

# 鉱山ポートフォリオの長期最適化

村上 啓二<sup>1</sup>・小林 潔司<sup>2</sup>・瀬木 俊輔<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 京都大学経営管理大学院 経営学博士 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail: murakami.keiji603@gmail.com

<sup>2</sup>正会員 京都大学名誉教授 経営管理大学院特任教授 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.jp

<sup>3</sup>正会員 京都大学大学院 工学研究科都市社会工学専攻 助教(〒606-8501 京都市西京区京都大学桂4)  
E-mail: segi.shunsuke.6e@kyoto-u.ac.jp

鉱山事業は鉱物資源の価格変動リスクに晒されており、また採掘量やコストが変動する事業リスクも有しているため、単一の鉱山では収益の安定化が困難である。したがって、鉱山経営会社は複数の鉱物資源や鉱山のポートフォリオを形成し、収益やキャッシュフローを平準化させることにより、鉱山事業全体のリスクをコントロールしている。本研究では、鉱山ポートフォリオの長期最適化モデルを開発した上で、具体事例による計算結果を分析し、実務的な応用と示唆を示す。従来のポートフォリオの長期最適化に関する理論は、金融工学に基づき投資家の観点から金融商品のポートフォリオについて論じられているが、商社のような事業会社における鉱山ポートフォリオの長期最適化に関する研究は類を見ない。

**Key Words :** mine, mineral resources, volatility, optimal dynamic portfolio, risk management

## 1. 鉱山ポートフォリオ

### (1) 鉱山事業のリスクとポートフォリオ最適化

鉱山事業は、鉱物資源の世界的な需要と供給のバランスにより価格変動リスクに晒されている。また鉱山事業は、埋蔵量・品位・採掘コスト・輸送コスト・為替・天候・オペレーション能力等複数の要因により採掘量やコストが変動する事業リスクも有しており、単一の鉱山だけでは収益を安定化させることが困難である。したがって、鉱山経営会社は、複数の鉱物資源や鉱山のポートフォリオを形成し、収益やキャッシュフローを平準化させ、鉱山事業全体のリスクをコントロールすることにより、鉱山ポートフォリオの長期最適化を図っている。

### (2) 既往研究の概要

ポートフォリオの長期最適化に関する既往研究を以下に紹介する。ポートフォリオ最適化に関する理論的な取り組みは、1952年のMarkowitz<sup>1)</sup>による平均分散分析に始まる。Markowitzは、投資家が1期間後のポートフォリオのリターンと分散、或いは同等のことであるが、平均と標準偏差にのみ注意を払う場合、どの様にして資産を選ぶべきかを示した。この分析では静的な1期間を想定し、投資家は期末の富のみを考慮しているが、現実には期中

でのリバランスや資金の流入出が存在し、通常は長期の最適ポートフォリオが短期のものとは異なることを示した。

長期での動的ポートフォリオ選択に関する研究は、1969年にMerton<sup>2)</sup>によって始められ、1970年代に多くの研究者によって発展した。Mertonは、投資機会が時間変動する場合に、長期投資家にとってのポートフォリオの需要を理解する一般的な枠組みを提供した。Rubinstein<sup>3)</sup>やBreedon<sup>4)</sup>は、Mertonの結果が消費リスクという観点からどの様に解釈できるかを示した。これらのアイデアは他研究者の業績を通じて、マクロ経済学に大きな影響を与えてきた。

Cambell<sup>5)</sup>とViceira<sup>6)</sup>は、従来は閉形式解を得ることが困難であったMertonの異時点間モデルに対して、近似的に解析解を求める手法を開発した。この解は既知の厳密解の摂動を基にしており、厳密解の近傍では正確であることを示した。厳密解が存在するクラスは限界的であるが、この範疇に属さないモデルのポートフォリオ選択においても、解析的な洞察を与えた。

高屋と枇々木<sup>7)</sup>は、モンテカルロシミュレーションを用いた動的ポートフォリオ最適化モデルを提示した。本論文では、混合型最適化モデルをベースに投資量関数を工夫し、状態に依存した最適な意思決定が可能な線形近

似モデルを提案し、その有用性を検証した。また、既存の確率計画モデル（シミュレーション型モデル、混合型モデル）に加えて、多期間ポートフォリオ最適化問題に対する異なるアプローチ（解析解、モンテカルロ回帰）も含めて、比較分析を行った。

近年では、Cong and Oosterlee<sup>8)</sup>や、Brandt et al.<sup>9)</sup>が提案した、ダイナミックポートフォリオ管理アルゴリズムを応用し、動的ポートフォリオの管理問題に対する数学的検定方法を提示した。この数学的検定は、COS法（Fang and Oosterlee<sup>10)</sup>）に基づくベンチマーク手法による最適な近似式を用いて計算された。

また Zakamulin<sup>11)</sup>は、多期間最適ポートフォリオ選択問題を解決した。本論文では、最適リスク割り当てのポートフォリオ選択問題を最適資本配分問題から分離した。最適な資本配分は、リスクのあるポートフォリオの分散に反比例するリスクのあるポートフォリオのポジションを保持することにある。更にポートフォリオ管理者が取引コストの量を劇的に減らすことを可能にし、実市場における時間の経過と共に最適なポートフォリオリスクコントロールを実施するための可能なアプローチを提示した。

上述の通りポートフォリオの長期最適化に関する理論は歴史的に多く研究されているが、基本的に金融工学に基づき、投資家から見た金融商品ポートフォリオの長期最適化について論じられている。一方、企業の事業に対するポートフォリオ最適化の研究は少なく、特に商社ように多くの異質の事業を持つ企業における鉱山ポートフォリオの長期最適化に関する研究は見ない。したがって、本研究では商社における鉱山ポートフォリオの長期最適化について論じる。

### (3) 商社における鉱山ポートフォリオ

商社における鉱山事業は、単に投資に対するリターンを求めるものではなく、採掘された鉱物資源のトレーディング事業とのシナジー、および最終需要家に至るまでのバリューチェーン構築による付加価値向上等を総合的に勘案して経営されている。したがって、商社は通例、短期的な鉱山売買による売却差益獲得よりも、むしろ鉱山の長期保有を前提とした事業収益獲得を狙っている。この場合、商社の鉱山ポートフォリオは近視眼的なポートフォリオではなく、連続時間における戦略的アセットアロケーションを実施し、鉱山ポートフォリオの長期最適化を訴求している。

よって、上述の問題意識と既往研究を踏まえて、リサーチクエスチョンを以下の通り設定する。

#### 【リサーチクエスチョン】

「商社における鉱山ポートフォリオは、リスクをいかに

コントロールすれば、長期最適化ができるか。」

また、リサーチクエスチョンに対する中心命題を以下の通り設定する。

#### 【中心命題】

「商社における鉱山ポートフォリオは、動的アセットアロケーションで論じられる長期保有を前提としたリスク分散ではなく、制限された経営資源の中で選択と集中により、適時リスク資産を入替えることにより、長期最適化できる。」

上述の中心命題を立証する為、以下2.の鉱山のポートフォリオモデルを開発及び分析することにより、妥当性を検証する。

## 2. 鉱山のポートフォリオモデル

### (1) モデルの前提

時刻を $t = 0, 1, 2, \dots$ のように離散的に表す。本研究のシミュレーションでは、時刻 $t$ の単位に四半期を用いる。

鉱物の種類を $N^R$ とする。 $N^R$ 種類の鉱物をそれぞれ $1, \dots, N^R$ で表す。鉱物 $i$  ( $1 \leq i \leq N^R$ )の時刻 $t$ の期首における価格を $S_{t,i}$ で表す。 $S_{t,i}$ は以下の非定常時系列モデルに従うとする。

$$\ln \frac{S_{t+1,i}}{S_{t,i}} = \mu_i + \varepsilon_{t+1,i} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{t+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1,1} \\ \varepsilon_{t+1,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+1,N^R} \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (2)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & l_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & l_{1N^R}\sigma_1\sigma_{N^R} \\ l_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & l_{2N^R}\sigma_2\sigma_{N^R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1N^R}\sigma_1\sigma_{N^R} & l_{2N^R}\sigma_2\sigma_{N^R} & \cdots & \sigma_{N^R}^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\mu_i$ は $S_{t,i}$ のドリフトを表す定数である。 $\varepsilon_{t+1}$ は平均がゼロベクトルの多変量正規分布に従う誤差項であり、その共分散行列 $\Sigma$ は式(3)で与えられる。 $\sigma_i^2$ は $\varepsilon_{t+1,i}$ の分散である。異なる鉱物価格のボラティリティの間には相関関係があると考え、この相関関係を相関係数 $l_{ij}$  ( $-1 \leq l_{ij} \leq 1$ )によって表現する。 $l_{ij}$ は鉱物 $i$ のボラティリティと鉱物 $j$ のボラティリティの間の相関係数である。 $\varepsilon_{t+1}$ の実現値が判明するタイミングは、時刻 $t$ の期末とする。

