数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 184-193

ファジィ微分方程式の数値解析と可視化

Numerical Investigation and Visualization of Fuzzy Differential Equations

産業技術短期大学教授電気電子工学科　里見憲男
(Norio SATOMI, Electrical and Electronic Engineering, College of Industrial Technology)
大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻　齋藤誠慈
(Seiji SAITO, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University)
大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻　石井博昭
(Hiroaki ISHII, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University)

Abstract: In this paper, we investigate initial value problems of a fuzzy differential equation, where initial values and model parameters in the equation are described by fuzzy numbers, by numerical methods. By the couple parametric representation of fuzzy numbers, the temporal evolution of a system can be described by two ordinary differential equations with the endpoints, $x_1(t,\alpha)$ and $x_2(t,\alpha)$, of the α-cut set of $x=(x_1,x_2)$ at time t. It was found that fuzzy differential equations enlarge its fuzziness of the system as time increases. Although the center of the fuzzy number for the decaying system described shows the exponential decay, other fuzzy numbers show asymptotic behaviors with $x_1(t,\alpha)\to-\infty$ and $x_2(t,\alpha)\to+\infty$ as $t\to+\infty$ for $\alpha\neq 1$. Our calculated results agree well with the previous analytical investigations of the fuzzy differential equation.

Key words: fuzzy differential equation, fuzzy number, parametric representation

1.　はじめに

ファジィ理論は，カリフォルニア大学の L.A. Zadeh[1] が 1965 年に「ファジィ集合」の基本概念を提案したことに始まる．その後，あいまいなものの存在を始めから認めて出発する新しい理論であるファジィ研究は世界的な広がりを見せ，その理論的な研究にとどまることなく制御や OR などの分野をはじめ広範な分野の工学的応用や産業界での実用化が急速に進展した．そして，今日では人間科学，社会科学などのソフトサイエンスの分野にも広く応用されるようになっている[2)-4)]．

一方，ファジィ数理解析的な研究においても，ファジィ数，ファジィ関数の微分や積分，ファジィ微分方程式等に関しての広範な研究が行われ，現在までに多くの研究成果が蓄積されてきた[5)-11)]．ファジィ数とは「だいたい５」を表すファジィ概念で，システムの記述にかかわるパラメータや関数および方程式等のファジィ化には「ファジィ数」が利用される．例えば，問題とするシステムをモデル化するとしばしば微分方程式となるが，その微分方程式の構造が厳密に分かっていても，方程式の係数や初期値または境界値等が曖昧な場合がある．これらの曖昧な量をファジィ数として扱い，その微分方程式にファジィ概念を導入したものがファジィ微分方程式である．ファジィ微分方程式の解の存在

条件，解の一意性，安定性等においても既に多くの研究が行われてきている[12)-15)]．しかし，ファジィ微分方程式の具体的な応用については，その研究がほとんど行われていないのが現状である．

本研究では，ファジィ微分方程式の具体的な応用研究として，指数減衰モデルに対する初期値問題の数値解を求め，その解の挙動を調べた．

2．ファジィ数のパラメータ表示と可視化

本論文では，ファジィ微分方程式の表現にJr.R. Goetchel と W. Voxman[5),6)]が導入したファジィ数のパラメータ表示を使用し，連立常微分方程式に帰着させる．後の議論の準備として，ここでファジィ数とパラメータ表示によるその可視化についてまとめておく．実数の集合と0以上1以下の有界閉区間をそれぞれ，$\mathcal{R}=(-\infty,+\infty)$，$I=[0,1]=\{\xi\in\mathcal{R}:0\le\xi\le1\}$とする．実数からなるファジィ集合であるファジィ数$x$は，その帰属度を表すメンバーシップ関数$\mu_x$と同一視され，以下の性質で特徴付けられる．

（i）（正規性）　$\mu_x(m)=1$をみたすセンター$m\in\mathcal{R}$が唯一つ存在する．

（ii）（有界サポート）サポート$\mathrm{supp}(\mu_x)$は有界である．

（iii）（狭義ファジィ凸性）　メンバーシップ関数μ_xは，サポート$\mathrm{supp}(\mu_x)$上で狭義ファジィ凸である．すなわち，$0<\lambda<1$および$\xi_1,\xi_2\in\mathcal{R}$に対し

$$\mu_x(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2)>\min[\mu_x(\xi_1),\mu_x(\xi_2)]\quad(\xi_1\ne\xi_2)$$

が成立する．

（iv）（上半連続）　任意の$\eta\in\mathcal{R}$に関して$\lim_{\xi\to\eta}\sup\mu_x(\xi)\le\mu_x(\eta)$が成立する．

ここで，$\mathrm{supp}(\mu_x)$はμ_xのサポートといい，帰属度が正となる集合の閉包である．その定義は$\mathrm{supp}(\mu_x)=\mathrm{cl}\{\xi\in\mathcal{R}:\mu_x(\xi)>0\}$である．以後，このようなサポートが有界なファジィ数の全体からなる集合を$\mathcal{F}_b^{st}$で表す．

次に，メンバーシップ関数$\mu_x\in\mathcal{F}_b^{st}$のアルファカット集合$L_\alpha(\mu_x)$を

$$L_\alpha(\mu_x)=\{\xi\in R:\mu_x(\xi)\ge\alpha\}\tag{1}$$

で定義し，その表現を利用してファジィ数を対

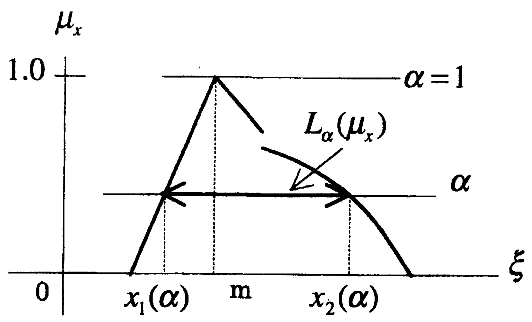

Fig. 1. Fuzzy number and its parametric representation with endpoints of α-cut set.

