京大入試風景　京都新聞社 提供

京都大学新聞
学生団体
京都大学新聞社
京都市左京区吉田
京都大学構内
（751）2054 直通
（751）2111（内線2571）
振替・京都3909
（1部50円 1年間2,000円）

クラスコンパの御相談承ります
割烹 きよす
スキヤキ・ナベ料理一切
寺町今出川上ル
TEL（231）5121
（231）5122
（222）1364
（222）0893

入試解答解説特集

英語

■解答■

I (i)

1	4	5	8

(ii)

1	2	3	4
b	a	b	c

II (i)

a	b	c	d	e
to	as	to	than	to

(ii)

1	2	3	4	5
g	b	a	j	l

(iii)

3	6	7	9

(iv)

1	2	3	4	5
c	b	b	c	b
6	7	8	9	10
b	a	b	a	c

III
1. 無数の天体系中に，高等生物の生存を可能にする天体は他にないというのは不合理で非科学的である。しかしながら，我々が万物の中心にはいないという考えに慣れるのはなかなか難しいと人間は感じて来た。
2. 今では人間が種としてすばらしい資質を授かっているが，無類のものではないという事実を我々は認めねばならない。
3. 我々は今までしたこともない仕方で物を創り出すことができる。人間のことで最も貴重なことは我々人間が自分の目的を明確にし，自分の運命を形成できるということである。

IV（解答例1）

When you speak in public or write on something, you find it difficult to express even in your own language what you have in mind. With a foreign language, it is doubtful whether you will be able to master one in all your life. It is, indeed, nothing to be wondered at that a Japanese remains a poor speaker of English after many years of Englsh study at school.

（解答例2）

Speaking in the presence of others or writing about something shows us how difficult it is to express ourselves even in our mother tongue. We cannot be sure whether we will be able to have a good command of a foreign language after a lifelong study. It is admittedly no wonder that years of English study at school leave us Japanese poor speakers of English.

■解説■

二つの総合問題，部分訳，それに和文英訳と，ここの英語問題も形が定まった感がある。問題の素材が親しみのある内容のものであることや，問題の性格が明確なことから，昨年より平均点がかなり高いだろう。全体的にみて（要求が多すぎるかも知れないが）円満な基礎力に裏づけられた読解力に加えて，知的興味に支えられた常識，日本語による確かな表現力などが備わっていてはじめて攻略可能といえるだろう。

I 都市と文明に関する essay の一節と思われる問題文で，True-False と，選択肢の語義問題。T-F 問題は大抵，各項目が問題文の部分に関わっていて，全体に渡っていないから相当部分を探って照合し，問題なく T とできるものをとる一方ではっきり F とすべきものを消していくと「合致するもの何個」の指示が助けになって，どちらとも決めにくいものの検討だけ慎重にやればよい。T として 1.（第一 par.）4.（第二par. 3,4 文），5.（第三 par.），8.（第四 par.）がとれ，F として 2.（第二 par. 後半），3.（第三 par.），7.（第三 par.）と決められる。6. [については第三 par. 後半でここまでは具体的にいっていないと考え，9. は productive でないこと即ち isolation from nature かと疑い，10. は essential —— 第一 par. の as urban as urbanity itself は as hard as hard の形と be simplicity itself が重なったと見，very characteristic of cities の意ととって——がひっかかるなどと考えて判断できる。(ii) 1. は What is learned in the cradle is carried to the tomb. を思い浮かべなどして，この諺では c. の意味，b. が the place of origin だったら「揺籃の地」で日本語の比喩と同じなのになどと考えながらこれに決める。2. は the seat of virtue と対照なら「悪の巣窟」でやはり日本語の比喩に通じる。3. も「寄生虫」から a person supported by another and giving him nothing in return の意味をひき出すのは易い。これが都市にたとえてあるわけ。4. の investment はすでに日本語になっている。

II George Mallory なる登山家の，著者との交わりでとらえた人物評伝の一節。空欄補充の(i)は昨年のものよりうんと易しい。a. A fire lends cheer to a room. を知らない人はないだろう。b. rate A as B → be rated as B c. expect A to do ～ d. more than ever で「前より一そう」e. get に場所が続けば to をはさむ。(ii) の「内容」が曲者。文中の語句と interchangeable なものと限らない。1. は peak の意味するところに重点を置けば g. しかし distant, white の意味が消えてしまう。e. や f. では芸がなさすぎるし，舌足らずなことに変りがない。2. は b. を George and me と読む。3. は先行詞を問う。関係節中の his climbs がヒント。4. は似たようなことをしたことがある人は，積み上げるかくずすかで判断できるはず。5. は used to go drunk … がはっきり his accustomed way を叙述している。3. はパラグラフの順に拾えば 3. 9. 6. これにあえて加えれば，導入部が 7. となる。(iv) この語アクセントの問題，例語も普段親しんでいる無理のないものばかりだから，問題文を読む際，発音が自分の頭に響くまでの習慣づけがあれば，記号の書きちがえに注意する程度で難なく処理できる。

