数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 65-70

複数の倉庫をもつ在庫問題について

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1 Introduction

本研究では、販売するまでに3つの倉庫を経由する在庫管理問題における在庫レベルの推移について調べる。販売に直結している倉庫では一定の補充間隔により補充が行われるが、その他の倉庫では任意の時刻に補充が可能である。この問題を数学的に定式化し、最適政策について言及する。特に、需要率が一定である特別な場合において補充政策を改良するための手順を与える。

2 モデル

販売するまでに3つの倉庫を経由する在庫管理問題について考える。期首にすべての倉庫が製品でいっぱいに満たされている状態から始める。需要は倉庫3からの供給により満たされる。需要率は時刻tについての非減少関数で与えられており、$f(t)$で表す。倉庫3の低下した在庫レベルは倉庫2からの一定の補充間隔$\bar{T}$毎に最大許容量まで回復される。倉庫2は倉庫3への一定間隔の補充により在庫レベルが低下し、不足が起こる前により大きな容量をもつ倉庫1から補充される。倉庫1は倉庫2への補充により在庫レベルが低下する。倉庫1での補充は期首のみである。補充におけるリードタイムは0とする。

$W_i, i=1,2,3$を各倉庫の最大許容量とし、$W_1>>W_2>W_3$を仮定する。倉庫1から倉庫2への補充回数をmとし、倉庫2から倉庫3への補充回数をnとする。補充は常に在庫レベルがいっぱいになるようにされる。すべての倉庫において不足は許されないものとする。計画期間の長さTは倉庫3において在庫が0に達する時刻とする。$r_i, i=1,2$をそれぞれ倉庫1から倉庫2と倉庫2から倉庫3への1回当たりの輸送費用、h_iを倉庫i, $i=1,2,3$における単位時間単位当たりの在庫保持費用とする。$0\leq h_1\leq h_2\leq h_3$を仮定する。$\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}$を$k_1<k_2<\ldots<k_m$を満たす任意の$2,3,\ldots,n$の部分列とする。

目的はこの在庫管理において必要とされる費用の総和（輸送費用＋在庫保持費用）を最小にすることである。補充におけるリードタイムが0であることと仮定$0\leq h_1\leq h_2\leq h_3$から、明らかに倉庫1から倉庫2への補充は補充間隔で区切られた時刻上のある時点で起こる。この問題における決定変数は補充間隔$\bar{T}$および倉庫1から倉庫2への補充時刻の係数k_i, $i=1,2,\ldots,m$である。

3 定式化

まず、3つの倉庫における在庫レベルの推移および期間$[0,T]$上での累積在庫量を求めることから始める。

倉庫1は期首に最大許容量W_1までいっぱいになるように補充される。その後、倉庫1に保持されている製品は離散的な補充時刻$k_j\bar{T}$, $j=1,\cdots,m$に倉庫2への補充として消費される。計画期間$[0,T]$における倉庫1への補充は期首の1度きりである。ゆえに時刻tにおける倉庫1の在庫レベル$I_1(t)$は

$$I_1(t)=\begin{cases} W_1, & 0\leq t<k_1\bar{T} \\ W_1-\int_0^{(k_i-1)\bar{T}}f(s)ds, & k_i\bar{T}\leq t<k_{i+1}\bar{T},\quad i=1,\cdots,m-1 \\ W_1-\int_0^{(k_m-1)\bar{T}}f(s)ds, & k_m\bar{T}\leq t\leq T \end{cases} \tag{1}$$

で表される。在庫レベルはつねに非負の値をとるので、制約条件として

$$\int_0^{(k_m-1)\bar{T}} f(s)ds \leq W_1 \tag{2}$$

を与える。このとき、期間 $[0,T]$ における倉庫1での累積在庫量 I_1^+ は

$$\begin{aligned} I_1^+ &= \int_0^{k_1\bar{T}} W_1 dt + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{k_i\bar{T}}^{k_{i+1}\bar{T}} \left\{ W_1 - \int_0^{(k_i-1)\bar{T}} f(s)ds \right\} dt + \int_{k_m\bar{T}}^{T} \left\{ W_1 - \int_0^{(k_m-1)\bar{T}} f(s)ds \right\} dt \\ &= W_1 T - \sum_{i=1}^{m-1} (k_{i+1}-k_i)\bar{T} \int_0^{(k_i-1)\bar{T}} f(s)ds - (T - k_m\bar{T}) \int_0^{(k_m-1)\bar{T}} f(s)ds \end{aligned} \tag{3}$$