の関数として表現する．すなわち，**Fig. 1** に示したように，

$$x_1(\alpha)=\min L_\alpha(\mu_x)=\min x_\alpha\tag{2}$$

$$x_2(\alpha)=\max L_\alpha(\mu_x)=\max x_\alpha\tag{3}$$

とし，また

$$x_1(0)=\min\mathrm{cl}\,(\mathrm{supp}\,(\mu_x))\tag{4}$$

$$x_2(0)=\max\mathrm{cl}\,(\mathrm{supp}\,(\mu_x))\tag{5}$$

とする．メンバーシップ関数の定義により，アルファカット集合は常に有界な閉区間となる．その左端点，右端点をそれぞれ$x_1(\alpha)$，$x_2(\alpha)$として，$(x_1(\alpha),x_2(\alpha))$を2次元平面$\mathcal{R}^2$の点と見なすことができる．以後，ファジィ数$x\in\mathcal{F}_b^{st}$はパラメータ表示と同一視して，$x=(x_1,x_2)$とする．このようにして表現したファジィ数とそのメンバーシップ関数はこの$\mathcal{R}^2$上の有界連続曲線により可視化される．

3．拡張原理と二項演算

関数$g:\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$は Zadeh の拡張原理により$\mathcal{F}_b^{st}\times\mathcal{F}_b^{st}$へ拡張され，関数$g$のメンバーシップ関数は

$$\mu_{g=g(x,y)}(\xi)=\sup_{\xi=g(\xi_1,\xi_2)}\min(\mu_x(\xi_1),\mu_y(\xi_2))\tag{6}$$

となる．ただし，μ_x，μ_yはそれぞれx，yのメンバーシップ関数である．この拡張原理によると，ファジィ数x，yの加減乗除のメンバーシップ関数は

$$\mu_{x+y}(\xi)=\sup_{\xi=\xi_1+\xi_2}\min(\mu_x(\xi_1),\mu_y(\xi_2))\tag{7}$$

$$\mu_{x-y}(\xi) = \sup_{\xi=\xi_1-\xi_2} \min(\mu_x(\xi_1), \mu_y(\xi_2)) \tag{8}$$

$$\mu_{xy}(\xi) = \sup_{\xi=\xi_1\xi_2} \min(\mu_x(\xi_1), \mu_y(\xi_2)) \tag{9}$$

$$\mu_{x/y}(\xi) = \sup_{\xi_2\xi=\xi_1} \min(\mu_x(\xi_1), \mu_y(\xi_2)) \tag{10}$$

となる．

ファジィ数のパラメータ表示 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$ の加減法と乗法に関する演算規則をまとめると次のようになる．

（1）加法

$$\begin{aligned}\mu_{x+y}(\xi) &= \sup_{\xi=\xi_1+\xi_2} \min[\mu_x(\xi_1), \mu_y(\xi_2)] \\ &= \sup\{\alpha \in I : \xi=\xi_1+\xi_2,\ \xi_1 \in x_\alpha, \xi_2 \in y_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in I : x_1(\alpha)+y_1(\alpha) \le \xi \le x_2(\alpha)+y_2(\alpha)\}\end{aligned} \tag{11}$$

となり，和のパラメータ表示は，

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2) \tag{12}$$

となる．

（2）減法

$$\begin{aligned}\mu_{x-y}(\xi) &= \sup_{\xi=\xi_1-\xi_2} \min[\mu_x(\xi_1), \mu_y(\xi_2)] \\ &= \sup\{\alpha \in I : \xi=\xi_1-\xi_2,\ \xi_1 \in x_\alpha, \xi_2 \in y_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in I : x_1(\alpha)-y_2(\alpha) \le \xi \le x_2(\alpha)-y_1(\alpha)\}\end{aligned} \tag{13}$$

となり，差のパラメータ表示は，

$$x-y=(x_1-y_2, x_2-y_1) \tag{14}$$

となる．

（3）乗法

$$\begin{aligned}\mu_{xy}(\xi) &= \sup_{\xi=\xi_1\xi_2} \min[\mu_x(\xi_1), \mu_y(\xi_2)] \\ &= \sup\{\alpha \in I : \xi=\xi_1\xi_2,\ \xi_1 \in x_\alpha, \xi_2 \in y_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in I : x_i(\alpha)y_j(\alpha) \le \xi \le x_k(\alpha)y_l(\alpha)\}\end{aligned} \tag{15}$$

となる．ただし，$i,j,k,l=1,2$ である．乗法のパラメータ表示は

$$xy=\begin{cases}(x_1y_1, x_2y_2) & (0 \le x_1, 0 \le y_1) \\ (x_2y_1, x_2y_2) & (0 \le x_1, y_1 \le 0 \le y_2) \\ (x_2y_1, x_1y_2) & (0 \le x_1, y_2 \le 0) \\ (x_1y_2, x_2y_2) & (x_1 \le 0 \le x_2, 0 \le y_1) \\ (\min(x_2y_1, x_1y_2), & \\ \quad \min(x_1y_1, x_2y_2)) & (x_1 \le 0 \le x_2, y_1 \le 0 \le y_2) \\ (x_2y_1, x_1y_1) & (x_1 \le 0 \le x_2, y_2 \le 0) \\ (x_1y_2, x_2y_1) & (x_2 \le 0, 0 \le y_1) \\ (x_1y_2, x_1y_1) & (x_2 \le 0, y_1 \le 0 \le y_2) \\ (x_2y_2, x_1y_1) & (x_2 \le 0, y_2 \le 0)\end{cases} \tag{16}$$