III 部分訳問題では特に，下線部だけでなく全体をできるだけ綿密に読むことが大切だ。語も文も文脈に置かれてはじめて語義が定まって来るのだから。celestial systems の訳語に困ったら前文の solar system がヒントになる。life in advanced form は advanced forms of life に置きかえてみよう。human life は「人命」より「人類」。下線第二文は the human mind has found it … が訳しにくい。かなり工夫がいる。2. の make our peace with the fact that ～ も「仲直りする」からなんとか適切な表現を工夫しなければならない。3. create は「もの」を創るとでもしないと日本語として通らない。purpose を define する，destiny を shape するの collocation もいわゆる直訳では通用しないだろう。総体に構文は無理がない。成否はむしろ日本語としてこなれた訳文が工夫できるかどうかにかかっているといえそうだ。

IV 例年のことながら，ずっしりと内容があって，一読した位では，適切な英訳の対応表現など浮かんで来ない。思い切って自分なりの解釈で読みとった意味を自分の書ける英語で表わしてみることだ。例えば「人前で話しをしたり，何か書いたりすると，自国語で自分を表現するのでも難しいものだと知る。外国語ならなおさらだ。外国語は一生学んでも，ものになるかどうかわからない。（だから）日本人が何年も学校で英語を勉強した後でも英語が話せないのは当り前と考えていい。」とか，「話したり書いたりの経験から，私達は自国語でも思うことを表現するのは難しいことを知っている。外国語に伴う困難は非常なもので学ぶのに一生かけて自由に出来ないかも知れない。何年も学校で英語を学んでも日本人は英語が下手だということも不思議ではない。」などとすれば直訳でも英語になる。

参考表現

In our experience in ～, we know that ～ have foreign languages at one's command years of study still leaves him a poor linguist. etc.

国語

■解答■

一
(1) ハ
(2) チ
(3) それまで「美」というものに感動することのできなかった精神が、「美」を表現する文学にふれ、それを理解することができるようになること、つまり機能していなかった感受性が正常に機能するようになることである。
(4) この句は「感傷的になって、ひとり登って行った岡に、花いばらが咲いていた。」という意味になるであろう。が、それは行為の無味乾燥な説明にすぎず、「愁」が「岡」や「花いばら」と詩的に反映して、故しらぬ青春の憂愁といった、繰り返し読んで愉しみ味わうことのできる抒情的な美を失ってしまっていること。

二
(1) 劇は、登場人物のセリフと行動を中心として構成されるが、小説は、人物・背景・事件の客観的描写だけでなく、心理描写・状況説明など、主観的な描写が半ばするという性質上の違いがある。
(2) (ア+イ) は、焦点的印象と情緒とが不即不離の関係にある文学的内容そのものとをあらわしており、ア+ウ は、焦点的印象と情緒とを切り離して、文学的内容を表現する在り方のことをあらわしている。
(3) 劇あるいは叙事詩が、一見原因あるいは徴候だけを表現し、また抒情詩が情緒のみを表現しているので、ともに文学としては不十分というような解釈をされてはならないから。
(4)

I	間接	A
II	直接	B

母と作者との行為・状態の描写が中心となっているから。「寂しさは極まりにけり」と、作者の感情の表出が中心となっているから。
(5) 文学は、単なる娯楽や狭義の修養のためのものでなく、広く深い意味での修養の具であり、美的感受性の豊かさと鋭さとを練磨することにより、人生を一層味わいの深いものにして、生きることの真の意義を教えてくれる。

三
(1) 当世でいう智者は、わかりきった利害得失はわかって利を取るが、完全な利はないので、利を十分つくせない。
(2) 古の真の智者は、天下の利害得失を知り、更に、自他の力量をはかるから、最大の危機にも大いに成功できる。
(3)

a	いはゆる
b	かくのごときのみ。

(4)

ロ	1
ホ	2
ロ	3

(5) こちらは自分が相手よりすぐれている理由を知っているのに、相手は自分がこちらよりすぐれている理由を知らなければ、自他をよく知っているその人に誰も敵対できない。

四
(1) (イ) 石山の観音こそは、「数多くの神や仏のおめぐみにあずからなかったような人をも助けたい」という衆生の苦しみを救おうとする願いを持っていらっしゃるそうだ。
(2) (ロ) 娘は、自分の身を売った代金を母の所へおくりとどけて、いろいろとこれからの世渡りをどのようにしたらよいかなどについて母に教えておいて、すぐに自分を買いとった人にひき連れられて、大津の海岸から船に乗って見知らぬ湖上に出帆した時に、急に風がはげしくなり浪が荒れて、乗って、いた船が水中に沈んだので、この娘はただひたすら石山の観音の御慈悲をたえれるようにお祈りして、船の帆柱にすがりついて水の上にただよっていたうちに、白馬が一頭浪のまにまに近くに寄って来たのにすがりついて、いろいろ苦労をして水打ちぎわにたどりついた。
(3)

程	A	
に		
白	B	
馬		

(4)

奇異	a
浦	b
人	c
孝養	d
利生	e
一期	

■解説■

理解力・表現力で大きな差
——文章を書く習練が大切

〈総評〉 出題数は45年度以降四題。一は文学論であり、44年の詩論、45年の文芸評論、49年の現代俳句の鑑賞に続くもので、理解力をみるだけでなく、感受性に裏づけられた表現力が要求されている。二は問題に記述。国語の中心問題である。三は文章の漢文は、これこそ京大漢文の漱石の作品中、今まで使われることのなかったものである。三に対して、むしろ論理的な内容把握力を要求しての出題であろう。四は文学論で、入試問題頻出度第一位の「文学論」からの出題。漱石の文学的内容の形式は、「よそうなのだが」内容を持った文章である。主題を正確にとらえることが肝要である。四の古文は、43年の問題三（室町末期の説話集である「元用集」を出典とする、当時の新傾向問題）の変化型ともいえる良問である。43年には「物語の筋を、叙述の順序に従っていくつかの項目に分け、わかりやすく説明せよ。」といった比較的古文の中心であったが、今年は、48年と同様に長文解釈が中心となって後も続くものと思う。以上のように記述・表現力に思いの比重がかかられているので、常日頃からの習練が大切である。

