数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 119-125

ファジィ値写像の凸性とファジィ最適化問題

雨宮 将人 (Masato Amemiya), 高橋 渉 (Wataru Takahashi)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology
東京工業大学 大学院情報理工学研究科

1. はじめに

ファジィ数の概念は，Dubois と Prade [4] により導入され，曖昧さを許容したシステムの記述を可能にし，より柔軟な意思決定や政策立案を実現するのに適しているファジィ概念である．実際この応用例の 1 つとして最適化問題への利用が考えられ，Dubois-Prade [5] を初め，Ramík-Římánek [9]，Campos-Verdegay [3]，Ramík-Rommelfanger [10, 11] などでは，主として線形計画問題からの類推で (第 5 節を参照) 上の問題が議論された．

本稿では，ファジィ数に値をとる写像に関してその凸性と最適化問題とを，主として凸解析の立場から論文 [1] の概要を述べることで大観する．更に，本稿の最後において，簡単なファジィ最適化問題を考察する．

2. 準備

以下では，全ての線形空間は real であるとし，$\mathbb{R}$ は実数空間を表すものとする．また C, D が線形位相空間の部分集合であるとき，$C+D=\{c+d : c \in C, d \in D\}$ と定め，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$\lambda C=\{\lambda c : c \in C\}$ と定める．さらに $\mathrm{cl}C$ は C の閉包を表すものとする．

X を空でない集合とする．このとき，X におけるファジィ集合とは，X から $[0,1]$ への関数である．

A を $\mathbb{R}$ におけるファジィ集合とする．このとき，各 $r \in [0,1]$ に対し，A の r-level 集合を A_r で表し，つぎのように定義する:

$$\text{任意の } r \in (0,1] \text{ に対し，} A_r=\{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq r\};$$
$$r=0 \text{ に対し，} A_0=\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} : A(x)>0\}.$$

このとき，A が凸であるとは，全ての $r \in (0,1]$ に対し，A_r が凸であるときと定める．

A, B を $\mathbb{R}$ におけるファジィ集合とし，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．このとき，2 項演算 $A \oplus B$ と λA をつぎのように定める:

$$(A \oplus B)(z)=\sup_{z=x+y, x, y \in \mathbb{R}} \min(A(x), B(y)) \ (\forall z \in \mathbb{R}),$$
$$(\lambda A)(z)=\sup_{z=xy, x, y \in \mathbb{R}} \min(\mathbf{1}_\lambda, A(y)) \ (\forall z \in \mathbb{R}).$$

ただし，$\mathbf{1}_K$ は集合 K の特性関数を表す．

A を $\mathbb{R}$ におけるファジィ集合とする．このとき，A がファジィ数であるとは，以下の条件を満たすときをいう ([4, 6]):

(1) A が凸;

(2) $A(m)=1$ を満たす $m\in\mathbb{R}$ が唯 1 つ存在する;

(3) A_0 が $\mathbb{R}$ の有界集合である.

以下では, $\mathcal{F}$ はファジィ数全体からなる集合を表すことにする. このとき, 任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ に対し, $\mathbf{1}_\lambda\in\mathcal{F}$ である.

$A,B\in\mathcal{F}$ とする. このとき, $\mathcal{F}$ において半順序関係 $\preceq$ をつぎのように定義する ([9]):

$$A\preceq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{全ての } r\in[0,1] \text{ に対し, } \sup A_r\le\sup B_r \text{ かつ } \inf A_r\le\inf B_r.$$

$A\in\mathcal{F}$ とし, $\lambda\in\mathbb{R}$ とする. 表現の便宜上, 以下では $A\preceq\mathbf{1}_{\{\lambda\}}$ および $A\oplus\mathbf{1}_{\{\lambda\}}$ をそれぞれ $A\preceq\lambda$ および $A\oplus\lambda$ と書くことにする.

C を線形空間の凸集合とし, f を C 上の実数値関数とする. このとき, f が凸であるとは, 任意の $x,y\in C$ と任意の $\lambda\in(0,1)$ に対し,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

が常に成り立つときをいう. また, f が凹であるとは, $-f$ が凸であるときをいう. さらに f が quasi-concave であるとは, 任意の $c\in\mathbb{R}$ に対し, 集合 $\{x\in C: f(x)\ge c\}$ が C の凸集合であるときと定める. C,I をある集合とし, φ を $C\times I$ 上の実数値関数とする. このとき, φ が第 2 変数に関し concavelike であるとは, 任意の $y_1,y_2\in I$ と任意の $\lambda\in(0,1)$ に対し, $y_0\in I$ が存在して, 全ての $x\in C$ に対し,

$$\varphi(x,y_0)\ge\lambda\varphi(x,y_1)+(1-\lambda)\varphi(x,y_2)$$

を満たすときをいう.

