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{\mathrm{G0}}\frac{\partial R_2}{\partial x_0} = \tilde{K}_3 \tag{26}$$

(iv) 気相における運動量保存の式

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_2}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{\mathrm{G2}}}{\partial x_0} = \tilde{K}_4 \tag{27}$$

(v) Keller の方程式

$$R_2 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{\mathrm{L2}} = \tilde{K}_5 \tag{28}$$

ただし, 上式の非同次項 $\tilde{K}_i$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ は次式で与えられる.

$$\tilde{K}_1 = K_1 + 3\delta_R \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} + 3\delta_\alpha \frac{\partial R_1}{\partial t_0} - 12\delta_R \frac{\partial R_1}{\partial t_0} - \delta_\alpha \frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_0} + 3\delta_R \frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_0} \tag{29}$$

$$\tilde{K}_2 = K_2 - \alpha_0 \delta_\alpha \frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial x_0} \tag{30}$$

$$\tilde{K}_3 = K_3 - \beta_1 \delta_\alpha \left(\frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial t_0} - \frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial t_0} \right) + 3\gamma p_{\mathrm{G0}} \delta_\alpha \frac{\partial R_1}{\partial x_0} - 3\delta_R \gamma (3\gamma + 1) p_{\mathrm{G0}} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} \tag{31}$$

$$\tilde{K}_4 = K_4 + \beta_1 \alpha_0 \delta_\alpha \left(\frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial t_0} - \frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial t_0} \right) + \alpha_0 \delta_\alpha \frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial t_0} + \alpha_0 \delta_\alpha \frac{\partial p_{\mathrm{L1}}}{\partial x_0} - \alpha_0 \delta_\alpha \frac{\partial \delta_\alpha}{\partial x_1} \tag{32}$$

$$\tilde{K}_5 = K_5 + \left[1 + \frac{3\gamma(3\gamma - 1) p_{\mathrm{G0}}}{2} \left(\frac{\Omega^2}{\Delta^2} \right) \right] \delta_R (2R_1 - \delta_R) \tag{33}$$

ここに, K_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ とは単分散を仮定した場合に得られる非同次項である [1].

式 (24)–(28) を結合することで次式が導かれる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} &= \tilde{K}(f; t_1, x_1, \varphi_0 = x_0 - t_0) = \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial \varphi_0} - \frac{1}{3\alpha_0} \frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial \varphi_0} \\ &\quad + \frac{1 - \alpha_0 + \beta_1}{3\beta_1 (1 - \alpha_0)} \frac{\partial \tilde{K}_3}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{3\alpha_0 (1 - \alpha_0)} \frac{\partial \tilde{K}_4}{\partial \varphi_0} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0 \Omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{K}_5}{\partial \varphi_0^2} \end{aligned} \tag{34}$$

上式 (34) の可解条件 [1] により次式が得られる.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \epsilon \left[(\Pi_0 + \Pi_4) \frac{\partial f}{\partial x} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial x} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right] = 0 \tag{35}$$

そして, 最終的に次の KdVB 方程式が導出される.

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \Pi_4 \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \tag{36}$$

ここに, 独立変数は以下のように変換した.

$$\tau \equiv \epsilon t, \quad \xi \equiv x - (1 + \epsilon \Pi_0) t \tag{37}$$

先行研究 [1] の結果と比べると, 移流項の係数として Π_4 が新たに加わった. 一方で, 非線形項の係数 Π_1, 散逸項の係数 Π_2, 分散項の係数 Π_3 は単分散を仮定した先行研究 [1] の結果と同一である. したがって, 式 (36) は, Π_4 を含む新たな移流項の出現を除いたら, 先行研究の KdVB 方程式 [1] と同一である.

ここで, 移流項の係数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \delta_R \left[\frac{1}{2} - 3\gamma(\gamma + 1) p_{\mathrm{G0}} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0 \Omega^2} - \frac{\gamma(3\gamma - 1) p_{\mathrm{G0}}}{2\alpha_0} \right] \\ &\quad + \delta_\alpha \left[\frac{3\beta_1 s^2 - \beta_1 s + 18(\gamma p_{\mathrm{G0}} - \beta_1)(1 - \alpha_0 + \beta_1) - \beta_1 \Delta^2 / \Omega^2}{6\beta_1 (1 - \alpha_0)} - \frac{\beta_1 s^2 - (6\beta_1 - 5\alpha_0 + 6) s}{6(1 - \alpha_0)^2} \right] \end{aligned} \tag{38}$$

ただし

$$s \equiv \frac{(1-\alpha_0)[3\beta_1\alpha_0 + (1-\alpha_0)\Delta^2/\Omega^2]}{\alpha_0(1-\alpha_0+\beta_1)} \tag{39}$$

とおいた.

本研究結果において, 単分散への極限, すなわち, $\delta_R(x_1) = \delta_\alpha(x_1) = \Pi_4 = 0$ を考えると先行研究の KdVB 方程式 [1] に帰着する.

4　おわりに

微細な球形気泡を多数含む水の中における平面圧力波の弱非線形伝播を理論的に調べた. 特に初期静止状態における気泡径の多分散性 (気泡の大きさの非一様性) に焦点を当てた. ただし気泡径の数密度は一様とした. その結果, 遠方場での気泡径の多分散性を含む KdVB 方程式の導出に成功した. 本研究結果の単分散極限を取ったものと, 単分散を仮定した先行研究結果 [1] は一致することが確認でき, 本研究結果は先行研究結果 [1] をより一般的な結果へと拡張したものである. 得られた KdVB 方程式には, 新しい項として波の移流を表す項が現れ, 移流項の係数は変数係数の形となった. 一方で, 非線形, 散逸, 分散を表す項には変化はなかった.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 18K03942 の助成を受けて遂行された.

参考文献

[1] T. Kanagawa, T. Yano, M. Watanabe and S. Fujikawa, "Unified theory based on parameter scaling for derivation of nonlinear wave equations in bubbly liquids," *J. Fluid Sci. Technol.*, **5,** 351–369 (2010).

[2] R. Egashira, T. Yano and S. Fujikawa, "Linear wave propagation of fast and slow modes in mixtures of liquid and gas bubbles," *Fluid Dyn. Res.*, **34,** 317–334 (2004).

[3] T. Yano, R. Egashira and S. Fujikawa, "Linear analysis of dispersive waves in bubbly flows based on averaged equations," *J. Phys. Soc. Jpn.*, **75,** 104401 (2006).

[4] I. Eames and J. C. R. Hunt, "Forces on bodies moving unsteadily in rapidly compressed flows," *J. Fluid Mech.*, **505,** 349–364 (2004).

[5] J. B. Keller and I. I. Kolodner, "Damping of underwater explosion bubble oscillations," *J. Appl. Phys.*, **27,** 1152–1161 (1956).

[6] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory* (Pitman, London, 1982).