数理解析研究所講究録 1374巻 2004年 95-108

可微分軌道体上のベクトル場の構造と多項式写像の特異点

信州大学理学部　阿部 孝順 (Kojun Abe)
Department of Mathematical Sciences,
Shinshu University

§0. 序

コンパクトリー群の表現空間 V に対して、V の G-不変多項式環の Hilbert 基底を用いて与えられる多項式写像 p の像により、V の軌道空間 V/G を表すことできる。また p により V/G に smooth functional structure を導入することで V/G の微分同相群 $Diff(V/G)$ また V/G の可微分ベクトル場のなすリー環 $\mathcal{X}(V/G)$ を考察することができる。$Diff(V/G)$ および $\mathcal{X}(V/G)$ については Bierstone [BI1], Schwarz [SC1] に研究の端緒があり、それぞれ V の同変微分同相群、G-不変ベクトル場から引き起こされることが知られている。

G が有限群の場合は、 Strub [ST] が V/G の微分構造が表現 V の構造を完全に決定することを証明した。また Abe [AB1] の結果を用いると $\mathcal{X}(V/G)$ のリー環の構造から表現 V の構造が完全に決定されることが分かる。従って上の多項式写像 p の像の特異点の構造が表現 V の構造を決定していることになる。それ故に $\mathcal{X}(V/G)$ の構造と p の像の特異点の構造の関連を調べることは、興味深い問題である。表現 V を与えるとき $\mathcal{X}(V/G)$ の生成元を具体的に求めることもできる。従って生成元の間の括弧積の関係から多項式写像 p の特異点の構造や表現 V の性質を具体的に記述できることが期待できる。

このような問題は必ずしも表現の関連しない一般の多項式写像 $p: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ の像ついても同様に考察することで、$Diff(p(\mathbf{R}^m))$ および $\mathcal{X}(p(\mathbf{R}^m))$ を定義することができる。従って $p(\mathbf{R}^m)$ の特異点の構造に $\mathcal{X}(p(\mathbf{R}^m))$ のリー環の構造がどのように関連しているかを調べることは興味があることである。特に $\mathcal{X}(p(\mathbf{R}^m))$ のリー環の構造が $p(\mathbf{R}^m)$ の特異点の構造を完全に決めていることが予想される。更に $Diff(p(\mathbf{R}^m))$ についてその1次元ホモロジー群が $p(\mathbf{R}^m)$ の特異点のどのような構造に関連しているかが次の問題となる。

ここでは上で述べたことに関連してこれまでに知られている結果について報告する。

§1.　微分同相群

M: 連結 C^∞-可微分多様体
$Diff(M)$: M の微分同相全体のなす群で C^∞-位相を入れる
ψ: $G \to Diff(M)$ 連続な群準同型
ψ は M 上のの可微分な作用

$$\Psi : G \times M \to M \quad \Psi(g,x) = \psi(g)(x)$$

と同一視できる。このような ψ または Ψ を M 上の可微分 G-作用、また M は可微分 G-多様体 であるといわれる。
G の n 次元線形表現は、$\mathbf{R}^n$ 上の可微分作用である。

M の可微分 G-作用 ψ_1 と ψ_2 が同値 $\Longleftrightarrow$
$\exists f \in Diff(M)$ s.t.

$$f \circ \psi_1(g) \circ f^{-1} = \psi_2(g) \quad \text{for } g \in G$$

このとき f は G-多様体 (M, ψ_1) と (M, ψ_2) の G-微分同相 または 同変微分同相 であるという。

Proposition 1.1　リー群 G の 2 つの n 次元線形作用 ϕ_1, ϕ_2 が同値である必要十分条件は $(\mathbf{R}^n, \phi_1)$ と $(\mathbf{R}^n, \phi_2)$ が同変微分同相となることである。

$D(M)$: コンパクトな台をもつイソトピーにより M の恒等写像とイソトピックな M の微分同相全体のなす群
$D(M)$ は $Diff(M)$ の恒等写像の連結成分 $Diff(M)_0$ と一致する。