となる．

次に，**Fig. 2** に示すような三角形型のメンバーシップ関数を使用し，ここで述べたパラメータ表示の演算規則により行った計算結果を **Fig. 3** に示す．計算結果のグラフ(a)は，演算結果のメンバーシップ関数である．例えば，積 xy のメンバーシップ関数のセンターは 6 で，x と y のセンターの２と３の積となっている．すなわち，「だいたい２」と「だいたい３」との積は「だいたい 6」である．ただし，そのメンバーシップ関数の形状は三角形から変形され，また曖昧さの大きさも増加している．特に，拡張原理による演算の特徴として，負の領域の曖昧さが拡大されている．下のグラフ(b)は，演算結果をパラメータ表示として $\mathcal{R}^2$ 平面上に示したものである．このグラフの破線は $x_2=x_1$ の直線である．ファジィ数では $x_2 \ge x_1$ であることから，全てのメンバーシップ関数の曲線はこの直線を境界とする上半平面に存在する．また，この直線上の点は $\alpha=1$ のファジィ数のセンターで，全ての曲線が一端をこの直線上の点とする有界連続曲線となっている．この曲線の長さはファジィ数の曖昧さの大きさの目安となる．演算の結果は曲線の長さが大きくなっており，ファジィ数の演算では演算の度に曖昧さが大きくなることがわかる．

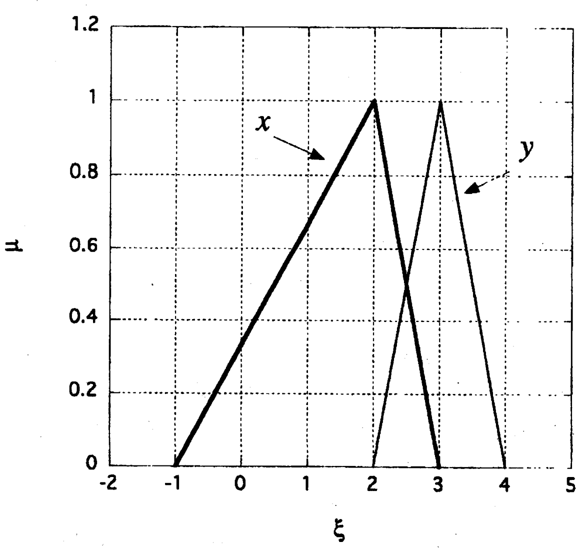

Fig. 2. Triangular membership functions.

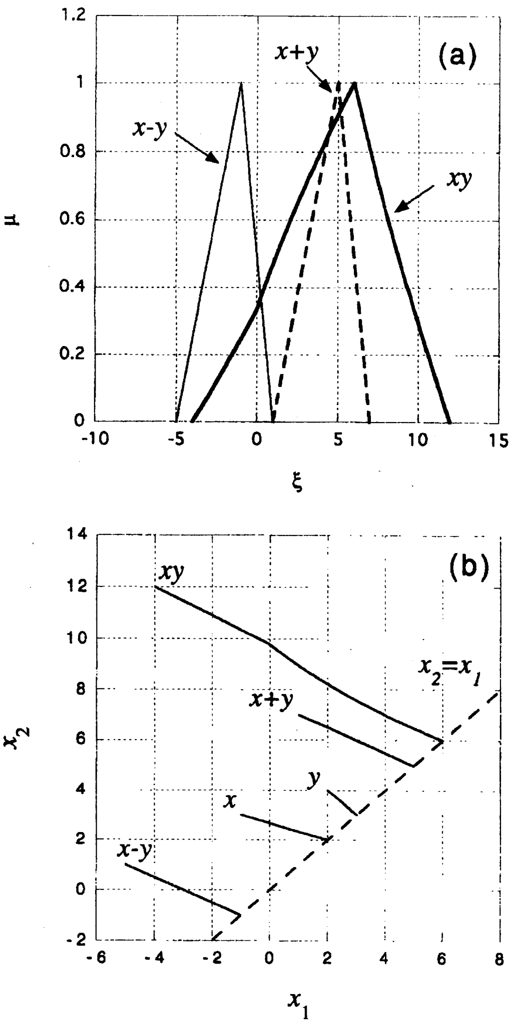

Fig. 3. Fuzzy number arithmetic.

4. ファジィ微分方程式

指数減衰モデルの代表例として，同位元素の崩壊過程があげられる．この崩壊過程は，崩壊定数Dを正とすると，微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt}=-Dx,\quad x(0)=x_0 \tag{17}$$

として表される．この変数分離型の問題は

$$x(t)=x_0e^{-Dt} \tag{18}$$

として解が得られ，当然ではあるが解は指数的に0に収束する特性を有する．

ここでは，このような初期値問題の係数や初期値等に曖昧性があるとしてその微分方程式にファジィ概念を導入したファジィ微分方程式の初期値問題を扱う．係数Dをファジィ数とする一般的な場合は後で述べるが，ここでは実数として簡単な場合の解の挙動を調べてみる．関数xをファジィ関数$x(t)=(x_1,x_2)(t)$としその初期値を$x(0)=(a,b)$すると，拡張原理により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_1,x_2)&=-D(x_1,x_2)\\&=-(Dx_1,Dx_2)\\&=(-Dx_2,-Dx_1)\end{aligned} \tag{19}$$