である。

倉庫2では、期首に在庫レベルが最大許容量 W_2 に達するまで補充される。倉庫2に保持されている製品は離散的な補充時刻 $i\bar{T},\ i=1,\ldots,n$ に倉庫3への補充として消費される。また、離散的な時刻 $k_j\bar{T},\ j=1,\ldots,m$ には倉庫1からの補充により、在庫レベルは最大許容量の W_2 にまで戻る。これらの状況から時刻 t における倉庫2の在庫レベル $I_2(t)$ は

$$I_2(t) = \begin{cases} W_2 - \int_0^{i\bar{T}} f(s)ds, & i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T},\ i=0,1,2,\cdots,k_1-1 \\ W_2 - \int_{(k_j-1)\bar{T}}^{(k_j-1+l)\bar{T}} f(s)ds, & (k_j-1+l)\bar{T} \leq t < (k_j+l)\bar{T}, \\ & \qquad l=1,2,\cdots,k_{j+1}-k_j,\ j=1,\cdots,m-1 \\ W_2 - \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{i\bar{T}} f(s)ds, & i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T},\ i=k_m,\cdots,n-1 \\ W_2 - \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds, & n\bar{T} \leq t \leq T \end{cases} \tag{4}$$

と表される。在庫レベルの非負制約により、条件

$$\max\left\{ \int_0^{(k_1-1)\bar{T}} f(s)ds,\ \max_{j=1,\cdots,m-1} \left\{ \int_{(k_j-1)\bar{T}}^{(k_{j+1}-1)\bar{T}} f(s)ds \right\},\ \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds \right\} \leq W_2 \tag{5}$$

が満たされなければならない。このとき、期間 $[0,T]$ における倉庫2での累積在庫量 I_2^+ は

$$\begin{aligned} I_2^+ &= \sum_{i=0}^{k_1-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}} \left\{ W_2 - \int_0^{i\bar{T}} f(s)ds \right\} dt + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{k_{j+1}-k_j} \int_{(k_j-1+l)\bar{T}}^{(k_j+l)\bar{T}} \left\{ W_2 - \int_{(k_j-1)\bar{T}}^{(k_j-1+l)\bar{T}} f(s)ds \right\} dt \\ &\quad + \sum_{i=k_m}^{n-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}} \left\{ W_2 - \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{i\bar{T}} f(s)ds \right\} dt + \int_{n\bar{T}}^{T} \left\{ W_2 - \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds \right\} dt \\ &= W_2 T - \sum_{i=1}^{k_1-1} \bar{T} \int_0^{i\bar{T}} f(s)ds - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{k_{j+1}-k_j} \bar{T} \int_{(k_j-1)\bar{T}}^{(k_j-1+l)\bar{T}} f(s)ds - \sum_{i=k_m}^{n-1} \bar{T} \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{i\bar{T}} f(s)ds \\ &\quad -(T-n\bar{T}) \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds \end{aligned} \tag{6}$$

である。

倉庫3では、期首に在庫レベルが最大許容量 W_3 に達するまで補充される。倉庫3に保持されている製品は連続的な時刻における需要により消費される。また、離散的な時刻 $i\bar{T},\ i=1,\ldots,n$ には倉庫2から補充があり、在庫レベルは最大許容量 W_3 にまで戻る。これらの状況から時刻 t における倉庫3の在庫レベル $I_3(t)$ は

$$I_3(t) = \begin{cases} W_3 - \int_{i\bar{T}}^{t} f(s)ds, & i\bar{T} \leq t < i+1\bar{T},\ i=0,1,\cdots,n-1 \\ W_3 - \int_{n\bar{T}}^{t} f(s)ds, & n\bar{T} \leq t \leq T \end{cases} \tag{7}$$

で表される。在庫レベルの非負制約により、条件

$$\int_{(n-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds \leq W_3 \tag{8}$$