$\mathcal{X}(M)$: コンパクトな台をもつ M 上の可微分ベクトル場全体のなすリー環

Theorem 1.2 (Pursell-Shanks [PS])　2 つの可微分多様体 M_1, M_2 が微分同相である必要十分条件は $\mathcal{X}(M_1)$ と $\mathcal{X}(M_2)$ がリー環として同型となることである。

Theorem 1.3 (Filipkiewicz [FI])　2 つの可微分多様体 M_1, M_2 が微分同相である必要十分条件は $D(M_1)$ と $D(M_2)$ が群として同型となることである。

§2. 軌道空間の可微分構造

G: コンパクトリー群
$\Psi : G \times M \to M$: G の可微分多様体 M への可微分作用

$g \in G,\ x \in M \quad g \cdot x = \Psi(g, x)$
$G(x) = \{g \cdot x |\ g \in G\}$: x の <u>軌道</u>
$M/G = \{G(x) |\ x \in M\}$: x の <u>軌道空間</u>
$G_x = \{g \in G |\ g \cdot x = x\}$: x における G の <u>等方部分群</u>

$\{(G_x) :\ G_x$ の G における共役類 ; $x \in M\}$: M の <u>軌道型</u>
G の部分群 H に対して $(M/G)_{(H)} = \{G(x) |\ (G_x) = (H)\}$ の連結成分を stratum として M/G に軌道型による stratification が導入される。

$\pi :\ M \to M/G$: 自然な射影
M が唯 1 つの軌道型 (H) をもつとき、$\pi :\ M \to M/G$ は G/H をファイバーとするファイバー束となる。特に $H = \{1\}$ のときは、 Ψ は自由作用であるといって、$\pi :\ M \to M/G$ は主束となる。

一般に軌道型が 2 以上の場合は軌道空間 M/G は可微分多様体の構造をもたない。Bredon [BR], M. Davis [DA], Bierstone [BI1] and Schwartz [SC1] は、以下のような軌道空間に *the smooth structure* を導入した。

$\bar{M} = M/G,\ \pi :\ M \to \bar{M}$
$f :\ \bar{M} \to \mathbf{R}$ <u>smooth</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f \circ \pi : M \to \mathbf{R}$ が smooth.

$C^\infty(\bar{M})$: $\bar{M}$ 上の smooth な実数関数全体
$\mathcal{M}_p = \{f \in C^\infty(\bar{M}) |\ f(p) = 0\} \quad (p \in \bar{M})$

$T_p(\bar{M}) = (\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$: p における <u>接空間</u>

可微分スライス定理により軌道空間は局所的に表現空間の軌道空間とみなせる。

V: コンパクトリー群 G の表現空間 .
$\mathbf{R}[V]_0^G$: V 上の定数項が 0 の G-不変多項式
$\{p_1, ..., p_k\}$: $\mathbf{R}[V]_0^G$ の環としての生成元 (Hilbert basis という)
このとき $\dim T_0(V/G) = k$ となる。
$p = (p_1, ..., p_n) : V \to \bar{V} = V/G$

$f:\ p(V) \to \mathbf{R}$ $\underline{\text{smooth}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\exists F:\ \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ smooth $\mid F|p(V) = f$.

$C^\infty(p(V))$: $p(V)$ 上の smooth funciton 全体
$\bar{p}:\ \bar{V} \to \mathbf{R}^k$ s.t. $\pi \circ \bar{p} = p$.

Theorem 2.1 (Bierstone, Schwarz [BI1], [SC1])
$\bar{p}^*:\ C^\infty(p(V)) \to C^\infty(\bar{V})$ は同型写像。

Theorem 2.1 により $\bar{V}$ と $p(V)$ は同じ可微分構造をもつと考えられる。

Example 2.2 (1) $G = \mathbf{Z}_2$,
$V = \tilde{\mathbf{R}}$: 自明でない 1 次元 $\mathbf{Z}_2$ 表現
$\mathbf{R}[V]^G = \mathbf{R}[x^2]$,
$\dim T_p(\bar{V}) = 1$ *for any* $p \in \bar{V}$

(2) $G = \mathbf{Z}_2,\ V = \tilde{\mathbf{R}}^2,\ \mathbf{R}[V]^G = \mathbf{R}[x^2, y^2, xy]$,
$\dim T_p(\bar{V}) = 2$ *for* $p \in \bar{V} - \{p(0)\}$,
$\dim T_{p(0)}(\bar{V}) = 3$.