となる．したがって，パラメータ表示ではこのファジィ微分方程式は二つの常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1&=-Dx_2\\\frac{d}{dt}x_2&=-Dx_1\end{aligned} \tag{20}$$

で表される．この連立常微分方程式の解は，

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\tfrac{1}{2}\{(e^{Dt}+e^{-Dt})a-(e^{Dt}-e^{-Dt})b\}\\&=a\cosh(Dt)-b\sinh(Dt)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}x_2(t)&=\tfrac{1}{2}\{-(e^{Dt}-e^{-Dt})a+(e^{Dt}+e^{-Dt})b\}\\&=-a\sinh(Dt)+b\cosh(Dt)\end{aligned} \tag{22}$$

で与えられる．この解から解曲線を求めると，

$$x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}=a^2-b^2 \tag{23}$$

が得られる．メンバーシップ関数の性質により$a\le b$であるから$a^2-b^2\le 0$となる．よって，この解曲線は**Fig. 4** に示すように上下の直角双曲線の上側の曲線となる．さらに，(20)の方程式から$dx_1/dt\le 0$であり，この解は図の矢印のように時間的に推移する．よって，解は$x_1\to-\infty$，$x_2\to+\infty$のように推移し，曖昧さが時間とともに無限に増大する．しかし，$\alpha=1$のメンバーシップ関数のセンターの解では，通常の指数減衰モデルの解（18）と同様に$x_2=x_1$の直線上を原点に向かって推移し 0 に収束する．ところで，(20)式の２つの方程式の和をとると，

$$\frac{d}{dt}(x_1+x_2)=-D(x_1+x_2) \tag{24}$$

となる．この方程式の解x_1+x_2は(18)式の解のよう

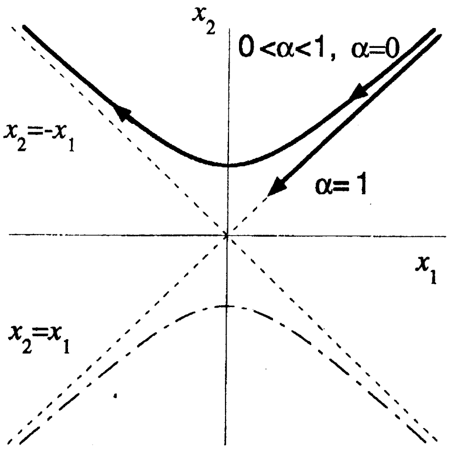

Fig. 4. Curves of solutions of a fuzzy differential equation.

に指数的に$t \to +\infty$で0に収束し，

$$x_1 + x_2 = 0 \tag{25}$$

となる．すなわち，メンバーシップ関数は最終的に$x_2 = -x_1$の直線に漸近することを示している．解のこのような漸近的挙動が，ここで扱ったファジィ微分方程式を含め，次で扱うより一般的な場合のファジィ微分方程式の普遍的な挙動であることが明らかにされている(15)．このパラメータ表示によるファジィ微分方程式の重要な知見は，指数減衰以外の双曲線に沿って時間的に推移する新しい挙動の解の存在である．

次に，より一般的なファジィ微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \tag{26}$$

を考える．ここでは係数pをファジィ数$p = (p_1, p_2)$と考える．前と同様に拡張原理によると関数xと係数pの領域によりそれぞれ以下の **Table 1** の9組の連立常微分方程式で表される．したがって，微分方程式を解く場合，どの領域の解を求めているかに対応して方程式を切り換えて解くことが必要となる．

5．ファジィ微分方程式の数値解

ここでは，ファジィ微分方程式の解の挙動を具体的に見るために，指数減衰モデルを対象に計算を行う．係数$p(t)$はメンバーシップ関数p_0と実数値関数p_tの積，すなわち$p(t) = p_0 \cdot p_t(t)$とした．また，係数p_0と初期値$x(0)$のメンバーシップ関数は **Fig. 5** に示すような三角形とした．係数$p(t)$については **Table 2** のような4条件で計算し，初期値$x(0)$は全て$x_{10} = 2.0$，$x_m = 3.0$，$x_{20} = 4.0$として計算を行った．ところで，ここでの方程式は無次元の方程式として扱っている．

5.1 Case I の計算結果

最初の計算例として，係数pに時間依存性がなく，サポートが$(-\infty, 0]$に含まれる場合の計算を行った．計算結果を **Fig. 6** に示す．(a)と(b)は各αに対するx_1, x_2の時間変化である．両グラフの

Table 1. Differential equations described with the parametric representation of the fuzzy number.

	$x_1(t) \geq 0$	$x_1(t) \leq 0,\ x_2(t) \geq 0$	$x_2(t) \leq 0$
$p_1 \geq 0$	$\dot{x}_1 = p_1 x_1$ $\dot{x}_2 = p_2 x_2$	$\dot{x}_1 = p_2 x_1$ $\dot{x}_2 = p_2 x_2$	$\dot{x}_1 = p_2 x_1$ $\dot{x}_2 = p_1 x_2$
$p_1 \leq 0,\ p_2 \geq 0$	$\dot{x}_1 = p_1 x_2$ $\dot{x}_2 = p_2 x_2$	$\dot{x}_1 = \min(p_1 x_2, p_2 x_1)$ $\dot{x}_2 = \max(p_1 x_1, p_2 x_2)$	$\dot{x}_1 = p_2 x_1$ $\dot{x}_2 = p_1 x_1$
$p_2 \leq 0$	$\dot{x}_1 = p_1 x_2$ $\dot{x}_2 = p_2 x_1$	$\dot{x}_1 = p_1 x_2$ $\dot{x}_2 = p_1 x_1$	$\dot{x}_1 = p_2 x_2$ $\dot{x}_2 = p_1 x_1$

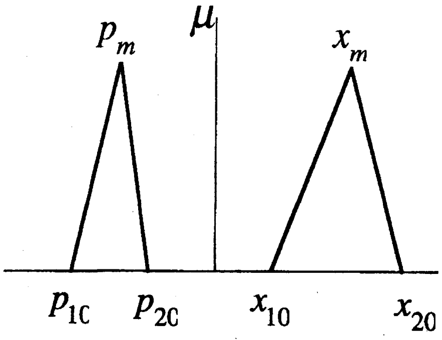

Fig. 5. Membership functions ι in the numerical calculation.