が満たされなければならない。このとき、期間 $[0,T]$ における倉庫3での累積在庫量 I_3^+ は

$$\begin{aligned} I_3^+ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}} \left\{ W_3 - \int_{i\bar{T}}^{t} f(s)ds \right\} dt + \int_{n\bar{T}}^{T} \left\{ W_3 - \int_{n\bar{T}}^{t} f(s)ds \right\} dt \\ &= W_3 T - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}} \left\{ (i+1)\bar{T} - s \right\} f(s)ds - \int_{n\bar{T}}^{T} (T-s) f(s)ds \end{aligned} \tag{9}$$

である。

次にこの在庫管理問題における期間 $[0,T]$ での期平均総費用を求める。$\mathbf{x}$ を倉庫1から倉庫2への補充時刻の係数の列とする。すなわち $\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ である。このとき、期平均総費用 $TC(\mathbf{x}, \bar{T}; m, n)$ は

$$TC(\mathbf{x}, \bar{T}; m, n) = \frac{1}{T} \left\{ r_1 m + r_2 n + h_1 I_1^+ + h_2 I_2^+ + h_3 I_3^+ \right\} \tag{10}$$

となる。ここで、I_1^+, I_2^+, I_3^+ はそれぞれ (3), (6), (9) 式で与えられる。

よって我々の扱う最適化問題は

$$\begin{aligned} & TC(\mathbf{x}, \bar{T}; m, n) \rightarrow \min \\ s.t. \quad & \int_0^{(k_m-1)\bar{T}} f(s)ds \leq W_1 \\ & \max \left\{ \int_0^{(k_1-1)\bar{T}} f(s)ds, \max_{j=1,\cdots,m-1} \left\{ \int_{(k_j-1)\bar{T}}^{(k_{j+1}-1)\bar{T}} f(s)ds \right\}, \int_{(k_m-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds \right\} \leq W_2 \\ & \int_{(n-1)\bar{T}}^{n\bar{T}} f(s)ds \leq W_3 \end{aligned}$$

である。

もし固定された m, n に対して補充政策 $\mathbf{x}$ が与えられているならば、1変数 $\bar{T}$ についての最適化として解くことになる。実際、累積在庫量 (3), (6), (9) には積分の計算が含まれているため、この値が $\bar{T}$ についての1次あるいは2次多項式程度になるのであれば、この問題は簡単に解ける。

4 需要率が一定の場合

この節では、需要率が一定（$f(t) = a$）である特別な場合について考える。このとき、(3), (6), (9) 式はそれぞれ

$$I_1^+ = W_1 T - a(k_m - 1)\bar{T}T - \sum_{i=1}^{m-1} a k_i (k_{i+1} - k_i)\bar{T}^2 + (k_m^2 - k_1) a \bar{T}^2 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} I_2^+ &= W_2 T - \frac{a}{2} k_1 (k_1 - 1)\bar{T}^2 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a}{2} (k_{i+1} - k_i)(k_{i+1} - k_i + 1)\bar{T}^2 \\ & \quad + \frac{a}{2} n(n+1)\bar{T}^2 - \frac{a}{2}(k_m - 1)k_m \bar{T}^2 - a(n - k_m + 1)\bar{T}T \end{aligned} \tag{12}$$

$$I_3^+ = W_3 T - \frac{a}{2} n(n+1)\bar{T}^2 - \frac{a}{2} T^2 + an\bar{T}T \tag{13}$$

と書き換えられる。

$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$とする。また$\mathbf{x}^0$を補充政策$\mathbf{x}$の第$m$番目の成分のみを$k_m^0 = k_m - 1$で置き換えることにより生成される補充政策とする。すなわち$\mathbf{x}^0 = \{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m^0\}$である。補充政策$\mathbf{x}$および$\mathbf{x}^0$により定められる在庫レベルの推移はともに非負制約を満たしているものとする。このとき、補充政策$\mathbf{x}$を$\mathbf{x}^0$で置き換える、すなわち最後の補充時刻を時間$\bar{T}$だけ早めると、費用が

$$TC(\mathbf{x}, \bar{T}; m, n) - TC(\mathbf{x}^0, \bar{T}; m, n) = \frac{a\bar{T}}{T}(h_2 - h_1)[T - (2k_m - k_{m-1} - 1)\bar{T}] \tag{14}$$