### (2) 鉱山ポートフォリオのモデル化

鉱物 $i$  ( $1 \leq i \leq N^R$ )を産出する投資対象の鉱山の数を $N_i^M$ とする。鉱物 $i$ を産出する $N_i^M$ 座の鉱山をそれぞれ $1, \dots, N_i^M$ で表す。鉱物 $i$ を産出する鉱山 $j$  ( $1 \leq j \leq N_i^M$ )が時刻 $t$ に生み出すキャッシュフロー $R_{t,i,j}$ を式(4)、(5)のように定式化する。なお、実際の商社事業において単一の鉱山より複数の鉱物を産出し事業化しているケースは

多くない、または、副次的に産出された鉱物による影響は限定的であるため、本モデルでは鉱山*j*より単一の鉱物*i*のみが産出されるものと仮定する。

$$R_{t,i,j} = q_{t,i,j}(S_{t,i} - c_{i,j}) \quad (4)$$

$$q_{t,i,j} = \begin{cases} \min\{\bar{q}_{i,j}, Q_{t,i,j}\} & (S_{t,i} > c_{i,j}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5)$$

ただし、 $q_{t,i,j}$ は時刻*t*における採掘量、 $c_{i,j}$ は鉱石 1 単位当たりの採掘費用である。 $q_{t,i,j}$ は式(5)に従い決定される。採掘を行っても採算が取れない場合には採掘は行われず、採算が取れる場合にはフル操業が行われると考える。 $\bar{q}_{i,j}$ はフル操業時の 1 期間当たりの採掘量である。 $Q_{t,i,j}$ は時刻*t*の期首における埋蔵量である。埋蔵量が $\bar{q}_{i,j}$ を下回っている場合には、当然ながら、採掘量の上限は埋蔵量となる。埋蔵量は採掘に伴い減少する。

$$Q_{t+1,i,j} = Q_{t,i,j} - q_{t,i,j} \quad (6)$$

当該期*t*から*L*期間内の $\tau$  ( $t \leq \tau \leq t+L$ )期の鉱物価格 $S_{\tau,i}$ が確率変数であることに着目しよう。なお、*L*は十分に大きい正の定数である。本研究の適用事例では*L*=200(50 年)を採用している。この時、*t*期の鉱物*i*の価格の実現値 $\bar{S}_{\tau,i}$ を与件として、当該の鉱山*j*から獲得できるキャッシュフローに対する期待効用 $EU_j(\bar{S}_{\tau,i})$ は、

$$EU_j(\bar{S}_{\tau,i}) = E_t \left[ \sum_{\tau=t}^{t+L} \left( \frac{1}{1+r} \right)^{\tau-t} u_v(R_{\tau,i,j}) \right] \quad (7)$$

と表される。ただし、 $E_t$ は*t*期を起点とする鉱物価格に関する期待値操作を、 $r$ は鉱山市場の参加者の 1 期間当たりの資本収益率を表す。また、 $u_v(\cdot)$ は相対的リスク回避度一定の効用関数であり、

$$u_v(v) = \begin{cases} \ln v & (rra = 1) \\ \frac{v^{(1-rra)} - 1}{1 - rra} & (rra \neq 1) \end{cases} \quad (8)$$

と定義される。ただし、 $rra$ は相対的リスク回避度<sup>12)~15)</sup>である。ここで、*t*期における鉱山*j*の市場価格 $V_{t,i,j}$ は、式(7)で示す期待効用と確実性同値<sup>16)17)</sup>となる水準に決定される。すなわち、市場価格は

$$u_v(V_{t,i,j}) = EU_j(\bar{S}_{\tau,i}) \quad (9)$$

が成立する水準に決定される。

意思決定者が時刻*t*に鉱山*j* ( $1 \leq i \leq N^R, 1 \leq j \leq N_i^M$ )を保有しているかどうかを変数 $h_{t,i,j}$ で表す。 $h_{t,i,j}$ は 0 か 1 のいずれかを取り、1 のときは鉱山を保有していることを表し、0 のときは保有していないことを表す。意思決定者の予算には制限があり、保有できる鉱山はこの予算内に制約される。時刻*t*における予算制約式を以下のように定式化する。

$$\sum_{i=1}^{N^R} \sum_{j=1}^{N_i^M} h_{t,i,j} V_{t,i,j} + s_t = W_t \quad (10)$$

$W_t$ は時刻*t*の期首における意思決定者の保有資産総額である。 $s_t$ は時刻*t*において意思決定者が保有する流動性資産の総額である。 $W_t$ は前期の意思決定に依存して、

以下の式に従い決定される。

$$\sum_{i=1}^{N^R} \sum_{j=1}^{N_i^M} h_{t-1,i,j} (R_{t-1,i,j} + V_{t,i,j}) + (1 + \rho) s_{t-1} = W_t \quad (11)$$

左辺の総和は、時刻*t* - 1において鉱山から得られるキャッシュフローと、時刻*t* - 1の期末において意思決定者が保有する鉱山の資産価値の総額である。 $\rho$ は流動性資産に付く金利である。

### (3) ポートフォリオの最適化モデル

鉱山は購入・売却の意思決定を行ってから、購入・売却が実現するまでの間にタイムラグが存在する。これは商社の実務において、鉱山の購入・売却の意思決定後に入札、購入・売却先の選定、価格交渉、契約締結、代金決済および所有権の移転に至るまで一定の時間を要するためである。そのため、時刻*t*に鉱山*j*の購入を決定したとしても、 $h_{t,i,j}$ が直ちに 1 になるわけではない。このような購入・売却のタイムラグをモデル化する。まず、鉱山の購入・売却に関する時刻*t*の意思決定を表す変数として、 $x_{t,i,j}$ を定義する。 $x_{t,i,j} = 1$ は、時刻*t*において鉱山*j*の購入・売却の意思決定を行うことを意味する。具体的には、鉱山*j*を所有していない場合は購入の意思決定を意味し、所有している場合は売却の意思決定を意味する。他方、 $x_{t,i,j} = 0$ は、そのような意思決定を行わない、現状維持の選択を意味する。 $x_{t,i,j} = 1$ を選択してから、鉱山の購入・売却が成立するまでのタイムラグを表現するために、鉱山*j*に関する状態変数 $y_{t,i,j}$ を定義する。 $y_{t,i,j}$ は、鉱山*j*の購入・売却が実現するまでの残り時間を表す整数値の変数であり、以下の遷移式に従い推移する。

$$y_{t+1,i,j} = \begin{cases} \bar{y}_{i,j}^{buy} - 1 & (h_{t,i,j} = 0 \text{ and } x_{t,i,j} = 1) \\ \bar{y}_{i,j}^{sell} - 1 & (h_{t,i,j} = 1 \text{ and } x_{t,i,j} = 1) \\ y_{t,i,j} - 1 & (y_{t,i,j} \geq 1 \text{ and } x_{t,i,j} = 0) \\ 0 & (y_{t,i,j} = 0 \text{ and } x_{t,i,j} = 0) \end{cases} \quad (12)$$