（漢文は日本古典中にも比べてわれる。有名出典に一切こだわらない、思想性の高い成した漢文ではないかと思と同じように、出題者の作品われる。昨年の問題題は、問題文である。昨年の問題高下がない」というような主題を展開した小説」は、必然的に、「男女を対等に投うことを「不可避的に要求」することになる。(ウ)の所はBを含む文と同じことになってしまうので、(ハ)を選びたい。(2)はすぐ上の、「階級制度の雛形」から(ア)を選ぶ。(3)は「手術される」の意味を良く考える必要がある。抒情詩は朱読して愉しみ、美しさを感じるべきもの。「ただ美しいもの」に「心を揺られること」によって、人は美的感受性に目覚めてゆくのである。「手術される」とは、今まで美に「揺られる」ことのなかった心が身体の中からえぐり出されて、正しく機能するようになることという。(4)は抒情詩の意味だけをとる方法を「愁ひつつ」の句に具体的にあてはめてみればわかろう。ついでながら、萩原朔太郎の『郷愁の詩人与謝蕪村』から、この句の鑑賞のところを抜き出しておこう。

「愁ひつつ」といふ言葉に、無限の詩情がふくまれて居る。無論現実的の憂愁ではなく、青空に漂ふ雲のやうな、また何かの旅愁のやうな、遠い眺望への視野を持った、心の茫漠とした愁である。そして野道の丘に咲いた、花茨の白く可憐な野生の姿が、主観の情愁に対象されて居る。西洋詩に見るやうな詩境である。気宇が大きく、しかも無限の抒情味に溢れて居る。

三 出典の『文学論』は、漱石の作品の中で、読者から最も敬遠されている、つまり、漱石の小説の愛読者でも殆んど読まない作品である。東京帝国大学での講義ノートであり、出題された第一編「文学的内容の分類」は特に説明不足の感がある。(2)にある、「およそ文学的内容の形式は」云々の所をしっかり理解しておく必要があろう。(1)は、劇

四 (1)は採点者がチェックする箇所が十ケ所ほどあるように思われる。(イ)もれむ人、あるなれ。(ロ)かはり、すなはち、具して、沈みけるに、悲願を念じて、程に、さまざまにして。(ハ)主といふ者、程に、びんよきにより、頼もしき者。以上のような箇所に注意して現代語に訳したい。(2)はやさしい。(3)の漢字書取は普段から心掛けていないと「リショウ（利生）、「イチゴ」（一期）などに迷うであろう。43年の古文にも漢字書取があったが、中世説話集に出てくるちょっとした漢字は気にとめておきたい。

四六年から総志願者数が九千人台であったが、四九年はそれを大幅に越え、一一一四二人と初めて一万人台を越えた。そして今春は昨年より、さらに四九四人増え一一六三六人となった。学部では、激減の農、やや敬遠された法を除いて全学アップ。とくに、昨年低かった経済の三六七人増が目立つ。

さて、こうした激戦の下で、三月三・四・五日に実施された京大入試。河合塾カリキュラム委員会では、早速入試問題の分析に取りかかりこの特集号に解答解説を載せた。なお編集上、誇りから地学解答解説・倫社政経解説は載せておりません。今年の入試は、二、三問題のある出題が見受けられたが、全体的には、まさに京大ならではのユニークな出題が化学・漢文など随所に見られた。

なお読者に限り、京大入試問題コピーをお送りします。

住所・氏名・在卒高校名を明記の上、左記までハガキでお申込み下さい。

宛名
〒四六四　名古屋市千種区宮西町二—一
河合塾内「京大係」

河合塾カリキュラム委員会

自然　4月号　360円
気象衛星から見た高層大気大循環
現代の百葉箱が記録する新情報・廣田 勇
□ 遍歴のあと(6)……玉蟲文一
□ チホ・ブラエ……石田五郎
□ 湿原の植物と水……辻井達一ほか
□ 腫瘍ウイルスと細胞……小田鈞一郎
白と黒・ロゲルギスト
快適で経済的，理想的な放射暖房のすすめ
□ 慈顔の阿修羅（広重微のこと）……山田慶児
□ 国立公害研究所の設計……大谷章夫
□ 人類の影を求めて……江原昭善
□ 繊維作物の食味……中尾佐助
研究所は物理のるつぼ
ベル研に2年間，米物理学の断章・江沢 洋
振替 東京2-34 中央公論社