だけ削減できることがわかる。同様に、補充政策$\mathbf{x}$の代わりに補充政策$\mathbf{x}^1 = \{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m^1\}$を適用すると、(15)式で与えられる費用を削減することができる。ここで、$k_m^1 = k_m + 1$とする。

$$TC(\mathbf{x}, \bar{T}; m, n) - TC(\mathbf{x}^1, \bar{T}; m, n) = \frac{a\bar{T}}{T}(h_2 - h_1)[-T + (2k_m - k_{m-1} + 1)\bar{T}] \tag{15}$$

また、任意の補充政策$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$において第$j$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$番目の成分のみを$k_j^\# = k_j - 1$あるいは$k_j^\# = k_j + 1$により置き換えることにより生成される補充政策$\mathbf{x}^\# = \{k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j^\#, k_{j+1}, \ldots, k_m\}$についても同様の計算を行うと、次の結果が得られる。

補題 1. $\mathbf{x}^* = \{k_1, k_2, \ldots, k_{j-1}, k_j^*, k_{j+1}, \ldots, k_m\}$を任意の補充政策$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$の第$j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$番目の成分のみを$k_j^* = k_j - 1$あるいは$k_j^* = k_j + 1$により置き換えることにより生成される補充政策とする。ここで、政策$\mathbf{x}$および$\mathbf{x}^*$により定められた在庫レベルの推移はともに非負制約を満たしているものとする。このとき、総費用を削減するためには、倉庫1から倉庫2への補充において以下のように補充政策を改良すべきである。

(i) $k_1 - 1 \geq k_2 - k_1$を満たすならば、第1番目の補充時刻$k_1\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(ii) $k_1 - 1 \leq k_2 - k_1$かつ$k_1 \neq 2$を満たすならば、第1番目の補充時刻$k_1\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

(iii) 任意のj $(j = 2, \ldots, m-1)$に対して$k_j - k_{j-1} \geq k_{j+1} - k_j$を満たすならば、第$j$番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(iv) 任意のj $(j = 2, \ldots, m-1)$に対して$k_j - k_{j-1} \leq k_{j+1} - k_j$を満たすならば、第$j$番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

(v) $(k_m - k_{m-1} + 1)\bar{T} > T - k_m\bar{T}$かつ$k_m \neq n$を満たすならば、第$m$番目の補充時刻$k_m\bar{T}$を$\bar{T}$だけ遅らせる。

(vi) $(k_m - k_{m-1} - 1)\bar{T} < T - k_m\bar{T}$を満たすならば、第$j$番目の補充時刻$k_j\bar{T}$を$\bar{T}$だけ早める。

補題1の(i)-(vi)の操作を適切な回数だけ反復することにより、次の結果が得られる。

系 1. l_1, l_2を$1 < l_1 < l_2 < m$である任意の整数とする。このとき、総費用を削減するためには、倉庫1から倉庫2への補充において以下のように補充政策を改良すべきである。

(i) $W_2 - a(k_{l_1} - k_{l_1-1})\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_{l_2+1} \neq k_{l_2} + 1$, $k_{l_2+1} - k_{l_2} \leq k_{l_1} - k_{l_1-1}$を満たすならば、連続した補充時刻$k_{l_1}\bar{T}, \ldots, k_{l_2}\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ遅らせる。

(ii) $W_2 - a(k_{l_2+1} - k_{l_2})\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_{l_1-1} \neq k_{l_1} - 1$, $k_{l_2+1} - k_{l_2} \geq k_{l_1} - k_{l_1-1}$を満たすならば、連続した補充時刻$k_{l_1}\bar{T}, \ldots, k_{l_2}\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ早める。

(iii) $W_2 - a(k_1 - 1)\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_{l_2+1} \neq k_{l_2} + 1$, $k_{l_2+1} - k_{l_2} \leq k_1 - 1$を満たすならば、連続した補充時刻$k_1\bar{T}, \ldots, k_{l_2}\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ遅らせる。

(iv) $W_2 - a(k_{l_2+1} - k_{l_2})\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_1 \neq 2$, $k_{l_2+1} - k_{l_2} \geq k_1 - 1$を満たすならば、連続した補充時刻$k_1\bar{T}, \ldots, k_{l_2}\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ早める。

(v) $W_2 - a(k_{l_1} - k_{l_1-1})\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_m \neq n$, $(k_{l_1} - k_{l_1-1} + 1)\bar{T} > T - k_m\bar{T}$を満たすならば、連続した補充時刻$k_{l_1}\bar{T}, \ldots, k_m\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ遅らせる。