時刻*t*に鉱山*j*の購入の意思決定が行われる ( $h_{t,i,j} = 0$  and  $x_{t,i,j} = 1$ ) と、 $y_{t+1,i,j}$ は $\bar{y}_{i,j}^{buy} - 1$ に設定される。 $\bar{y}_{i,j}^{buy}$ は鉱山*j*を購入するのに要する時間である。また、時刻*t*に鉱山*j*の売却の意思決定が行われる ( $h_{t,i,j} = 1$  and  $x_{t,i,j} = 1$ ) と、 $y_{t+1,i,j}$ は $\bar{y}_{i,j}^{sell} - 1$ に設定される。 $\bar{y}_{i,j}^{sell}$ は鉱山*j*を売却するのに要する時間である。 $y_{t,i,j}$ は残り時間を表すので、その値が正 ( $y_{t,i,j} \geq 1$  and  $x_{t,i,j} = 0$ ) のときは、時刻の経過に伴い 1 ずつ減っていく。また、その値が 0 であり、かつ、鉱山*j*の購入・売却の意思決定が行われなるとき ( $y_{t,i,j} = 0$  and  $x_{t,i,j} = 0$ ) は、0 のまま推移する。

$y_{t,i,j}$ に依存して、 $h_{t,i,j}$ は以下のように推移する。

$$h_{t+1,i,j} = \begin{cases} h_{t,i,j} & (y_{t,i,j} \neq 1) \\ 1 & (h_{t,i,j} = 0 \text{ and } y_{t,i,j} = 1) \\ 0 & (h_{t,i,j} = 1 \text{ and } y_{t,i,j} = 1) \end{cases} \quad (13)$$

$h_{t,i,j}$ の値が切り替わるのは、 $y_{t,i,j}$ が1から0に変化するときである。よって、 $y_{t,i,j} \neq 1$ のときには、 $h_{t,i,j}$ の値は不変に留まる。

意思決定者が操作可能な変数は $x_{t,i,j}$ である。ただし、 $x_{t,i,j}$ を1にするためには、時刻 $t$ において一定の条件が満たされていなければならない。まず、鉱山 $j$ の購入・売却の意思決定が行われてから、購入・売却が実現するまでの間は、 $x_{t,i,j}$ を1にすることはできない。

$$x_{t,i,j} = 0 \text{ when } y_{t,i,j} \geq 1 \quad (14)$$

次に、鉱山を購入する場合には、購入の意思決定を行う段階において十分な流動性資産を有していなければならない。これは現実にも存在する制約であり、将来に得られる見込みの現金を担保として、鉱山の購入に関する交渉を行うことはできない。この制約は以下の式で表される。

$$\sum_{i=1}^{NR} \sum_{j=1}^{N_i^M} x_{t,i,j} (1 - h_{t,i,j}) V_{t,i,j} \leq \left[ s_t - \sum_{i=1}^{NR} \sum_{j=1}^{N_i^M} \delta(y_{t,i,j} \geq 1) (1 - h_{t,i,j}) V_{t,i,j} \right]_+ \quad (15)$$

この式に含まれる鉱山の資産価値 $V_{t,i,j}$ には $(1 - h_{t,i,j})$ が掛けられている。 $(1 - h_{t,i,j})$ は $h_{t,i,j} = 1$ のときに0となる。つまり、式(14)、(15)は意思決定者がまだ保有していない鉱山を対象とした制約である。 $s_t$ は既に定義した通り、時刻 $t$ において意思決定者が保有する流動性資産の総額である。右辺の総和記号は、時刻 $t$ よりも前に既に購入を決定したが、まだ購入が実現していない鉱山の資産総額である。よって、右辺の $[ ]_+$ 内は、手元に残されている現金の総額から、将来の鉱山購入のために留保されている現金の総額を差し引いたものである。他方、左辺は時刻 $t$ に購入を決定する鉱山の資産総額を表す。なお、 $[ ]_+$ は $[ ]$ 内が正のときにその値を、負のときには0となる関数である。市況によっては、右辺の $[ ]_+$ 内の値は負になることもある。具体的には、購入しようとしている鉱山の価格が大きく値上がりした場合である。この場合でも、制約式を満たすことが可能なように、右辺は負にならないようにしている。右辺がゼロのときには、新たな鉱山の購入を諦めれば左辺もゼロとなるため、制約式を満たすことができる。制約式(13)により、ポートフォリオを組み替えるのに時間がかかることを表現できる。鉱山の購入に関する意思決定を行うには、それに先立ち、手持ちの鉱山の売却を行い、流動性資産を十分に確保する必要があるからである。

以上の前提の下で、意思決定者は最終期 $T$ における資

産総額 $W_T$ から得られる期待効用を最大化するように $x_{i,j,t}$  ( $0 \leq t < T$ )を決定すると考える。

$$\max_{\{x_{t,i,j}\}_{0 \leq t < T, 0 \leq i \leq NR, 0 \leq j \leq N_i^M}} E_0[u(W_T)] \quad (16)$$

s. t. 式(1) - (15)

ただし、 $E_0$ は時刻0の情報に基づいた時刻 $T$ の期首における保有資産総額 $W_T$ に関する期待値操作を意味する。

$u$ は意思決定者のリスク回避性向を表す効用関数である。式(8)と同様に効用関数 $u$ には相対的リスク回避度一定の効用関数を使用する。

$$u(w) = \frac{w^{1-b} - 1}{1-b} \quad (17)$$

ただし、 $b$ は意思決定者の相対的リスク回避度である。

### 3. 解法

#### (1) 分析方法

状態変数が多いため、以上の最適化問題を厳密に解くことは、数値的にも不可能である。そこで、以下のような近似的解法を考える。まず、鉱物 $i$ を産出する鉱山 $j$ の保有資産額の上限(予算)を $\bar{A}_t$ で表し、この予算の時刻 $t$ における水準を $\bar{A}_{t,i}$ で表す。意思決定者は予算 $\bar{A}_{t,i}$ の範囲内で、鉱物 $i$ を産出する鉱山 $j$ を保有できるとする。

$$\sum_{j=1}^{N_i^M} h_{t,i,j} V_{t,i,j} \leq \bar{A}_{t,i} \quad (18)$$

$\bar{A}_{t,i}$ を時刻 $t$ における状態変数の関数として次のように表す。

$$\bar{A}_{t,i} = W_t \cdot \frac{\exp U_{t,i}}{1 + \sum_{j=1}^{NR} \exp U_{t,j}} \quad (19)$$

$$U_{t,i} = a_{i0} + a_{i1} \ln\left(\frac{W_t}{W_0}\right) + a_{i2} \ln\left(\frac{S_{t,i}}{S_{0,i}}\right) \quad (20)$$

$a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}$ は意思決定者が設定するパラメータである。 $U_{t,i}$ は鉱物 $i$ の投資対象としての魅力を得点化したものである。 $U_{t,i}$ が高い鉱物 $i$ には、より多額の予算が割り当てられる。

次に、各鉱物 $i$ について、当該の鉱物を産出する鉱山の投資優先順位を定める。この優先順位を $O(i, k)$ で表す。 $O(i, k)$  ( $1 \leq k \leq N_i^M$ )は優先順位が $k$ 番目の鉱山を表す。すると、 $\bar{A}_{t,i}$ と $O(i, k)$ を用いて、 $x_{t,i,O(i,k)}$ を以下のように決定できる。

$$\bar{k}_{t,i} = \max_k \bar{k} \quad (21)$$

$$s. t. \sum_{k=1}^{\bar{k}} V_{t,i,O(i,k)} \leq \bar{A}_{t,i} \quad (22)$$

$$x_{t,i,O(i,k)} = \begin{cases} 1 & \left( \begin{array}{l} k > \bar{k}_{t,i} \text{ and } h_{t,i,O(i,k)} = 1 \\ \text{and } y_{t,i,O(i,k)} = 0 \end{array} \right) \\ 1 & \left( \begin{array}{l} k \leq \bar{k}_{t,i} \text{ and } h_{t,i,O(i,k)} = 0 \\ \text{and } y_{t,i,O(i,k)} = 0 \end{array} \right) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases} \quad (23)$$