3. ファジィ数値写像の凸性

X を空でない集合とする. このとき X から $\mathcal{F}$ への写像, すなわち X で定義され, ファジィ数に値をとる写像を X 上のファジィ数値写像という. C を線形空間の凸集合とし, F を C 上のファジィ数値写像とする. このとき, F が凸であるとは, 任意の $x,y\in C$ と任意の $\lambda\in(0,1)$ に対し,

$$F(\lambda x+(1-\lambda)y)\preceq\lambda F(x)\oplus(1-\lambda)F(y).$$

が常に成り立つときをいう.

この節では, ファジィ数値写像の凸性を [1] で示した結果を参照しながら述べることにする. 簡潔を期して定理等は述べるだけにとどめ, 証明は [1] を参照していただくことにしたい.

まずはじめに, つぎの実数値関数を導入する:

F をある集合 X 上のファジィ数値写像とする. このとき, 任意の $r\in[0,1]$ に対し, それぞれつぎで定められる X 上の実数値関数 f_r^F および g_r^F を考える:

各 $x\in X$ に対し,

$$f_r^F(x)\overset{\text{def}}{=}\sup\,[F(x)]_r\,,\quad g_r^F(x)\overset{\text{def}}{=}\inf\,[F(x)]_r\,.$$

ただし, $[F(x)]_r$ は $F(x)\in\mathcal{F}$ の r-level 集合を表す.

[1] では，この関数に注目してファジィ数値写像の凸性を特徴付けるつぎの定理を証明した．

定理 3.1 ([1]). C を線形空間の凸集合とし，F を C 上のファジィ数値写像とする．このとき，F が凸ならば，任意の $r \in [0,1]$ に対し，f_r は凸である．

定理 3.2 ([1]). C を線形空間の凸集合とし，F を C 上のファジィ数値写像とする．このとき，F が凸ならば，任意の $r \in [0,1]$ に対し，g_r は凸である．

定理 3.3 ([1]). C を線形空間の凸集合とし，F を C 上のファジィ数値写像とする．このとき，任意の $r \in [0,1]$ に対し，f_r と g_r がともに凸ならば，F は凸である．

つまり，ファジィ数値写像 F に対しその凸性の特徴付けがつぎのようになされたことになる:

F が凸 $\Longleftrightarrow$ 任意の $r \in [0,1]$ に対し，f_r^F および g_r^F がともに凸.

4. L-R ファジィ数とファジィ数値写像の凸性

この節では，[9] において導入された L-R ファジィ数の概念を用いて，ファジィ数値写像の凸性を議論する．この概念は，ファジィ数間の演算や順序関係の計算の手間を軽減し，議論を簡略化することなどで，実用面での有用性が認められている概念である．

S を $\mathbb{R}$ から $(-\infty,1]$ への関数とする．このとき，S が型関数であるとは，つぎを満たすときをいう:

(1) S は quasi-concave である;

(2) $S(x)=1 \Longleftrightarrow x=0$;

(3) 集合 $\{x \in \mathbb{R} : S(x)>0\}$ が $\mathbb{R}$ の有界集合;

(4) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し, $S(x)=S(-x)$.

S,T を型関数とし，$m \in \mathbb{R}$，$\alpha,\beta \geq 0$ とする．このとき，L-R ファジィ数 μ とは，つぎで定められるファジィ数である:

$$\mu(x)=\begin{cases} \max\left(S(\frac{x-m}{\alpha}),0\right), & \forall x \leq m, \\ \max\left(T(\frac{x-m}{\beta}),0\right), & \forall x \geq m \end{cases}$$

このとき，μ は型関数 S と T で生成されるという．さらに，この L-R ファジィ数 μ を

$$\mu=(m,\alpha,\beta)_{L_S R_T}$$

のように表す．

註: 上の定義において例えば $\alpha=0$ かつ $\beta>0$ のような場合は，

$$\mu(x)=\begin{cases} 0, & \forall x < m, \\ \max\left(T(\frac{x-m}{\beta}),0\right), & \forall x \geq m. \end{cases}$$