H: コンパクトリー群
$\bar{N}$: 可微分 H-多様体 N の軌道空間

$h: \bar{M} \to \bar{N}$ が $\underline{\text{smooth}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \circ h \in C^\infty(\bar{M})$ (for $\forall f \in C^\infty(\bar{N})$).

同相写像 $h: \bar{M} \to \bar{N}$ が <u>微分同相</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $h,\ h^{-1}$ が smooth.

$D(\bar{M})$: コンパクトな台をもつイソトピーにより $\bar{M}$ の恒等写像とイソトピックな M の微分同相全体のなす群

$\mathcal{D}(\bar{M})$: コンパクトな台をもつ $C^\infty(\bar{M})$ の微分全体のリー環
$\mathcal{D}(\bar{M})$ の元は $\bar{M}$ 上のベクトル場と考えられる
M/G の stratum S に対して
$I(S) = \{f \in C^\infty(M/G) |\ f|_S = 0\}$
$D \in \mathcal{X}(\bar{M})$ が M/G の各 stratum S に対して $D(f) \in I(S)$ $(f \in I(S))\}$ をみたすとき、D は M/G の <u>strata を保つ</u> という。
$\mathcal{X}(\bar{M})$: M/G の strata を保つ微分からなる $\mathcal{D}(\bar{M})$ の部分リー環

$Diff_G(M)$: M の同変微分同相全体のなす群
$D_G(M) = Diff_G(M)_0$
$P:\ D_G(M) \to D(\bar{M})$:
$P(h)(\pi(x)) = \pi(h(x))$ for $x \in M$
$\pi_*:\ \mathcal{X}_G(M) \to \mathcal{X}(\bar{M})$;
$(\pi_*(X)(f)) \circ \pi = X(f \circ \pi)$ for $f \in C^\infty(\bar{M})$.

Theorem 2.3 (Bierstone, Schwarz [BI1], [SC1])
(1) π_* は上へのリー環の準同型である。
(2) P は上への群準同型である。

Theorem 2.4 (Strub [ST])
V_i: 有限群 G_i の表現空間 $(i = 1, 2)$.
V_1/G_1 と V_2/G_2 が微分同相ならば G_1 と G_2 は同型な群で、V_1 と V_2 は同値な表現である。

Theorem 2.5 (Abe [AB2])
G_i: コンパクトリー群 $(i = 1, 2)$
M_i: 可微分 G_i-多様体
次の (1), (2), (3) は同値である。
(1) M_1/G_1 と M_2/G_2 は微分同相である。
(2) $\mathcal{X}(M_1/G_1)$ が $\mathcal{X}(M_2/G_2)$ とリー環として同型である。
(3) $\mathcal{D}(M_1/G_1)$ が $\mathcal{D}(M_2/G_2)$ とリー環として同型である。

Theorem 2.6 V_i: 有限群 G_i の表現空間 $(i = 1, 2)$.
$\mathcal{X}(V_1/G_1)$ と $\mathcal{X}(V_2/G_2)$ がリー環として同型ならば G_1 と G_2 は同型な群で、かつ V_1 と V_2 は同値な表現空間である。

Remark 2.7 (1) V が有限群 G の表現の場合は、Corollary 2.6 によってリー環 $\mathcal{X}(V/G)$ の構造が V をの同値類を決定する。また Theorem 2.1 により $\mathbf{R}[V]_0^G$ の Hilbert basis から決められる多項式 $p:\ V \to \mathbf{R}^k$ の像 $p(V)$ は V/G と微分同相となっている。このことから $\mathcal{X}(V/G)$ の構造を具体的に計算することが可能となる。