すなわち、予算 $\bar{A}_{t,i}$ の範囲内で優先順位の高い鉱山を保有するように、 $x_{t,i,O(i,k)}$ を決定する。 $\bar{k}_{t,i}$ は時刻 $t$ において保有対象となる鉱物 $i$ を産出する鉱山数である。優先順位が $\bar{k}_{t,i}$ 番目以下の鉱山が保有対象となり、それ以外の鉱山は非保有対象となる。非保有対象の鉱山を保有している場合には、売却の意思決定を行う。保有対象の鉱山が未保有の場合には、購入の意思決定を行う。ただし、購入の意思決定を行う際には、式(15)、(16)の流動性資産の制約を満たさなければいけない。そこで、購入の意思決定は以下のルールに従い行う。 $k$ の値が低い鉱山から順番に、 $x_{t,i,O(i,k)}$ を1にして式(15)、(16)を満たせるかどうかを確認する。満たせる場合は $x_{t,i,O(i,k)}$ を1にし、そうでなければ0にする。以上を $k = 1, 2, 3 \dots$ の順に全ての鉱山に対して繰り返す。なお、各鉱山は単一の鉱物を産出する前提により、各鉱物について定義されるため、順位が同じ鉱山は複数存在することがある。この場合には、鉱山価格 $V_{t,i,O(i,k)}$ が高い鉱山を優先して $x_{t,i,O(i,k)}$ の判定を行う。

## (2) シミュレーション

以上の意思決定ルールを用いると、 $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}$ と $O(i, k)$ を定めれば、 $h_{t,i,O(i,k)}$ を自動的に決定できるようになるため、モンテカルロ法により式(15)の目的関数を評価できるようになる。あとは、目的関数を最大化するように $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}$ と $O(i, k)$ を定めれば、近似的に最大化問題の解を得ることができる。ただし、モンテカルロ法を使う際には、(仮に $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}$ と $O(i, k)$ を固定しても)評価の度に目的関数が変化してしまうという問題がある。これを防ぐためには、モンテカルロ法で用いる乱数に毎回同じものを使えば良い。本研究では、式(1)~(3)により発生する乱数を用いてモンテカルロ法を適用し、また式(7)、(16)における期待値を評価する際には、1000本の鉱物資源価格のパスを発生させている。最適化には遺伝的アルゴリズム(GA)を用い、 $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}$ の最適化には実数値GAを、 $O(i, k)$ の最適化には順位GAを利用する。GAはC言語を用いて独自に実装し、最適化を実施した<sup>18)</sup>。

## 4. 事例研究

本事例研究においては、鉱物資源価格のボラティリティ推計、並びに近年売買された鉱山事業取引を基に、前述2.及び3.のモデル計算を活用し、一定の条件下での鉱山ポートフォリオの最適化を検証する。

### (1) ボラティリティの推計

投資対象の鉱物として、原料炭・一般炭・銅・鉄鉱石・アルミの5種類を考える。これらの鉱物の価格のボラティリティを分析した結果を表-1、2に整理する。分析には、2009年第1四半期から2017年第2四半期にかけての34四半期のデータを利用した。価格データの出所は、原料炭のものはBloombergであり、それ以外の鉱物のものはIMF Primary Commodity Prices掲載である。表-2の( )内の数値は、帰無仮説 $l_{ij} = 0$ に関する $t$ 値であり、全て有意水準5%で有意であった。一方、原料炭と銅、および、一般炭と銅のボラティリティの相関は有意ではなかったため、ゼロとした。

表-1 鉱物ごとのボラティリティ

|              | 原料炭       | 一般炭       | 銅         | 鉄鉱石       | アルミ       |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\sigma_i^2$ | 6.023E-02 | 1.816E-02 | 1.485E-02 | 3.639E-02 | 6.839E-03 |

表-2 ボラティリティの相関係数

| $l_{ij}$ | 原料炭               | 一般炭               | 銅                  | 鉄鉱石               | アルミ                |
|----------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| 原料炭      | 1<br>(NA)         | 0.4998<br>(4.306) | 0<br>(NA)          | 0.3698<br>(3.039) | 0.2289<br>(2.114)  |
| 一般炭      | 0.4998<br>(4.306) | 1<br>(NA)         | 0<br>(NA)          | 0.4666<br>(4.071) | 0.2632<br>(2.395)  |
| 銅        | 0<br>(NA)         | 0<br>(NA)         | 1<br>(NA)          | 0.4695<br>(4.215) | 0.7229<br>(10.855) |
| 鉄鉱石      | 0.3698<br>(3.039) | 0.4666<br>(4.071) | 0.4695<br>(4.215)  | 1<br>(NA)         | 0.5496<br>(5.171)  |
| アルミ      | 0.2289<br>(2.114) | 0.2632<br>(2.395) | 0.7229<br>(10.855) | 0.5496<br>(5.171) | 1<br>(NA)          |

ボラティリティ推計の結果、原料炭・鉄鉱石は相対的にボラティリティが高く、一般炭・銅は中程度であり、アルミはボラティリティが低い。また、銅とアルミは比較的相関が高いが、その他鉱物間の相関は高くはないと言える。

### (2) 問題設定

モデル計算に用いる変数を表-3~5の通り設定する。

表-3 モデル計算の変数

|             |                |                    |
|-------------|----------------|--------------------|
| $i_1$       | 鉱物 $i_1$       | 原料炭                |
| $i_2$       | 鉱物 $i_2$       | 一般炭                |
| $i_3$       | 鉱物 $i_3$       | 銅                  |
| $i_4$       | 鉱物 $i_4$       | 鉄鉱石                |
| $i_5$       | 鉱物 $i_5$       | アルミ                |
| $N_{i_1}^M$ | 原料炭鉱山の数        | 4                  |
| $N_{i_2}^M$ | 一般炭鉱山の数        | 4                  |
| $N_{i_3}^M$ | 銅鉱山の数          | 4                  |
| $N_{i_4}^M$ | 鉄鉱石鉱山の数        | 4                  |
| $N_{i_5}^M$ | アルミ鉱山の数        | 4                  |
| $t$         | 単位期間           | 四半期 (1/4年)         |
| $L$         | 採掘可能期間         | 200 (50年)          |
| $T$         | モデル計算期間        | 40 (10年)           |
| $r$         | 資本収益率          | 0.0241136890844451 |
| $rra$       | 相対リスク回避度       | 1.0                |
| $s_0$       | 期初の流動性資産総額     | 30,000,000,000     |
| $\rho$      | 金利 (割引率)       | 0.00741707177773   |
| $y_{buy}$   | 鉱山を購入するのに要する期間 | 2.0                |
| $y_{sell}$  | 鉱山を購入するのに要する期間 | 2.0                |

表-4 鉱物資源の期首・収斂価格及びドリフト

(単位: US\$/MT)

| 記号    | 鉱物名 | $S_{0,i}$<br>期首価格 | $S_{40,i}$<br>10年後価格 | $\mu$<br>ドリフト |
|-------|-----|-------------------|----------------------|---------------|
| $i_1$ | 原料炭 | 170               | 130                  | -6.707E-03    |
| $i_2$ | 一般炭 | 115               | 75                   | -1.047E-02    |
| $i_3$ | 銅   | 6050              | 6620                 | 2.228E-03     |
| $i_4$ | 鉄鉱石 | 68                | 70                   | 7.247E-04     |
| $i_5$ | アルミ | 2030              | 2050                 | 2.944E-04     |