と定める．さらに，$\alpha,\beta=0$ のときは，$\mu=1_{\{m\}}$ と定める．

定理 3.3 を用いると，同一の型関数で生成された L-R ファジィ数に値をとるファジィ数値写像の凸性に関し，つぎが示される．

定理 4.1 ([1]). C を線形空間の凸集合，m を C 上の実数値関数とし，$\alpha, \beta : C \to [0, +\infty)$ を関数とし，$S, T : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$ を型関数とする．F を，任意の $x \in C$ に対し，

$$F(x) = (m(x), \alpha(x), \beta(x))_{L_S R_T}$$

で定義される C 上のファジィ数値写像とする．このとき，m と β が凸であり，α が凹であるならば，F は凸である．

5. ファジィ数値写像に関する最小値定理

この節では，ファジィ数値写像に対し，最小化問題を議論する．その前に，ファジィ数で制約条件が記述されたファジィ最適化問題を簡単に説明することにしよう．

$X = \mathbb{R}^n$，$E = \mathbb{R}^n_+ = [0, +\infty)^n \subset X$，$C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{F}$ とし，F を各 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ に対し，

$$F(x) = x_1 C_1 \oplus x_2 C_2 \oplus \cdots \oplus x_n C_n$$

で定められる E 上のファジィ数値写像とする．また，任意の $i = 1, 2, \ldots, m$ と任意の $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$A_{ij} \in \mathcal{F}$ とし，$G_1, G_2, \ldots, G_m$ を各 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ と各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し

$$G_i(x) = x_1 A_{i1} \oplus x_2 A_{i2} \oplus \cdots \oplus x_n A_{in}$$

で定められる E 上のファジィ数値写像とし，

$$E_0 = \{x \in E : G_1(x) \preceq b_1, G_2(x) \preceq b_2, \ldots, G_m(x) \preceq b_m\},$$

とする．ここで，$b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ である．このとき，つぎのようなファジィ最適化問題が立つ:

全ての $x \in E_0$ に対し，$F(x_0) \preceq F(x)$ を満たす $x_0 \in E_0$ を求めよ．

上の設定で注目すべきは，F と G_i の定義にファジィ数を用いたところである．これは，通常の線形計画問題の form においては，目的関数と制約関数の係数に相当し，具体的な生産計画では，生産の単位に当たるところである．周知のように，この係数の決定は計画の立案において肝心であるが，同時に，例えば何らかの不測の事態が生じた際はその値の実現が困難なものである．ファジィ数はそこで，これらの係数に替わるものとしてその採用が考えられるようになり，理論的には上述のように定式化されるファジィ最適化問題を起こしたのである．

さて，上のような問題は，L-R ファジィ数などの有力な概念を用いることにより，これを通常の線形計画の form に帰着できることが分かっており，研究が進んでいるが (例えば，[3, 5, 9] を参照)，いっぽう凸問題 (convex problems) からの類推で定式化される問題 (以下述べる) については，現段階ではあまり研究が進んでいるとはいえない．これを踏まえて，著者は，[1] において，この問題の解の存在に関連する定理を証明した．本節では，それらからいくつか選んで述べることにする．その前に，凸解析的見地からファジィ最適化問題を定式化しておこう．

　C を線形空間の凸集合，F を C 上の凸ファジィ数値写像とする．このとき，
　全ての $x \in C$ に対し，$F(x_0) \preceq F(x)$ を満たす $x_0 \in C$ を求めよ．

いま，C 上の実数値関数からなる族 $\mathcal{P}^F$ を

$$\mathcal{P}^F = \{f_r^F, g_r^F : r \in [0,1]\}$$

により定めると，上の問題は，半順序関係 $\preceq$ の定義から，$\mathcal{P}^F$ の元に対する共通の最適解 $x_0 \in C$ を求めるつぎのような問題に帰着できることが分かる:

　全ての $h \in \mathcal{P}^F$ と全ての $x \in C$ に対し，$h(x_0) \leq h(x)$ を満たす $x_0 \in C$ を求めよ．

[1] では，上の事実を踏まえた議論を行なった．なお，4 節の結果から上の h は全て凸となることに注意する．

定理を述べる前に，ファジィ数値写像に対して下半連続性を定義しよう．

F を位相空間 X 上のファジィ数値写像とする．このとき，F が下半連続であるとは，任意の $r \in [0,1]$ に対し，f_r^F と g_r^F がともに下半連続であるときをいう．

L-R ファジィ数を用いると，ファジィ数値写像の下半連続性に関し，つぎが示される．

定理 5.1 ([1]). C を線形空間の凸集合，m を C 上の実数値関数とし，$\alpha, \beta : C \to [0, +\infty)$ を関数とし，$S, T : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$ を型関数とする．F を，任意の $x \in C$ に対し，

$$F(x) = (m(x), \alpha(x), \beta(x))_{L_S R_T}$$

で定義される C 上のファジィ数値写像とする．このとき，m と β が下半連続であり，α が上半連続であるならば，F は下半連続である．

今や，上述の最適化問題の解の存在に関連するつぎの最小値定理を示すことができる．

定理 5.2. C を線形空間の compact な凸集合，F を C 上の下半連続なファジィ数値写像とする．また，$\varphi : C \times \mathcal{P}^F \to \mathbb{R}$ を各 $(x,h) \in C \times \mathcal{P}^F$ に対し，$\varphi(x,h) = h(x) - \min_{u \in C} h(u)$ で定められる実数値関数とする．このとき，φ が第 *2* 変数に関して concavelike であるならば，$x_0 \in C$ が存在して，全ての $x \in C$ に対し，$F(x_0) \preceq F(x)$ を満たす．