大学突破シリーズ
東大を受ける人のために
東大新聞社・河合塾共編
理Ⅰ・理Ⅱでは医学部進学は難しい。そのしくみは？
進学振分け制度とは……
入試問題・解答解説併載▼A5判 一，五〇〇円
京大を受ける人のために
京大新聞社・河合塾共編
理科2科目・社会2科目（文系）になった51年度入試・受験生にどう響く……
入試問題・解答解説併載▼A5判 一，五〇〇円
美術系大学入試のすべて
河合塾美術研究所編
美術系大学入試実技資料
実技制作過程の作例
▼B5判 四五〇円
Pan
大学入試資料 栄冠をめざして 前・後期編
全国進学情報センター編
学部・学科の決定、新課程入試の学習対策から受験校決定までのユニークな受験専門冊子。
（付・51年度で大きく変わる大学入試難易ランキング表）

学習図書シリーズ
秘伝のオープン
新課程 物理 Ⅰ
図解・図式による実感を理解から理論展開へ
河合塾物理科主任・近藤敦著
▼A5判 一，二〇〇円
秘伝のオープン
新課程 化学 Ⅰ
易しく入って高度に征服
河合塾化学科主任・江藤千秋著
▼A5判 一，二〇〇円
新課程 新しい数学の潮流
豊富な新課程予想問題徹底対策
河合塾数学科編
進学研究社
名古屋市千種区宮西町2の1・河合塾内
電話（〇五二）七三一—一五八一（代）
振替名古屋 52066

数学

理系 [1]

> あるスポーツの大会で，参加したn個のチームはつぎの方法（リーグ戦形式）で順位を争う．すなわち，どのチームも他の各チームとそれぞれ1回ずつ試合を行い，勝ち数の大小によって順位をきめるものとする．今年の大会では，引き分けが1回も起こらず，また同順位のチームがなかったという．このとき，どのチームもそれより下位のチームには必ず勝っていることを証明せよ．

[解答]

問題のnのかわりに$n+1$を用いてもさしつかえない．$n+1$個（$n\geqq 1$.）のチームを下位チームから順に$T_0, T_1, T_2, \cdots, T_n$とし，$T_i(0\leqq i\leqq n.)$の勝ち数を$(T_i)$で表せば，仮定から

$$0\leqq(T_0)<(T_1)<(T_2)<\cdots<(T_n)\leqq n \quad \cdots\cdots①$$

であるが，各(T_i)は整数であるから

$$(T_i)=i(0\leqq i\leqq n.) \quad \cdots\cdots②$$

となる．

いまもし，下位チームに負けたことのあるチームがあるとすれば，そのようなチームで最上位のものが存在する．それをT_mとすれば，T_mより下位のチームはm個あり，それらのどれかにT_mが負けているから，②によってT_mはそれより上位のあるチームT_lに勝っているはずである．即ちT_lはそれより下位のT_mに負けている．これはT_mが下位チームに負けたことのある最上位のチームであることに反する．よって下位チームに負けたことあるチームは存在しない．

[解説]

いろいろの言い方があるが，どのような言い方をするにしても事態の内容を把握する楔点は上記「解答」中の②である．0からnまでの$n+1$個の整数値しか取れない$n+1$個の整数$(T_0), (T_1), \cdots, (T_n)$がすべて相異なれば，それらは全体として$0, 1, 2, \cdots n$に一致せざるを得ないから，$(T_0), (T_1), (T_2), \cdots$が増加数列であることを考えれば②は「明らか」であるとして［解答］中にはこのことは述べていない．ただし本問に限らず，一般に証明問題ではすべて，どの部分までを明らかな既知事項として取扱うかが大問題になるのであるが，解答が冗長になることをいわなければ，上記「明らか」の部分は数学的帰納法にでもよって証明するか，(T_i)を$i((0\leqq i\leqq n.)$の関数としてそのグラフ，階段状グラフなど）をかいて証明（というような説明）することもできようが，ヂリクレ（Dirichlet）はこのような事実の証明に次のような論法を用いた．ヂリクレの部屋割論法といわれるものである．即ち$n+1$人の人がすべてn個の部屋に入ったとすれば，どこかの部屋に2人以上入っている．この論法によれば$(T_i)(i=0, 1, \cdots, n.)$全体の集合が$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$と一致しなければ，どれか2個の$(T_i)$が一致しなければならない．

さて，本問の主要部は「解答」の後段の部分にある．ここでも簡潔を旨とした論法をとったが，原理的には数学的帰納法の変形とみることができる．少し長くなり過ぎたが，その数学的帰納法によるものを示しておこう．

どのチームも上位チームに負けていることを証明すればよい．

②によって$(T_0)=0$であるから，T_0は上位チームに負けている．

そこで$k+1$個のチーム$T_0, T_1, \cdots, T_k$ $(0\leqq k<n.)$がすべて上位チームに負けていると仮定する．もしT_{k+1}が上位チームをもち（即ち$k+1<n.$）T_{k+1}がそれより上位のあるチームT_lに勝っているとすれば，仮定により$T_0, T_1, \cdots, T_k$はT_{k+1}は負けているからT_{k+1}は$T_0, T_1, \cdots, T_k$およびT_lに勝っていることになり$(T_{k+1})\geqq k+1+1$．これは②に反する．ゆえにT_{k+1}も上位チームに負けている．

これで証明は終るはずであった．

文系 [1]

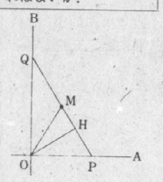
> 直角をはさむ2つの半直線OA, OB上にそれぞれ点P, Qを，$\overline{PQ}=2a$（aは正の定数）であるようにとる．このとき，△OPQの面積を最大にするには線分OPの長さをいくつすればよいか．