Table 2. Parameters for the computational conditions.

	p_0	p_t
Case I	$p_{10}=-2.0, p_m=-1.5, p_{20}=-1.0$	1
Case II	$p_{10}=-0.75, p_m=-0.25, p_{20}=0.25$	1
Case III	$p_{10}=-2.0, p_m=-1.5, p_{20}=-1.0$	$1/(1+t)$
Case IV	$p_{10}=-2.0, p_m=-1.5, p_{20}=-1.0$	$e^{-t}\lvert\sin t\rvert$

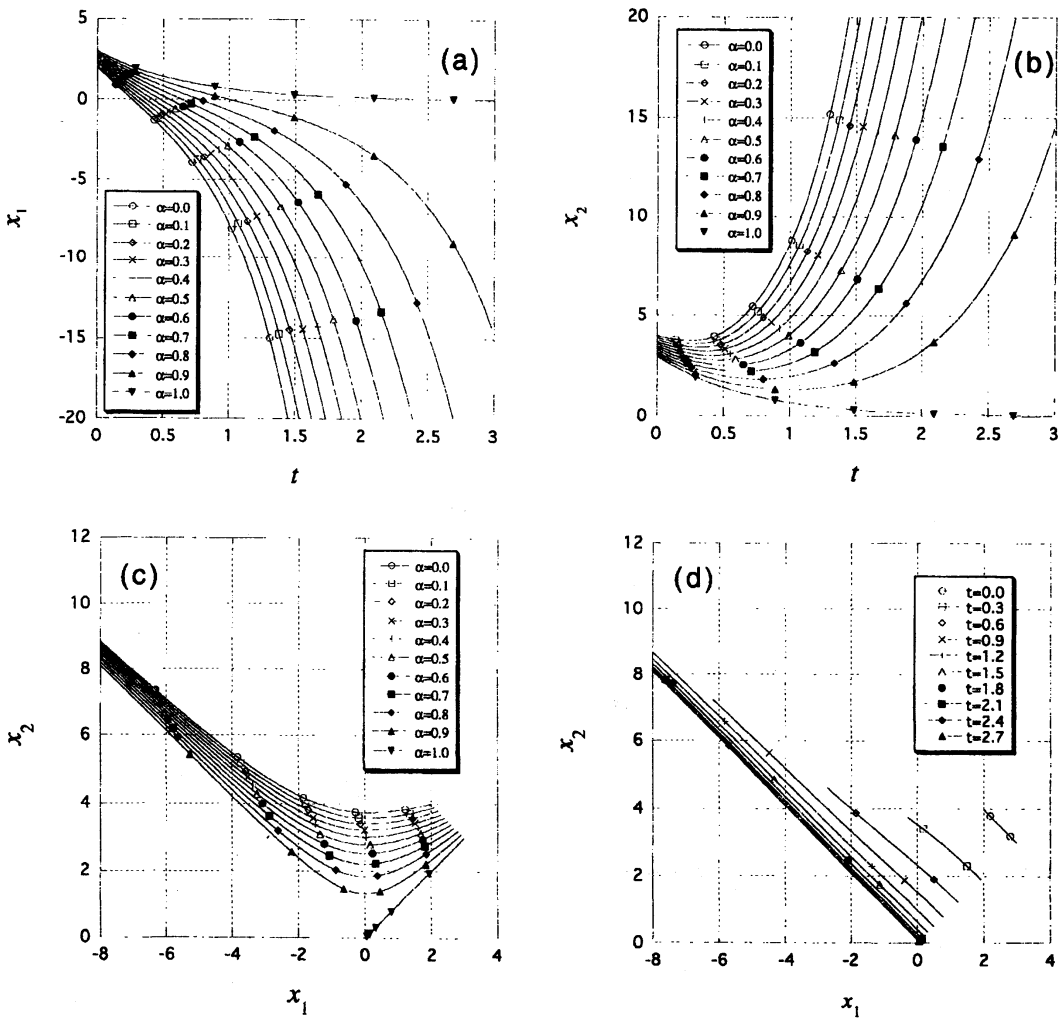

Fig. 6. Computed results for Case I.

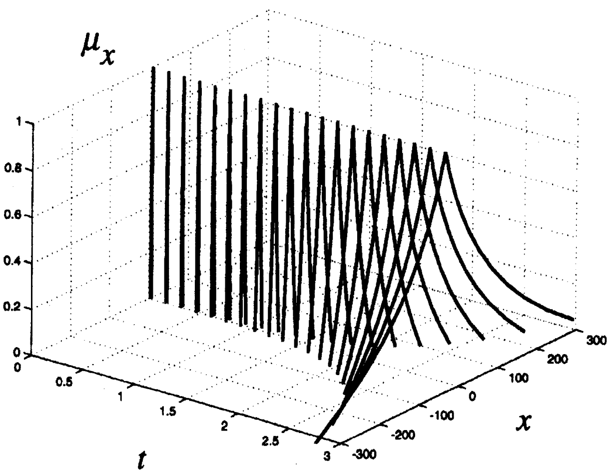

Fig. 7 Temporal evolutions of the membership function.