(vi) $W_2 - a(n - k_m + 1)\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_{l_1-1} \neq k_{l_1} - 1$, $(k_{l_1} - k_{l_1-1} - 1)\bar{T} < T - k_m\bar{T}$を満たすならば、連続した補充時刻$k_{l_1}\bar{T}, \ldots, k_m\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ早める。

(vii) $W_2 - a(k_1 - 1)\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_m \neq n$, $k_1\bar{T} > T - k_m\bar{T}$を満たすならば、連続した補充時刻$k_1\bar{T}, \ldots, k_m\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ遅らせる。

(viii) $W_2 - a(n - k_m + 1)\bar{T} \geq a\bar{T}$, $k_1 \neq 2$, $(k_1 - 2)\bar{T} < T - k_m\bar{T}$を満たすならば、連続した補充時刻$k_1\bar{T}, \ldots, k_m\bar{T}$をそれぞれ$\bar{T}$だけ早める。

補題1および系1は、固定されたmに対して最適補充政策を得るためには、在庫レベルが非負制約を満たしている条件のもとでできる限り低くなる回数を増やすべきであることを示している。倉庫1から倉庫2への補充時刻を表す政策$\mathbf{x} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$の最適化については次のような手順を用いればよりよい解が求まる。

Step 1. まず在庫レベルの非負制約条件を満たす初期政策$\mathbf{x}_0$を求める。

Step 2. 補充政策$\mathbf{x}_i$において系1の(i)〜(viii)のいずれか1つを適用する。もしいずれも適用できなければ、停止する。

Step 3. $i = i + 1$とし、Step 2へ戻る。

5 最後に

本研究では販売するまでに3つの倉庫を経由する在庫管理問題についての在庫レベルの推移について調べた。販売に直結している倉庫では一定の補充間隔により補充が行われるという仮定の下で、販売に直結していない倉庫において任意の時刻での補充を許すと、これだけでもかなり複雑な解になることがわかった。本研究発表の中では補充回数m, nを定数として扱っているが、本来はこれらも決定変数として扱うできである。m, nの数を減らす方法についての研究は今後の課題である。また、需要率が一定である特別な場合における補充政策の決定において別のアプローチを試みてみたい。

参考文献

[1] L.C.Barbosa and M.Friedman (1978) *Deterministic inventory lot-size models - a general root low*, Management Science, Vol.24, No.8, 819-826.

[2] W.A.Donaldson (1977) *Inventory replenishment policy for a linear trend in demand — an analytical solution*, Operational Research Quarterly, Vol.28, No.3, 663-670.

[3] A.Goswami and K.S.Chaudhuri (1992) *An economic order quantity model for items with two levels of storage for a linear trend in demand*, J. of the Operational Research Society, Vol.43, No.2, 157-167.

[4] M.A.Hariga (1993) *The inventory replenishment problem with a linear trend in demand*, Compt. & I.E., Vol.24, 143-150.

[5] R.J.Henery (1979) *Inventory replenishment policy for increasing demand*, J. of the Operational Research Society, Vol.30, No.7, 611-617.

[6] D.P.Heyman, M.J.Sobel (1990) *Stochastic Models, Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2*, Elsevier Science Publishers, North-Holland.

[7] R.I.Phelps (1980) *Optimal inventory rule for a linear trend in demand with a constant replenishment period*, J. of the Operational Research Society, Vol.31, 439-442.

[8] K.V.S.Sarma (1983) *A deterministic inventory model with two levels of storage and an optimum release rule*, Opsearch, Vol.20, 175-180.

[9] E.A.Silver and H.C.Meal (1973) *A heuristic for selecting lot size quantities for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment*, Prod. Invent. Mgmt, Vol.14, 64-74.

[10] E.A.Silver (1979) *A simple inventory replenishment decision rule for a linear trend in demand*, Journal of the Operational Research Society, Vol.30, No.1, 71-75.

[11] J.T.Teng (1996) *A deterministic inventory replenishment model with a linear trend in demand*, Operations Research Letters, Vol.19, 33-41.

[12] H.M.Wagner and T.M.Whitin (1958) *Dynamic version of the economic lot size model*, Management Science, Vol.5, 89-96.

[13] 児玉正憲 (1996) 『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会.