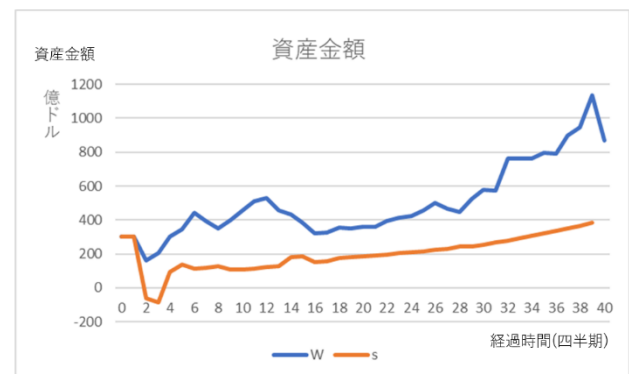
(3) 計算結果

前述 4. (1), (2) の条件の下で  $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}$  と  $O(i, k)$  の最適化を行った。ここでは、最適化に用いた 1000 本の鉱物資源価格のパスのうち、1 本を取り上げ、このパスにおける鉱山ポートフォリオの推移を示す。なお、図-1~9 のグラフは縦軸に金額 (US\$億またはUS\$/トン)、横軸に経過時間 (四半期毎の期数) を表す。

図-1 に示すように、資産金額は、流動性資産総額が US\$300 億から開始し鉱山を買収し始める  $t = 2$  で一旦マイナスとなるが、その後鉱山から得られるキャッシュが徐々に増加し、10 年後には US\$約 400 億まで増加した。一方、保有資産総額は、保有鉱山価格の変動により上下を繰り返しながら、ピークで US\$約 1100 億、10 年後は US\$約 900 億まで増加した。

表-5 各鉱山の条件

| 原料炭   |       |         |           |           |           |           |
|-------|-------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $j_1$ | 鉱山    | 単位      | $j_{1,1}$ | $j_{1,2}$ | $j_{1,3}$ | $j_{1,4}$ |
| $v_1$ | 鉱山価格  | US\$百万  | 15,000    | 1,240     | 940       | 2,040     |
| $c_1$ | 採掘コスト | US\$/MT | 94        | 92        | 95        | 95        |
| $Q_1$ | 埋蔵量   | 千MT     | 1,980,000 | 1,233,000 | 106,000   | 165,000   |
| $q_1$ | 月間生産量 | 千MT/月   | 5,500     | 930       | 420       | 460       |
| 一般炭   |       |         |           |           |           |           |
| $j_2$ | 鉱山    | 単位      | $j_{2,1}$ | $j_{2,2}$ | $j_{2,3}$ | $j_{2,4}$ |
| $v_2$ | 鉱山価格  | US\$百万  | 2,190     | 760       | 140       | 800       |
| $c_2$ | 採掘コスト | US\$/MT | 47        | 55        | 47        | 41        |
| $Q_2$ | 埋蔵量   | 千MT     | 890,000   | 331,000   | 159,000   | 420,000   |
| $q_2$ | 月間生産量 | 千MT/月   | 1,080     | 975       | 420       | 1,660     |
| 銅     |       |         |           |           |           |           |
| $j_3$ | 鉱山    | 単位      | $j_{3,1}$ | $j_{3,2}$ | $j_{3,3}$ | $j_{3,4}$ |
| $v_3$ | 鉱山価格  | US\$百万  | 6,700     | 22,650    | 23,750    | 3,400     |
| $c_3$ | 採掘コスト | US\$/MT | 2,450     | 4,760     | 4,250     | 4,200     |
| $Q_3$ | 埋蔵量   | 千MT     | 21,000    | 54,000    | 159,000   | 13,000    |
| $q_3$ | 月間生産量 | 千MT/月   | 34        | 37        | 105       | 25        |
| 鉄鉱石   |       |         |           |           |           |           |
| $j_4$ | 鉱山    | 単位      | $j_{4,1}$ | $j_{4,2}$ | $j_{4,3}$ | $j_{4,4}$ |
| $v_4$ | 鉱山価格  | US\$百万  | 380       | 4,800     | 1,870     | 240       |
|       | 採掘コスト | US\$/MT | 60        | 55        | 52        | 55        |
| $Q_4$ | 埋蔵量   | 千MT     | 96,600    | 430,000   | 702,000   | 400,000   |
| $q_4$ | 月間生産量 | 千MT/月   | 270       | 1,190     | 1,830     | 1,666     |
| アルミ   |       |         |           |           |           |           |
| $j_5$ | 鉱山    | 単位      | $j_{5,1}$ | $j_{5,2}$ | $j_{5,3}$ | $j_{5,4}$ |
| $v_5$ | 鉱山価格  | US\$百万  | 1,400     | 105       | 545       | 1,125     |
| $c_5$ | 採掘コスト | US\$/MT | 1,700     | 2,000     | 1,900     | 2,000     |
| $Q_5$ | 埋蔵量   | 千MT     | 17,000    | 17,000    | 14,000    | 13,000    |
| $q_5$ | 月間生産量 | 千MT/月   | 47        | 47        | 38        | 36        |



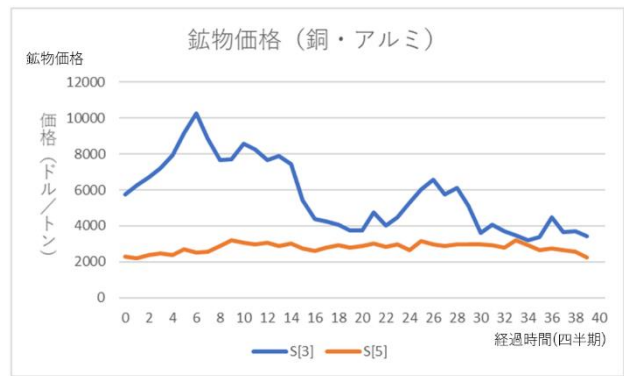
W:保有資産総額, s:流動性資産総額

図-1 資産金額推移

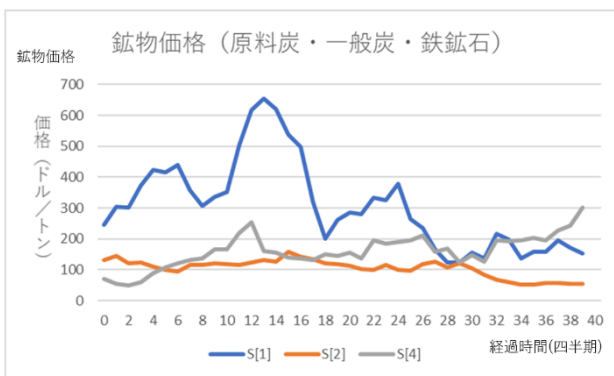
図-2, 3に示すように、鉱物価格は、過去の市況変動実績を反映して、原料炭、銅及び鉄鉱石は価格変動が激しいが、一般炭及びアルミは比較的安定的に推移している。

図-4に示すように、鉱山価格合計は、US\$約1100億から開始して、鉱物市況の変動と共に大幅な価格変動を繰り返す、ピークでUS\$約4000億、ボトムでUS\$約600億、10年後にUS\$約1100億となった。これは鉱山事業のボラティリティが非常に高いことを裏付けている。

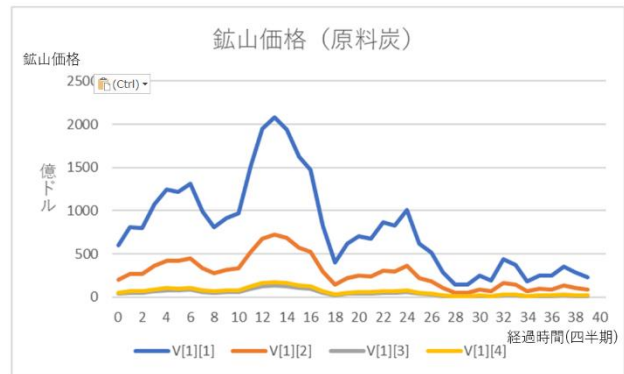
また、鉱物毎の鉱山価格は、図-5~9に示すように原料炭・銅・鉄鉱石を中心に殆どの鉱山が大きく変動しているが、その変動周期にはズレが生じている。これは前述4.(1)の通り、銅とアルミ間以外は各鉱物間の相関が高くないことを表している。