$\alpha=1$の曲線は，既に述べたように確かに指数的に減少している．他の曲線も初期ではすべて減少を示しているが，その後 x_1 の曲線は負の領域に入り急激な減少を続け，同時に x_2 は減少から増加に転じ急激に増加する．

下の(c)と(d)のグラフは解の時間的推移を x_1x_2 の平面上で示したものである．この(c)のグラフは各αに対する解曲線を描いたものに相当し概形はほぼ直角双曲線となっている．ただし，縦軸に対して左右対称な曲線にはなっていない．また，**Table1** で示したように縦軸を $x_1>0$ から $x_1<0$ に通過すると微分方程式が変わるため，縦軸の左右で単一の双曲線にはならない．ところで，$\alpha=1$に相当するセンターの解 x は，$x_2=x_1$ の直線上を原点に向かって時間的に推移し，0 に収束する指数減衰モデルの特徴が見られる．(d)のグラフでは，各時刻に対応するメンバーシップ関数の曲線を代表として10本

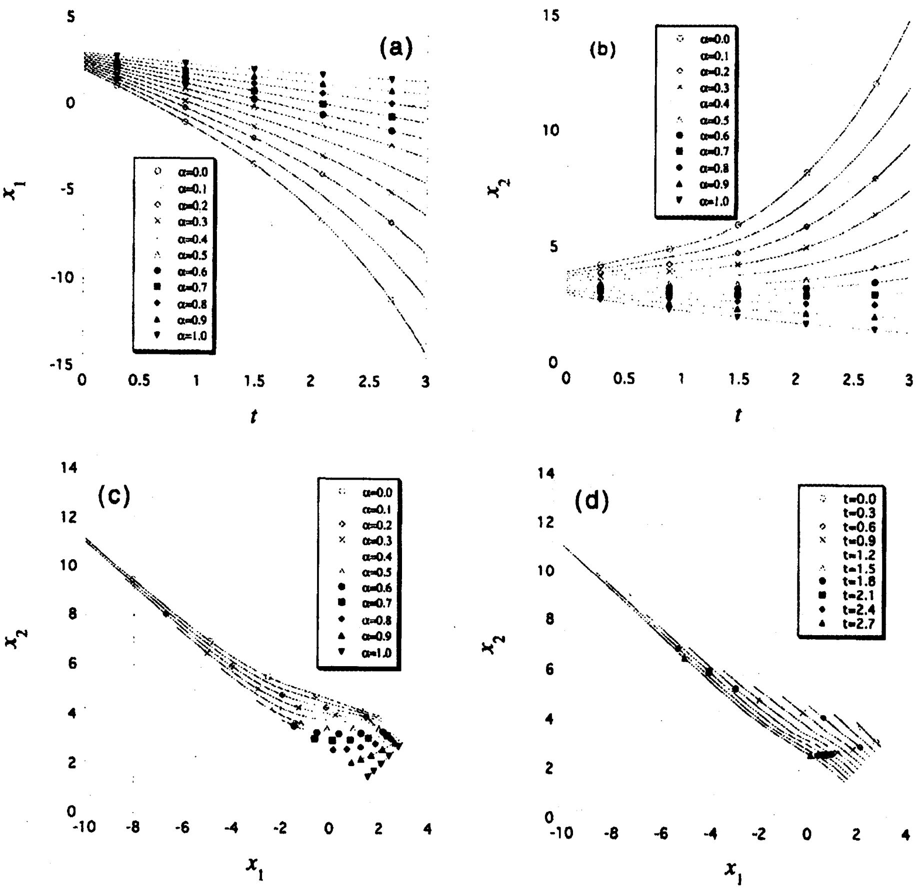

Fig. 8. Computed results for Case II.

示した．一番右側の初期値に対応するメンバーシップ曲線から左側に順次推移して，その長さが指数的に増大するとともに集積し，メンバーシップ曲線は最終的にはほぼ $x_2=-x_1$ の直線に平行な曲線となっている．これがファジィ微分方程式の新しい挙動であり，ファジィ関数 x のファジィ性の時間的な増大，蓄積に起因するものである．この計算結果は，メンバーシップ関数曲線が最終的にこの $x_2=-x_1$ の直線に漸近することを示唆している．

5.2 Case IIの計算結果

係数 p のファジィ数のセンターは Case I と同様に負であるがサポートが正の領域に及んでいる場合の計算例を **Fig. 8** に示した．時間変化を示したグラフ(a)と(b)では，その増減が Case I の場合に比べて緩やかになっている．しかし，これは係数 p のセンターの絶対値の大きさが小さくなったためであり，Case I と Case II の計算結果の本質的な差ではない．ただし，係数 p が正である $0\le\alpha<0.5$ における x_2 では，Case I のような初期の減少過程がない．この挙動は下のグラフ(c)における $0\le\alpha<0.5$ に対応する曲線にも明確に現れている．この初期の時間発展の挙動の違いが Case I と Case II の場合の大きな違いで，サポートに正の領域があることの影響である．実際，時間発展の後半では，時間発展が緩やかに進行すること以外に(c)と(d)のグラフに顕著な差が認められない．ただし，ここに示した時刻まででは(d)の曲線が集積する様子が Case I に比べると明確ではない．ここでは示さないが，より長い時間発展を計算した結果では解の基本的な挙動は Case I の結果とほとんど変わらないことが確認されていることを付け加えておく．