[解答]

PQの中点をM，OよりPQに下した垂線の足をHとすると，

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{OH}\leqq\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{OM}=a^2.$$

したがって△OPQが最大になるのは，OMがOHに一致したときであり，$OP=\sqrt{2}a$となる．



[解説]

次のような計算による方法の方が，出題者の意にそうかもしれない（?）．即ち，$\overline{OP}=x$とでもおけば面積Sは$\frac{1}{2}x\sqrt{4a^2-x^2}$．$x$の関数$S^2=\frac{1}{4}x^2(4a^2-x^2)$の最大を，2次関数のグラフによって考えるとか，微分するとかして求めるか，多少ましではあるが相加相乗平均の性質によったり，$\angle OPQ=\theta$とおいて関数$S(\theta)=a^2\sin 2\theta$の最大を考える方法もある．

いずれにしても$x^2+y^2=$定数のときのxyの最大の問題で，誰しもが修得している基本問題である．

理系 [2]

> (i) $x\geqq 0$のとき$\sqrt{x}\leqq\frac{1}{2}(x+1)$を示せ．
>
> (ii) $\int_0^k\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx<1$を示せ（$k$は自然数）．

[解答]

(i) $\sqrt{x}-\frac{1}{2}(x+1)=-\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2\leqq 0$, $\sqrt{x}\leqq\frac{1}{2}(x+1)$.

(ii) $0\leqq x\leqq k$ならば

$$1-\frac{x}{k}\geqq 0,\ \left(1-\frac{x}{k}\right)^k\geqq 0,\quad \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k\leqq\frac{1}{2}(x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k.$$

$$\therefore\ \int_0^k\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx\leqq\int_0^k\frac{1}{2}(x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx \quad \cdots\cdots①.$$

$1-\frac{x}{k}=t$とおけば$x=k-kt$, $\frac{dx}{dt}=-k$.

$$\therefore\ \int_0^k\frac{1}{2}(x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx=\int_1^0\frac{1}{2}(k+1-kt)t^k(-k)dt$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^1((k+1)t^k-kt^{k+1})dt=\frac{k}{k+2}<1 \quad \cdots\cdots②.$$

①，②から

$$\int_0^k\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx<1.$$

[解説]

直線$y=\frac{1}{2}(x+1)$は曲線$y=\sqrt{x}$の$x=1$における接線である．これは$x=1$の近くで$\sqrt{x}$が$\frac{1}{2}(x+1)$によって近似できるという意味をもつ．

$I=\int_0^k\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx$で$1-\frac{x}{k}=y$とおけば$I=\int_1^0\sqrt{k-ky}\,y^k(-k)dy=k\sqrt{k}\int_0^1\sqrt{1-y}\,y^k dy$．さらに$y=\cos^2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}.\right)$とおけば

$$I=2k\sqrt{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^{2k+1}\theta d\theta=2k\sqrt{k}\cdot\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

これから証明は容易というわけではないが$I<1$が示される．しかしこのような計算を行うまでもなく(i)の結果利用によって(ii)は容易に解答できる．即ち本問はIの値がおよそどの程度の大きさであるかを，$\sqrt{x}$を$\frac{1}{2}(x+1)$におきかえることによって評価しようというものである．

なお，$\left(1-\frac{x}{k}\right)^k\to e^{-x}(k\to\infty.)$であるが，$\lim_{k\to\infty}\int_0^k\sqrt{x}e^{-x}dx$即ち$\lim_{k\to\infty}\int_0^k 2x^2e^{-x^2}dx$は重要な積分であるが，この値を求めることは高校の範囲を越えるのでこれ以上深入りしない．しかし本問はこのようなことに関連のある興味ある問題である．

文系 [2]

> $f(x)=x^3-5x^2+3x+a$とする．xの正の値に対し，つねに$f(x)>0$となるのはどのようなときか．

[解答]

xの正の値に対し，つねに$f(x)>0$であるための必要十分条件は，区間$(0, \infty)$における$f(x)$の最小値が正であることである．$f'(x)=3x^2-10x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$．従って$x\geqq 0$の範囲で$f(x)$の増減表は右表の通り．よって，問題の条件は　$a>9$.

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…	3	…∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$	a	↗		↘	$a-9$	↗

[解説]

$x=a-9$は$f'(x)$を0にするから$f(x)$の極値を与える候補者であるが，この種の問題では，微分可能でない点や，定義域の端点では別途の考察が必要であることを忘れてはいけない．しかし，本問ではxの変域の端点0における$f(x)$の値$f(0)=a$は明らかに$a=9$より大であることがあまりにも明らかであるとして上の「解答」ではくどく述べなかったが，時間がありさえすれば述べておいた方がよい．

文理共通 [3]

> α, β, γがこの順に等差数列であり，$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$がこの順に等比数列であるのはどのようなときか．

[解答]

α, β, γがこの順に等差数列であり，$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$がこの順に等比数列であるとすれば，$\beta=\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\sin^2\beta=\sin\gamma\sin\alpha$．この第1式を第2式に代入すると，$\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}=\sin\gamma\sin\alpha$．　$\therefore\ 1-\cos(\gamma+\alpha)=\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha)$．　$\therefore\ \cos(\gamma-\alpha)=1$．　$\therefore\ \gamma-\alpha=2n\pi$（$n$は整数）．　$\therefore\ \gamma-\beta=\beta-\alpha=n\pi$．即ち等差数列$\alpha, \beta, \gamma$の公差は$n\pi$．