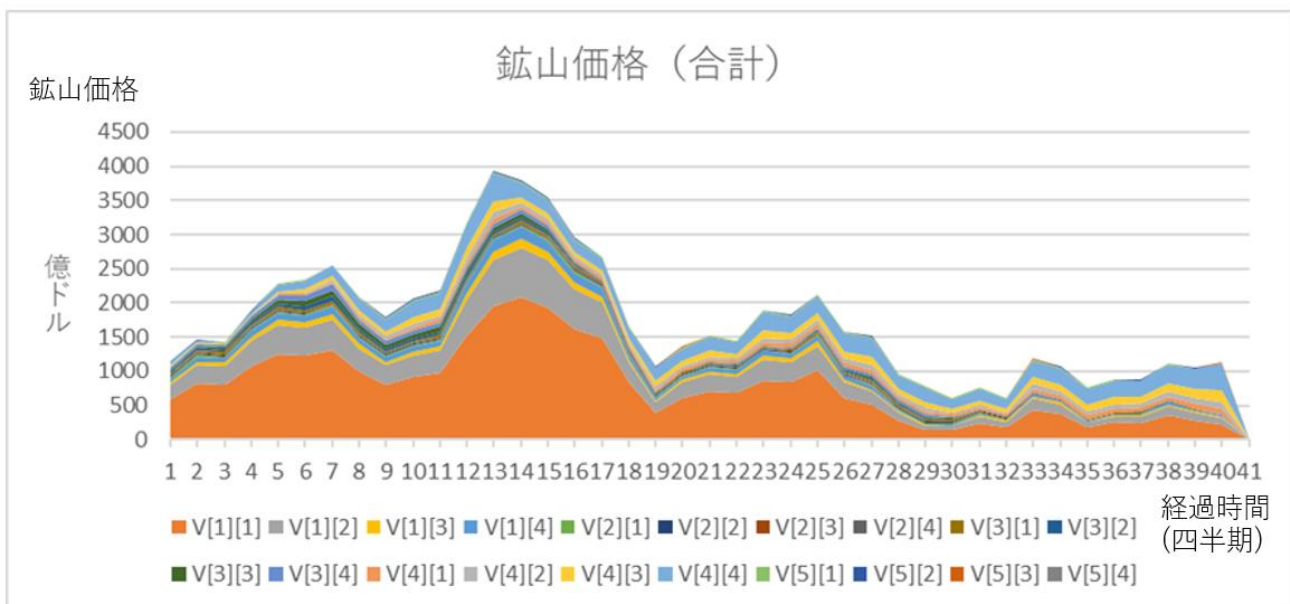
S[3]:銅価格, S[5]:アルミ価格  
図-3 鉱物価格推移 (銅・アルミ)



S[1]:原料炭価格, S[2]:一般炭価格, S[4]:鉄鉱石価格  
図-2 鉱物価格推移 (原料炭・一般炭・鉄鉱石)



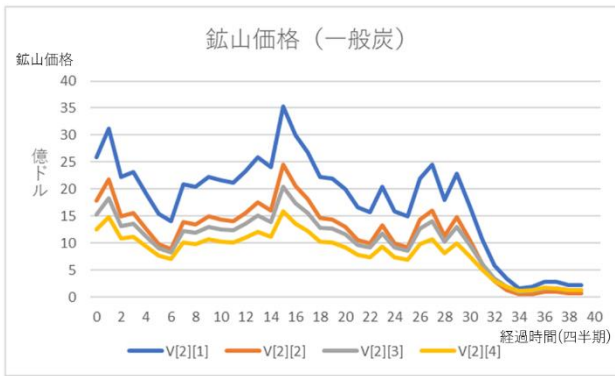
V[1][1]:j1,1鉱山価格, V[1][2]:j1,2鉱山価格  
V[1][3]:j1,3鉱山価格, V[1][4]:j1,4鉱山価格  
図-5 原料炭の鉱山価格推移



V[1][1]~V[1][4]:原料炭鉱山j1,1~j1,4価格, V[2][1]~V[2][4]:一般炭鉱山j2,1~j2,4価格, V[3][1]~V[3][4]:銅鉱山j3,1~j3,4価格, V[4][1]~V[4][4]:鉄鉱石鉱山j4,1~j4,4価格, V[5][1]~V[5][4]:アルミ鉱山j5,1~j5,4価格

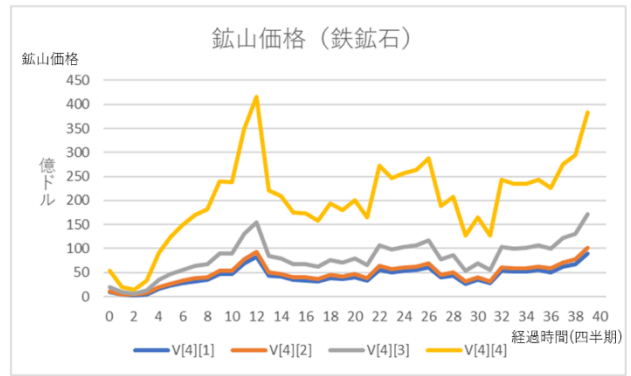
図-4 鉱山価格合計推移





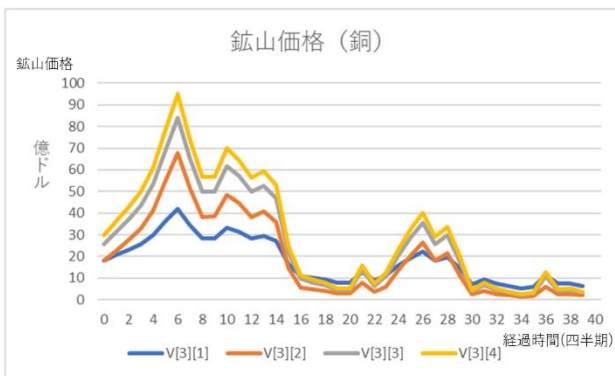
V[2][1]:j2,1鉱山価格, V[2][2]:j2,2鉱山価格  
V[2][3]:j2,3鉱山価格, V[2][4]:j2,4鉱山価格

図-6 一般炭の鉱山価格推移



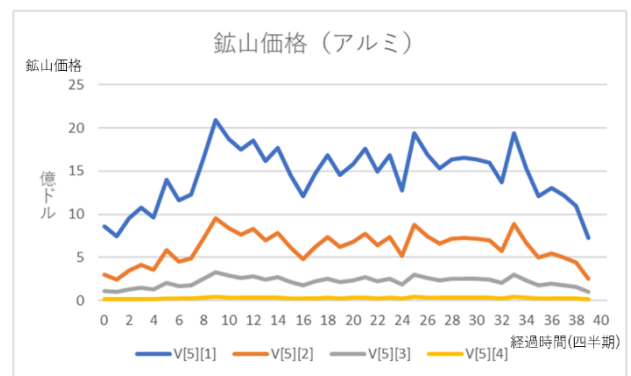
V[4][1]:j4,1鉱山価格, V[4][2]:j4,2鉱山価格  
V[4][3]:j4,3鉱山価格, V[4][4]:j4,4鉱山価格