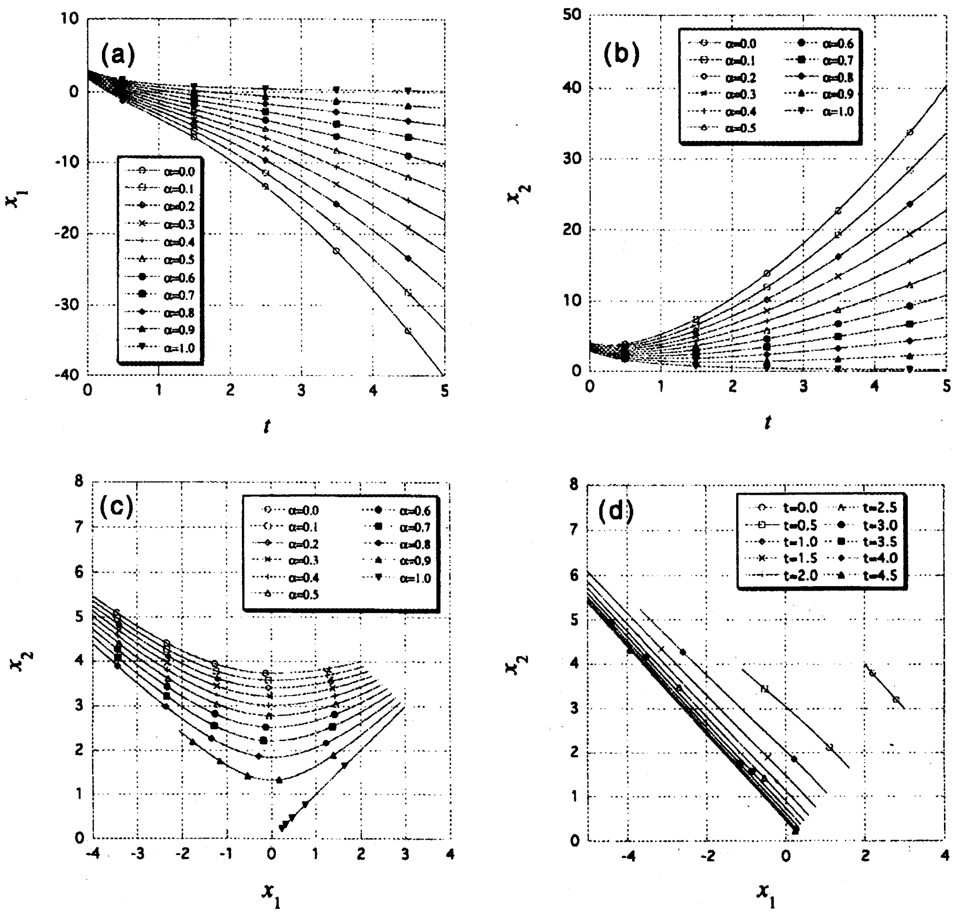

Fig. 9. Computed results for Case III.

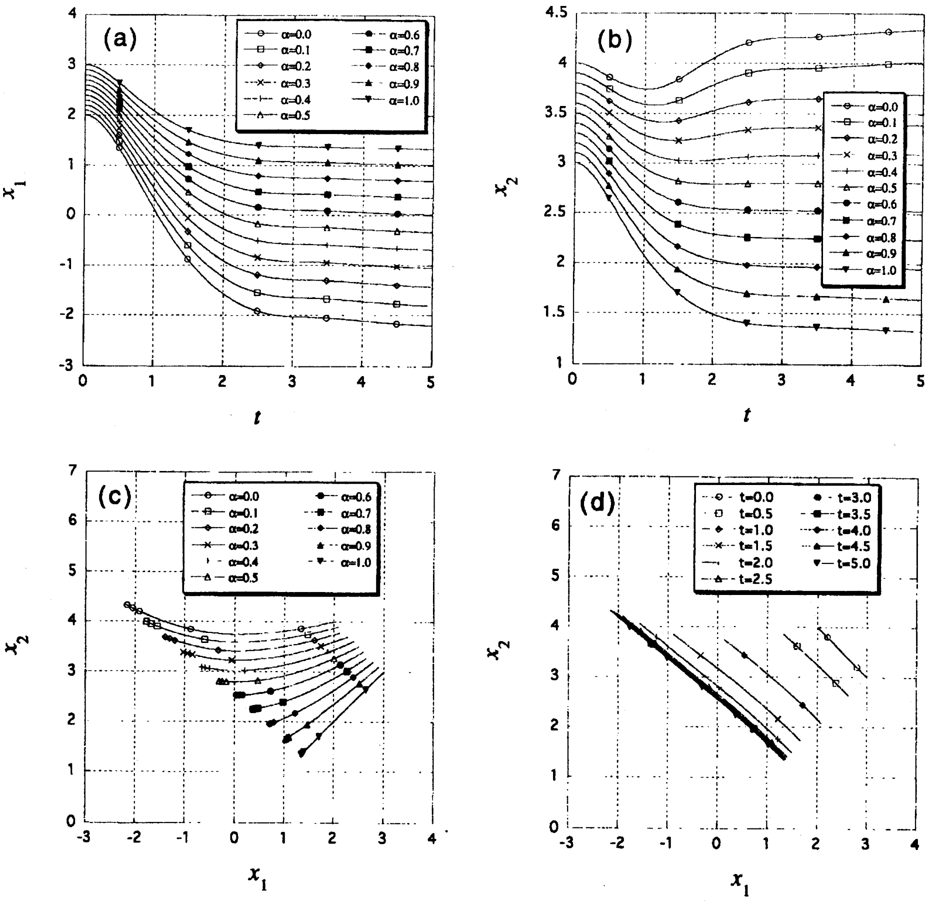

Fig. 10. Computed results for Case IV.