この場合$\beta=\alpha+n\pi$, $\gamma=\alpha+2n\pi$で，$\sin\beta=(-1)^n\sin\alpha$, $\sin\gamma=\sin\alpha$となり，$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$は公比$(-1)^n$の等比数列となる．

答　α, β, γが公差$n\pi$（n,は整数.）の等差数列であるとき．

[解説]

答の書き方は一通りとはきまらない．例えば「$\cos(\gamma-\alpha)=1$, $\beta=\frac{\gamma+\alpha}{2}$.」ともかけるが，「$\sin^2\beta=\sin\gamma\sin\alpha$, $\beta=\frac{\gamma+\alpha}{2}$.」ともかけるが，「$\sin\beta=(-1)^n\sin\alpha$, $\sin\gamma=\sin\alpha$のとき，等比数列$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$の公比は$\sin\alpha\neq 0$ならば$(-1)^n$に限るが，$\sin\alpha=0$のときは何を公比としてもかまわない．ゆえに$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$は公比$(-1)^n$の等比数列をなすといえる．

文理共通 [4]

> 平面上で，3つの定点A, B, Cと定円の周上を動く点Pがある．ベクトル$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$の大きさが最大になるのは点Pがどのような位置にあるときか．

[解答]

定円の中心をOとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$とすると

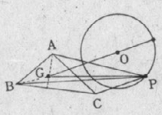
$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=|\vec{a}-\vec{p}+\vec{b}-\vec{p}+\vec{c}-\vec{p}|=3\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=3|\overrightarrow{GP}|.$$

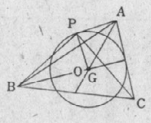
（ただし，Gは$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$なる定点.）

したがって，これが最大となる点Pの位置は次の点である．

(i) GがOと異なる点のとき，直線GOと円周との交点のうちOに関しGと反対側にある点．

(ii) GがOと一致する点のとき，円周上の任意の点．





[解説]

3点A, B, Cの重心の利用である．問題で求めている点Pの位置であるから，場合分けをしないで「Gから一番遠い円周上の点.」といった表現も，もちろんよい．

3定点A, B, Cが空間の点で，Pが空間のある定図形上を動くとき，たとえば球面上を動くときも，ほとんど同様に結論することができる．

文理共通 [5]

> nと$a_1, a_2, \cdots, a_n$は自然数であって，不等式
>
> $$2\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n,\ \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)-2>0$$
>
> をみたすものとする．$S=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)-2$とおく．
>
> (i) とくに$n=3$として，Sを最小にする(a_1, a_1, a_2)を求めよ．
>
> (ii) nも自由に動かした可能なすべての組$(n, a_1, a_2, \cdots a_n)$のうちで，$S$を最小にするものを求めよ．

[解答]

(i) $2\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$, $S=1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\leqq 0$となる$(a_1, a_2, a_3)$は次のものだけである．　……(*)

(2, 2, 任意の数)，(2, 3, 3)，(2, 3, 4)，(2, 3, 5)，(2, 3, 6)，(2, 4, 4)，(3, 3, 3).

［(*)の証］

$$2\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3,\ 0\geqq S=1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\geqq 1-\frac{3}{a_1}.$$

$\therefore$　$a_1=2$または3.

$a_1=2$のとき，$0\geqq 1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\geqq\frac{1}{2}-\frac{2}{a_2}$.

$\therefore$　$(a_1, a_2)=(2, 2), (2, 3), (2, 4)$.

$(a_1, a_2)=(2, 2)$のとき，任意のa_3に対して$S<0$.

$(a_1, a_2)=(2, 3)$のとき$S<0$となるのは　$a_3=3, 4, 5$, $S=0$　となるのは　$a_3=6$.

$(a_1, a_2)=(2, 4)$のとき，$S<0$となるa_3はなく，$S=0$となるのは$a_3=4$.

$a_1=3$のとき，$0\geqq S=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\geqq\frac{2}{3}-\frac{2}{a_2}$.

$\therefore$　$(a_1, a_2)=(3, 3)$．このとき$a_3=3$.（証終り）

Sを小さくするには(*)の組以外でa_1, a_2, a_3をなるべく小さくすればよい．すなわち

(2, 3, 7)，(2, 4, 5)，(3, 3, 4)

が最終候補者として残る．これに対してSはそれぞれ$\frac{1}{42}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{12}$となるから，求める(a_1, a_2, a_3)は(2, 3, 7)で最小値は$S=\frac{1}{42}$.

(ii) 明らかに，可能な組というのは$n\geqq 3$のときである．

$$2\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n,\ S=n-2-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n}\geqq n-2-\frac{n}{2}=\frac{n-4}{2}.$$

$n=4$の場合，$a_1=a_2=a_3=a_4=2$のとき$S=0$で他はすべて$S>0$であるから，問題の最小値は$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(2, 2, 2, 3)$のとき$\frac{1}{6}$となる．

$n\geqq 5$の場合，Sは$a_1=a_2=\cdots=a_n=2$のとき最小値$\frac{n-4}{2}$をとるが明らかに$\frac{n-4}{2}>\frac{1}{42}$.