図-8 鉄鉱石の鉱山価格推移



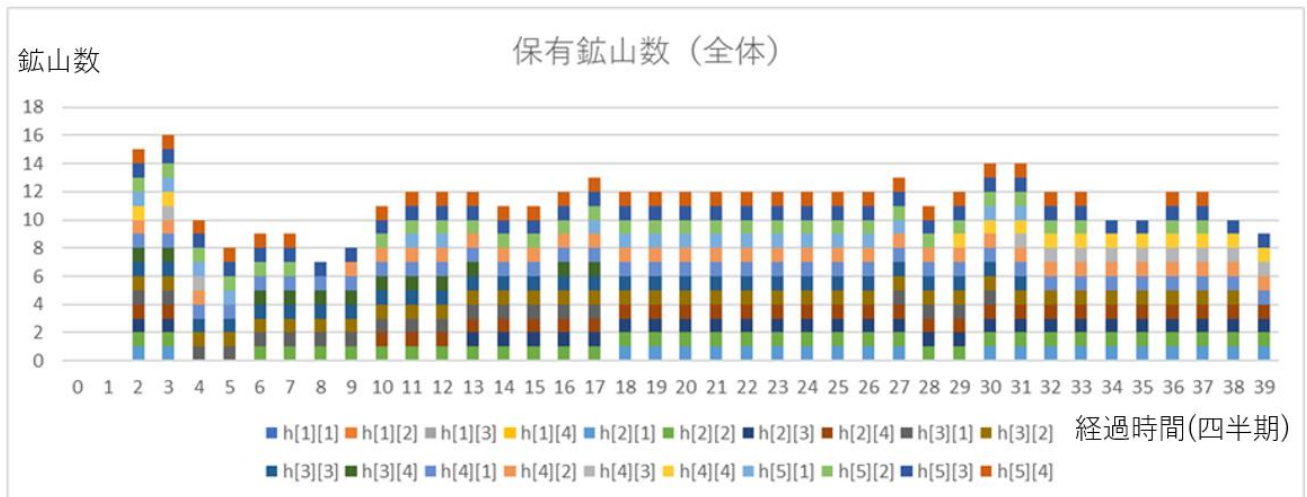
V[3][1]:j3,1鉱山価格, V[3][2]:j3,2鉱山価格  
V[3][3]:j3,3鉱山価格, V[3][4]:j3,4鉱山価格

図-7 銅の鉱山価格推移



V[5][1]:j5,1鉱山価格, V[5][2]:j5,2鉱山価格  
V[5][3]:j5,3鉱山価格, V[5][4]:j5,4鉱山価格

図-9 アルミの鉱山価格推移



h[1][1]~h[1][4]:原料炭鉱山j1,1~j1,4, h[2][1]~h[2][4]:一般炭鉱山j2,1~j2,4, h[3][1]~h[3][4]:銅鉱山j3,1~j3,4,  
h[4][1]~h[4][4]:鉄鉱石鉱山j4,1~j4,4, h[5][1]~h[5][4]:アルミ鉱山j5,1~j5,4

図-10 保有鉱山数(全体)推移

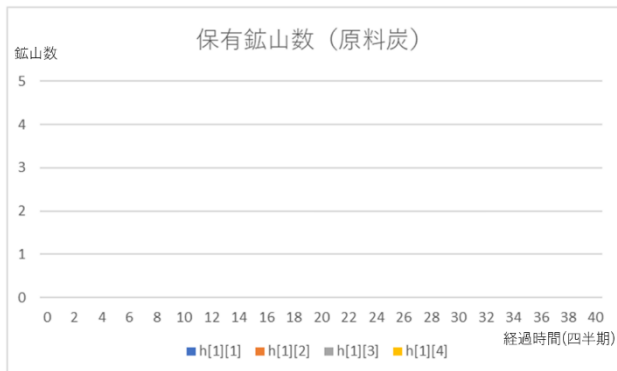
保有鉱山数全体については、図-10に示すようにt = 2以降、最大で16鉱山、最小で7鉱山となったが、大凡10~12鉱山を保有し、

図-10に示すようにt = 2以降、最大で16鉱山、最小で7鉱山となったが、大凡10~12鉱山を保有し、

鉱物毎の保有鉱山数については、図-11~15に示すよ

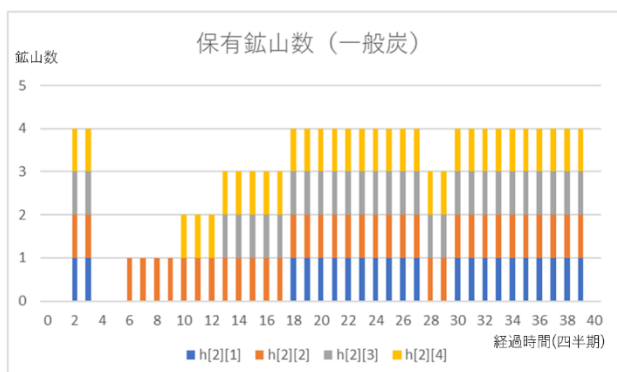


うに一般炭・銅・鉄鉱石・アルミは鉱山保有数が随時変動し、同一鉱物内でも鉱山ポートフォリオの入替えが行われている。一方、原料炭の鉱山は終始保有されなかった。これは保有資産金額に制限がある状況下、原料炭の鉱山価格が相対的に高いこと、並びに鉱物価格のボラティリティが高いことにより、鉱山ポートフォリオ形成において優先順位が下がったためと推測できる。



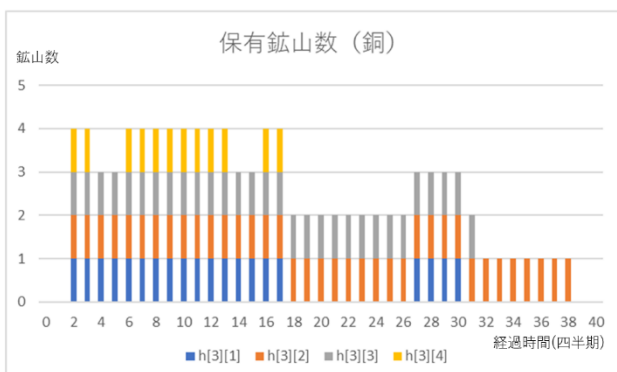
h[1][1]:j1,1鉱山, h[1][2]:j1,2鉱山  
h[1][3]:j1,3鉱山, h[1][4]:j1,4鉱山

図-11 原料炭の保有鉱山数推移



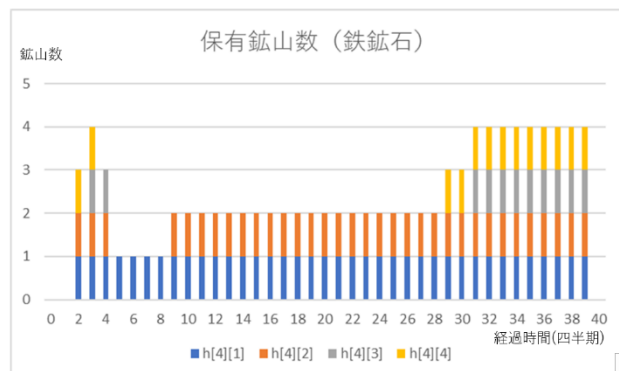
h[2][1]:j2,1鉱山, h[2][2]:j2,2鉱山  
h[2][3]:j2,3鉱山, h[2][4]:j2,4鉱山

図-12 一般炭の保有鉱山数推移



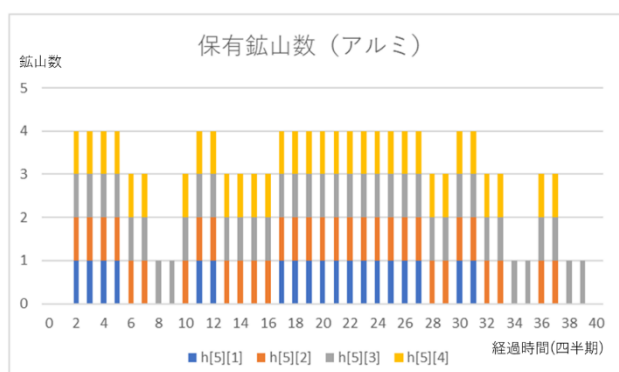
h[3][1]:j3,1鉱山, h[3][2]:j3,2鉱山  
h[3][3]:j3,3鉱山, h[3][4]:j3,4鉱山