6. ファジィ最適化問題の例

本節では前節までの結果を用いて，ファジィ最適化問題の簡単な例を考察する．比較のため，まず通常の問題から議論しよう．

$X = \mathbb{R}^2$，$E = \mathbb{R}^2_+ \subset X$ とする．また，$f : E \to \mathbb{R}$ を，各 $x = (x_1, x_2) \in E$ に対し，つぎで定められる E 上の実数値関数とする．

$$f(x) = (x_1 - 4)x_1 + (x_2 - 16)x_2.$$

さらに

$$E_1 = \{x \in E : 3x_1 + 4x_2 \leq 16, 2x_1 + x_2 \leq 9\}$$

とする．ここでつぎの (nonfuzzy) 最適化問題:

　全ての $x \in E_0$ に対し，$f(x_0) \leq f(x)$ を満たす $x_0 \in E_0$ を求めよ

を考えると，この最適解 x_0 と対応する f の値はそれぞれ,

$$x_0 = (0.8, 3.6),\ f(x_0) = -25$$

である.

一方，この問題に関連してつぎのようなファジィ最適化問題を考えることができる.

$S : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$ を $\sup\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = 1$ を満たす型関数とし，$A_{ij} \in \mathcal{F}$ をそれぞれつぎのように定められる L-R ファジィ数とする:

$A_{11} = (3,1,0)_{L_S R_S}$, $A_{12} = (4,3,0)_{L_S R_S}$,

$A_{21} = (2,0,0.7)_{L_S R_S}$, $A_{22} = (1,0,2.6)_{L_S R_S}$.

また $\alpha, \beta \geq 0$ とし，F を各 $x = (x_1, x_2 \in E$ に対し,

$$F(x) = (f(x), \alpha, \beta)_{L_S R_S}$$

で定められる E 上のファジィ数値写像とする．さらに,

$$E_2 = \{x \in E : x_1 A_{11} \oplus x_2 A_{12} \preceq 16, x_1 A_{21} \oplus x_2 A_{22} \preceq 9\}$$

とする．このとき，つぎのようなファジィ最適化問題:

全ての $x \in E_0$ に対し，$F(x_0^*) \preceq F(x)$ を満たす $x_0^* \in E_0$ を求めよ.

を考えると，この最適解 x_0^* と対応する F の値はそれぞれ,

$$x_0^* = (0.08, 2.44),\ F(x_0^*) = (-18.76, \alpha, \beta)_{L_S R_S}$$

と求められる.

References

[1] M. Amemiya and W. Takahashi, *Convexity of fuzzy-valued maps and minimization theorems*, Sci. Math. Japonicae, **56** (2002), 21-31.

[2] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria*, (Springer, Berlin, 1993.)

[3] L. Campos and J. L. Verdegay, *Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, **32** (1989), 1-11.

[4] D. Dubois and H. Prade, *Operations on fuzzy numbers* Int. J. Systems Sci., **9** (1978), 613-626.

[5] D. Dubois and H. Prade, *Systems of linear fuzzy constraints*, Fuzzy Sets and Systems, **3** (1980), 37-48.

[6] N. Furukawa, *Convexity and locally Lipschitz continuity of fuzzy-valued mappings*, Fuzzy Sets and Systems, **93** (1998), 113-119.

[7] S. Nanda and K. Kar, *Convex fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems, **48** (1992), 129-132.

[8] H. T. Nguyen, *A note on the extension principle for fuzzy sets*, J. Math. Anal. Appl., **64** (1978), 369-380.

[9] J. Ramík and J. Římánek, *Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization*, Fuzzy Sets and Systems, **16** (1985), 123-138.

[10] J. Ramík and H. Rommelfanger, *A single- and a multi-valued order on fuzzy numbers and its use in linear programming with fuzzy coefficients*, Fuzzy Sets and Systems, **57** (1993), 203-208.

[11] J. Ramík and H. Rommelfanger, *Fuzzy mathematical programming based on some new inequality relations*, Fuzzy Sets and Systems, **81** (1996), 77-87.

[12] W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, J. Math. Soc. Japan., **28** (1976), 168-181.

[13] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, **8** (1965), 338-353.

[14] L. A. Zadeh, *The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, (I);(II);(III)*, Information Science, **8** (1975), 199-249;**8** (1975), 301-357;**9** (1975), 43-80.

Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Ohokayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan
E-mail: amemiya@is.titech.ac.jp

Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Ohokayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan
E-mail: wataru@is.titech.ac.jp