よって，Sを最小にする$(n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$は

(3, 2, 3, 7).

[解説]

すべての組についてもれなく調べて最小を決定しなければならない．

(i)で上の解答は，$1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}>0$の条件に合わないものが有限個であることを見越してまずそれを検出し，それを避けて，a_1, a_2, a_3をできるだけ小さくするという方法をとったが，もし$1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}>0$の条件に合う無限個のものから$S$を最小にするものを探そうとすると，“もれなく調べる”という点で慎重な心遣いがいる．

例えば$a_1=2$の場合，$1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}>0$から$a_2\geqq 3$が必要であるが，そこで$a_2=3$として$(a_1, a_2, a_3)=(2, 3, 7)$を出したとしたら(2, 4, 5)の場合が（結果としては不適であるが）調べられていないことになる．

理系 [6]

> △ABCで$\angle A 90°$, $\overline{AB}=\overline{AC}=2$とする．頂点Aから斜辺BCに垂線AHをひく（Hはその交点）．半直線AH上に中心Oをもつ半径1の円を考える．
>
> (i) △ABCの3つの辺が円Oの周とそれぞれ2点で交わるのは，$\overline{AO}=x$がどのような範囲にあるときか．
>
> (ii) △ABCと円Oの内部の共通部分の面積をSとする．xが(i)の範囲にあるとき，Sをつぎの関数$F(t)$を用いて表せ．
>
> $$F(t)=2\int_t^1\sqrt{1-u^2}\,dx \quad (0\leqq t\leqq 1)$$
>
> (iii) xは(i)の範囲にあるとする．$\frac{dS}{dx}$を求め，Sを最大にするxの値を求めよ．

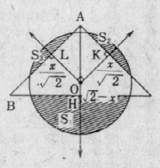
[解答]

(i) OがHに一致するとき，即ち，$\overline{AO}=\sqrt{2}$のとき，円Oは辺AB, ACに接する．このことより△ABCの3つの辺が円Oの周とそれぞれ2点で交わる$\overline{AO}=x$の範囲は

$$1\leqq x<\sqrt{2}$$

である．

(ii) $1\leqq x<\sqrt{2}$のとき，Oより辺CA, ABに下した垂線の足をそれぞれK, Lとすると，$\overline{OH}=\sqrt{2}-x$, $\overline{OK}=\overline{OL}=\frac{x}{\sqrt{2}}$であるから，右の図において斜線で示された3つの弓形の部分の面積S_1, S_2, S_3は



$$S_1=2\int_{\sqrt{2}-x}^1\sqrt{1-u^2}\,du=F(\sqrt{2}-x),$$

$$S_2=S_3=2\int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^1\sqrt{1-u^2}\,du=F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

となる．ゆえに

$$S=\pi\cdot 1^2-S_1-S_2-S_3=\pi-F(\sqrt{2}-x)-2F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\ (1\leqq x<\sqrt{2}).$$

(iii) $\frac{d}{dx}F(\sqrt{2}-x)=-2\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{2}-x}\sqrt{1-u^2}\,du=2\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}$,

$$\frac{d}{dx}2F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=-4\frac{d}{dx}\int_1^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-u^2}\,du=-2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-2\sqrt{2-x^2}.$$

$$\therefore\ \frac{dS}{dx}=-2\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}+2\sqrt{2-x^2}$$

$$=\frac{2(3-2\sqrt{2}x)}{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}}.$$

従って，$1\leqq x<\sqrt{2}$の範囲でSの増減をしらべると右の表のようになる．よって，Sを最大とするxの値は$\frac{3\sqrt{2}}{4}$である．

x	1		$\frac{3\sqrt{2}}{4}$		$\sqrt{2}$
$\frac{dS}{dx}$	／	+	0	−	／
S	$S_{x=1}$	↗	最大	↘	／

[解説]

Sを関数$F(t)$を用いて表すことはSの様子を図形的に理解できる点で大変当を得た方法である．Sの増減を調べるに際しても至便である．$\frac{dS}{dx}$の計算では$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du=f(x)$なる基本定理により，$\varphi(x)$が微分可能な関数のときは$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)}f(u)du=f(\varphi(x))\varphi'(x)$となる．これは合成関数の微分法である．解答ではこの事実を用いている．

次のように図の上で微分法を実行する手がある．即ち円の面積は弦の長さの積分であることから，この面積を（たとえば変数をxとでもして）xで微分すれば弦の長さになる．この問題では，$\frac{d}{dx}S_1$は弦H, $\frac{d}{dx}S_2$, $\frac{d}{dx}S_3$はそれぞれ弦Kおよび弦Lの$\frac{-1}{\sqrt{2}}$倍である．このことはxの増加に対する$\overline{OK}$および$\overline{OL}$の増加を考えれば明らかである．ゆえに弦$H=\frac{1}{\sqrt{2}}$（弦L+弦K）のときにSの極値を与える．このことから$x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$であることがすぐわかる．

文系 [6]

> aが実数で$a<1$のとき，数列$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$を
>
> $$x_0=a,\quad x_n=\frac{1}{2-x_{n-1}}\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$
>
> によって定義する．このとき
>
> (i) x_nをnとaで表せ．
>
> (ii) $\lim_{\infty\to n}n^2\left(x_n-1+\frac{1}{n}\right)$を求めよ．

[解答]

(i) $x_n-1=\frac{1}{2-x_{n-1}}-1=\frac{x_{n-1}-1}{2-x_{n-1}}$　……①.