5.3 Case III の計算結果

ここでは係数pの大きさが時間的に減少するように時間依存性を付加して計算を行った．ただし，係数pの時間依存性が$1/(1+t)$であることを除くと Case I と同じ計算条件である．計算結果を **Fig. 9** に示した．上の 2 つの時間変化のグラフをみると，係数pの大きさが時間的に減少するようにした時間依存性のため，減少，増大の変化は Case I, Case II に比べて一層緩やかになっている．さらにより長い時間発展を計算した結果でも，解の基本的な挙動，特に漸近的挙動は Case I の結果とほとんど変わらない．すなわち，係数pが$1/(1+t)$の時間依存性で減少しても，時間とともに曖昧性が増大することを抑えることができないことを示している．

5.4 Case IV の計算結果

さらに係数pの大きさを時間的に急激に減少するように時間依存性を付加して計算を行った結果を **Fig.10** に示した．ここでも，係数pの時間依存性を除くと Case I と同じ計算条件である．上の 2 つの時間変化のグラフをみると，係数pの大きさを急激に減少させた時間依存性のため，$t=3.0$を越えるとほとんど減少も，増大も見られない．厳密に漸近的挙動を数値計算で示すことは困難であるが，下のグラフでも時間発展が急激に停留している様子が明確に現れている．すなわち，この計算例では，曖昧性が時間的に増大することが抑えられている．

このように，Case I と Case II ではいずれもpが時間的に減少する条件での計算であるにもかかわらず，解の漸近的な挙動に大きな相違がある．その理由は(24)式の場合と同様な以下の議論から明らかになる．時間発展が進み$x_1(t)\le 0, x_2(t)\ge 0$となったときの Table 1 の微分方程式の和をとると，

$$\frac{d}{dt}(x_1+x_2)=p_1(x_1+x_2) \tag{27}$$

となる．この方程式の解は，

$$x_1+x_2=(a+b)\exp[\int_0^t p_1(s)ds] \tag{28}$$

で与えられる．したがって，

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t p(s)ds=-\infty \tag{29}$$

のとき，指数的に0に収束し，

$$x_1+x_2=0 \tag{30}$$

となる．これは Case III の場合に相当し，解のメンバーシップ関数の曲線は $x_2=-x_1$ の直線に漸近する．一方，Case IV では(29)の左辺の積分は有限値を持つため $x_2=-x_1$ の直線に漸近することはない．このようなファジィ微分方程式の解の漸近挙動については，より一般的な議論によってもここでの議論と同様な結論が得られている[15]．

5. おわりに

ファジィ微分方程式の具体的問題として指数減衰モデルの初期値問題を取り上げ，その数値解を求めファジィ微分方程式の解の挙動を議論した．

ファジィ数とファジィ関数のパラメータ表示により，単独のファジィ微分方程式は複数の連立常微分方程式で表され，常微分方程式の良く知られた通常の計算方法を利用することができた．また，ファジィ数やファジィ関数およびファジィ微分方程式の解をパラメータ平面の曲線として図示することにより，議論や計算結果の見通しのよい可視化表現が可能であった．

本論文では扱わなかったが，係数 p のファジィ数のセンターが $p_m>0$ である指数発散モデルのファジィ微分方程式を解くと，ファジィ数のセンターはもちろんファジィ数全体が指数的に発散する．ところが，本論文で議論したように，指数減衰モデルのファジィ微分方程式では，ファジィ数のセンターは確かに指数的に減衰し0に収束するが，センター以外のファジィ数は初期の減衰過程の後に発散過程に移行し，最終的に $x_1\to-\infty, x_2\to+\infty$ へと発散する．ファジィ数のセンターとそれ以外では異なった挙動を示す．これは，拡張原理によるとファジィ数の四則演算にはその演算を行うたびに曖昧さが拡大する性質があることによる．このような曖昧性の無限の蓄積については，ファジィ微分方程式の具体的な応用のためにも，今後もっと多くの議論が必要である．

参考文献

1) L.A.Zadeh: Information and Control, **3**(1965)356.

2) 坂和敏正：ファジィ理論の基礎と応用，森北出版，1989.

3) 中島信之，竹田英二，石井博昭：ファジィ理論入門，裳華房，1994.

4) ファジィ学会編：ファジィとソフトコンピューティング，共立出版，2000.

5) Jr.R.Goetschel and W.Voxman:Fuzzy Sets and Systems, **9**(1983)87.

6) Jr.R.Goetschel and W.Voxman:Fuzzy Sets and Systems, **18**(1986)31.

7) D.Dubois and H.Prade: Fuzzy Sets and Systems,**8**(1982)1.

8) D.Dubois and H.Prade: Fuzzy Sets and Systems,**8**(1982)105.

9) M.L. Puri and D.A. Ralescu: J of Math. Anal. Appl. **91**(1983)552.

10) O. Kaleva: Fuzzy Sets and Systems **24**(1987)301.

11) O. Kaleva: Fuzzy Sets and Systems **35**(1990)389.

12) S. Seikkala: Fuzzy Sets and Systems **24**(1987)319.

13) J. Beckley and T. Feuring: Fuzzy Sets and Systems **110**(2000)43.

14) S. Saito: Differential Equations and Applications, Vol.3, Nova Science Publishers, Inc., New York (2003).

15) S. Saito: Proc. of the second Vietnam-Japan Symposium on Fuzzy Systems and Applications (2001).