図-13 銅の保有鉱山数推移



h[4][1]:j4,1鉱山, h[4][2]:j4,2鉱山  
h[4][3]:j4,3鉱山, h[4][4]:j4,4鉱山

図-14 鉄鉱石の保有鉱山数推移



h[5][1]:j5,1鉱山, h[5][2]:j5,2鉱山  
h[5][3]:j5,3鉱山, h[5][4]:j5,4鉱山

図-15 アルミの保有鉱山数推移

#### (4) 実務的示唆

本モデル計算による結果において、鉱物毎に異なる価格や鉱山価格の変動に伴い、一定期間をもって鉱山ポートフォリオの入替えが行われている。本モデルでは、近年の鉱山事業売買の実績値に基づき算出されていたため、筆者の実務経験上、商社の金属資源事業部門において近年実際に行われてきた鉱山ポートフォリオの構築や資産入れ替えの実情に近い結果が得られた。これは鉱山ポートフォリオの長期最適化を設定する際に、本モデルが有効に機能することを表している。但し、本モデル計算では、4.(3)に示した通り原料炭の鉱山が終始保有されないことが発生したため、今後の課題としては、対象とする鉱山規模や価格、鉱物資源の選定の際に、制限される資産総額とのバランスを考慮して対応する必要があると言える。

#### (5) 中心命題の立証及び考察

4.(3), (4)を踏まえて、1.(3)で設定した中心命題の立証を行う。本モデル計算の結果から、鉱山事業は複数の鉱物資源と鉱山によってポートフォリオを形成し、全体

のリスクをコントロールしながら収益とキャッシュフローを安定化させることにより、鉱山ポートフォリオを最適化させている。更に、商社のように鉱山事業に配分される経営資源が制限される状況下においては、鉱物資源と鉱山の選択と集中により適宜リスク資産を入れ替えることにより、鉱山ポートフォリオを長期に亘り最適化できている。上述結果により理論上中心命題の立証が可能となった。

上述中心命題の立証により、商社における鉱山ポートフォリオの長期最適化に対する具体的方法を示すことができた。1. (3)の通り商社は従来鉱山の長期保有を前提とした事業収益獲得を狙っているが、鉱山ポートフォリオの最適化手法が確立されていなかったため、多種類の鉱物資源や鉱山を保有し続け、経営資源が不足する時、または、鉱物市況の変動（主に下落）時に売却する傾向にあった。したがって本研究により、経営資源が制限される状況下では、むしろ鉱物資源と鉱山の選択と集中により適宜リスク資産を入れ替えることが、鉱山ポートフォリオの長期最適化を可能とする方法であることを立証できたことは、実務的な意義を有する。

## 5. 結言

本研究では、鉱山ポートフォリオの長期最適化モデルを開発した。更に、鉱山売買取引の具体事例データによる計算結果を算出し、同モデルの実用性を検証の上、実務的示唆を示した。

ポートフォリオの長期最適化に関する理論は歴史的に多く研究されているが、基本的に金融工学に基づき、投資家から見た金融商品のポートフォリオについて論じられている。したがって、商社等の事業会社における鉱山事業のポートフォリオ長期最適化に関する研究は類を見ず、本研究は新たな領域でのモデル開発及び検証である。

まず、ポートフォリオ最適化モデルを開発した。次に、投資対象の鉱物5種類（原料炭・一般炭・銅・鉄鉱石・アルミ）の過去市況推移データ、鉱物毎に4鉱山、合計20鉱山の売買取引実績を基にして、保有資産に一定の上限額を設定の下、10年間での資産金額・鉱物価格・鉱山価格・保有鉱山数それぞれの推移を算出した。その結果、鉱物価格の変動と共に鉱山価格が変動し、鉱山売買により資産を入れ替えながら保有資産総額を増大させ、鉱山ポートフォリオの最適化を行っていることが検証できた。またその結果は、近年事業会社が営む鉱山事業のポートフォリオ入替え、および最適化の実情に近いことも確認できたため、本モデルは実務面でも有効性が高いと言える。

また、1. (3) 中心命題の立証により、商社における鉱

山ポートフォリオの長期最適化に対する具体的方法を示した。商社のように鉱山事業に配分される経営資源が制限される環境下では、鉱物資源と鉱山の選択と集中により適宜リスク資産を入れ替えることにより、鉱山ポートフォリオの長期最適化を可能とすると立証できたことは、実務的な意義を有する。

一方、事業会社の経営者の観点では、鉱物資源の数について増加/減少/維持の選択肢がある。いずれの選択肢においても本モデルによる計算は可能であるが、選択パターンが多岐にわたるため、本研究において全てのパターンの検証は行っていない。経営者が本モデルを実用的に活用することを想定し、選択肢を増やした場合の計算結果について更なる研究が可能である。

## 参考文献

- [1] Markowitz, H., "Portfolio selection", *Journal of Finance*, Vol.7, pp.77-91, 1952.
- [2] Merton, R.C., "Lifetime portfolio selection under uncertainty : the continuous time case", *Review of Economics and Statistics*, Vol.51, pp.247-257, 1969.
- [3] Rubinstein, M., "The strong case for the generalized logarithmic utility model as the premier model of financial markets", *Journal of Finance*, Vol.31, pp.551-571, 1976.
- [4] Breeden, D., "An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities", *Journal of Finance*, Vol.7, pp.265-296, 1979.
- [5] Campbell, J.Y., "Asset prices, consumption, and the business cycle", chapter 19 in John Taylor and Michael Woodford (eds), *Handbook of Macroeconomics*, Vol.1, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [6] Viceila, L.M., "Optimal portfolio choice for long-horizon investors with non-tradable labor income", *Journal of Finance*, Vol.56, pp.433-470, 2001.
- [7] 高屋圭介, 枇々木規雄: "モンテカルロ・シミュレーションを用いた動的ポートフォリオ最適化モデル", *日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌*, 第55巻, pp.84-109, 2012.
- [8] Cong, F. and Oosterlee, C.W., "Accurate and robust numerical methods for the dynamic portfolio management problem", *Computational Economics*, Vol.49, pp.433-458, 2017.
- [9] Brandt, M.W., Goyal, A., Santa-Clara, P., and Stroud, J.R., "A simulation approach to dynamic portfolio choice with an application to learning about return predictability", *Review of Financial Studies*, Vol.18(3), pp.831-873, 2005.
- [10] Fang, F. and Oosterlee, C.W., "A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.31(2),

pp.826-848, 2008.

- [11] Zakamulin, V., "Optimal dynamic portfolio risk management", *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp.85-99, 2016.
- [12] 小暮厚之, 照井伸彦: "計量ファイナンス分析の基礎" (ファイナンス・ライブラリー4), 朝倉書店, 2001.
- [13] 沖本竜義: "経済・ファイナンスデータの計量時系列分析", 朝倉書店, 2010.
- [14] 佐竹元一郎: "経済の統計的分析", 中央経済社, 2001.
- [15] 小林潔司, 小濱健吾: "リスク・アセットマネジメン

トのための統計数理", 電気書院, 2019.

- [16] 酒井泰弘: "不確実性の経済学", 有斐閣, 2001.
- [17] 多々納裕一: "不確実性下のプロジェクト評価: 課題と展望", 土木計画学研究・論文集, 第15巻, pp.19-30, 1998.
- [18] 伊庭斉志: "Excelで学ぶ遺伝的アルゴリズム", オーム社, 2005.

2020年2月6日 受稿

2020年6月15日 受理

## LONG-TERM OPTIMIZATION OF MINING DYNAMIC PORTFOLIO

Keiji MURAKAMI, Kiyoshi KOBAYASHI and Shunsuke SEGI

The mining business is exposed to the risk of price volatility of mineral resources, and also has the business risk of fluctuating mining volumes and costs. Therefore, the mining company controls the risk of the entire mining business by forming a portfolio of multiple mineral resources and mines and leveling profits and cash flows. In this study, we develop a long-term optimization model of a mining dynamic portfolio, analyze the calculation results of specific cases, and show practical applications and suggestions. The conventional theory of long-term portfolio optimization is based on financial engineering, and discusses the portfolio of financial products from an investor's perspective. However, there was no study on the long-term portfolio optimization of mining business in a business company such as trading and investment companies. This study is the newly developed model and verification in the domain.