$x_{n-1}+1$とすると①によってx_n+1．そして$x_0=a+1$．ゆえに$n=0, 1, 2, \cdots$に対してx_n+1．①から$\frac{1}{x_n-1}=\frac{-x_{n-1}+2}{x_{n-1}-1}=\frac{1}{x_{n-1}-1}-1$．　$\therefore\ \frac{1}{x_n-1}+n=\frac{1}{x_{n-1}-1}+(n-1)=\cdots=\frac{1}{x_0-1}+0=\frac{1}{a-1}$　これから$x_n=1+\frac{a-1}{(1-a)n+1}$ $(n=1, 2, 3\cdots)$．$x_0=a$であるからこの式は$n=0$としても成り立つ．ゆえに

$$x_n=1+\frac{a-1}{(1-a)n+1}\quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

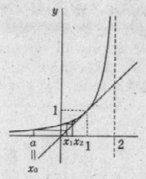
(ii) $\lim_{n\to\infty}n^2\left(x_n-1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{a-1}{(1-a)n+1}+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1-a}.$$

[解説]

解答の2行目は「$x_{n-1}<1$とすると$2-x_{n-1}>1$となり$0<x_n<1$である．ゆえに$x_0<1$と合わせ考えて$n=1, 2, 3, \cdots$に対してつねに$0<x_n<1$.」としてもよい．これは分母0の項が途中で現れはしないかという心配を打消す役をする．

$y=\frac{1}{2-x}$のグラフと直線$y=x$をかいてみれば$x=1$で接していることから$x_n-1=\cdots$の変形は当然思いつく．また，どんな方法にしても$x_n=1+\frac{a-1}{(1-a)n+1}$が出た場合，その発見にいたる道筋まで採点者に公開する（下手ぶりをさらしたり上手さを賞めてもらう）必要は全く無い．次に示すのが最良の模範答案である．



(答案)

$$x_n=1+\frac{a-1}{(1-a)n+1}\quad (n=0, 1, 2, \cdots)\quad \cdots\cdots①.$$

(証明)　$x_k=1+\frac{a-1}{(1-a)k+1}$とすると$x_{k+1}=\frac{1}{2-x_k}$

$$=\frac{1}{2-1-\frac{a-1}{(1-a)k+1}}=1+\frac{a-1}{(1-a)(k+1)+1}$$

となり，$x_0=1+\frac{a-1}{1}=a$となって$n=0, 1, 2, \cdots$のすべてに対して①で表されたx_nは問題の条件をみたす．さて，問題に定義された数列はx_0即ちaの値に対して一意的に確定することは明らかであるから，①以外のものはない．（答案終り.）

（x_nはa, nの関数として一意に確定するが，その関数を表現する式はいくらでもある.）

(ii)の意味．

$1-\frac{1}{n}$はこの数列で$a=0$の場合のx_{n-1}に等しいから，初項0で始まるこの数列の第$n-1$項と初項$a(<1)$で始まるこの数列の第n項との差n^{-2}と同じオーダーで0に収束するということを(ii)は示している．このことは問題の一見意味のとりにくい式$\left(x_n-1+\frac{1}{n}\right)$の理解に役立つ．

京大受験最優秀校　開講4月17日
京都予備校
顧問　京都大学名誉教授・文学博士　石田憲次
昼間部　国公立コース　私大コース　新設　私大文科特修コース
●特設理数系ゼミナール　物理・化学・文科数学・理科数学
●英語特設ゼミナール　英作文添削・ヒヤリング・英語長文アプローチ　少数選抜制
●英・数基礎ゼミナール　私大コース付設　英文法演習・短文英作演習　数Ⅰ演習・微積演習　定員制
夜間部　総合コース　全科目週36時間　模試年11回
入学要項（要送料85円）　〒606 京都市左京区岡崎徳成町5　電話〈075〉771−6141・6142・6143

（週間）京都大学新聞
定期購読のおすすめ
京都大学新聞は1925年創刊以来、激動の昭和史を、京大唯一のマス・メディアとして追究してきました。今春、記念すべき50周年を迎え、その伝統を踏まえて、一層の飛躍を目指しています。この機会にぜひ定期購読をお申しこみ下さい。
50周年特別企画
4月7日号　■学生と文化■
○京都大学新聞50年史
○学生と文化——その50年史　など.
4月14日号　■京都学派■
○三木清と京大哲学
○高橋和巳と文学者　など.
4月21日号　■新しい半世紀のために■
○アジア問題
○現代における〈個人〉とは何かなど.
京都大学新聞社
京都市左京区吉田京大構内　TEL(075)761−2054

●適切なる進学指導　●充実した授業内容
大学受験　夕陽丘予備校
第1本科（昼間・総合）
1類（国公立組）
2類A（私大組）　入学選考
2類（私大組）：申込順
選考試験日　▼4月9日　▼4月3日　▼4月29日
●第2本科（夜）：申込順
●高校生教室（夕）：申込順
附属…全国進路研究所
鉄筋5階建・冷暖房・学生寮
通学定期・全組担任制
〒543 大阪市天王寺区堀越町6−3
国鉄天王寺駅北口/TEL 大阪(06)771−4803
●入学案内 ¥200（切手可）