(2) 可微分スライス定理により、一般的に可微分 G-作用の軌道空間は局所的に表現空間の軌道空間と微分同相になる。従って Theorem 2.1 により軌道空間の局所的構造は、対応する多項式の像の可微分構造のと考えてよい。

(3) 可微分作用と結びつかないような多項式の特異点の研究においても、ここのでの方法は有効であると考えられる。

§3. 1次元ホモロジー群

この節では可微分連結多様体について $D(M)$ また可微分連結 G-多様体に対して $D_G(M)$ の1次元ホモロジー群についてこれまで知られていることを述べる。

群 K がその交換子群 $[K,K]$ と一致するとき完全群であるという。
$H_1(K) = K/[K,K]$: K の1次元ホモロジー群

Theorem 3.1 (Hermann [HE], Mather [M], Thurston [TH]) $D(M)$ は単純群である。

Theorem 3.2 (Fukui [F])

$$H_1([0,1]) \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}.$$

Theorem 3.3 (A-F [AF6]) M が2次元以上の境界をもつ多様体ならば、$D(M)$ は完全群である。

Theorem 3.4 (Banyaga [BA1])
T^q : q-次元トーラス群
M: 自由作用をもつ可微分 T^q-多様体,
$\dim M/T^q \geq 1$
このとき $D_{T^q}(M)$ は完全群である。

Theorem 3.5 (A-F [AF1])
G: コンパクトリー群
M: 自由作用をもつ可微分 G-多様体,
$\dim M/G \geq 1$
このとき $D_G(M)$ は完全群である。

Corollary 3.6 (A-F [AF1])
G: コンパクトリー群
M: 唯1つの軌道型をもつ可微分 G-多様体,
$\dim M/G \geq 1$
このとき $D_G(M)$ は完全群である。

M: 余次元1軌道をもつ可微分 G-多様体
M/G は S^1 または $[0,1]$ と同相である。

M/G が S^1 と同相なときは、Corollary 2.3 により、$D_G(M)$ は完全群である。

M/G が $[0,1]$ と同相なときは、M は2または3個の軌道型をもつ。
(H): $(0,1)$ に対応する軌道型（主軌道型）
(K_i) $(i=0,1)$: i に対応する軌道型（特異軌道型）
$N(H)$: H の G における正規化群:

Theorem 3.7 (A-F [AF2])

$$H_1(D_G(M)) \cong \mathbf{R}^2 \times H_1(((N(H) \cap N(K_0))/H \times (N(H) \cap N(K_1))/H))_0).$$

$\tilde{\mathbf{R}}$: 自明でない1次元 $\mathbf{Z}_2$-表現空間
$\tilde{\mathbf{R}}^n = \tilde{\mathbf{R}} \oplus \cdots \oplus \tilde{\mathbf{R}}$ (n times)

$$\Phi : D_{\mathbf{Z}_2}(\tilde{\mathbf{R}}^n) \to GL^+(n,\mathbf{R}) = GL^+_{\mathbf{Z}_2}(\tilde{\mathbf{R}}^n) \quad ; \Phi(f) = df(0).$$

$$\Phi_* : H_1(D_{\mathbf{Z}_2}(\tilde{\mathbf{R}}^n)) \to H_1(GL^+(n,\mathbf{R})) \cong \mathbf{R}.$$

Theorem 3.8 (A-F [AF5])

$$\Phi_* : H_1(D_{\mathbf{Z}_2}(\tilde{\mathbf{R}}^n)) \cong \mathbf{R}.$$

Corollary 3.9 (A-F [AF5])

$$H_1(D(\tilde{\mathbf{R}}^n/\mathbf{Z}_2)) \cong \mathbf{R}.$$

§4. 多項式写像と可微分ベクトル場

Proposition 4.1 M: G-多様体
(1) $X \in \mathcal{D}(\bar{M})$ が *starata* を保つ $\Longleftrightarrow$
X が余次元 1 の *starata* を保つ。
(2) $\bar{M}$ が余次元 1 の *starata* をもたなければ、$\mathcal{D}(\bar{M}) = \mathcal{X}(\bar{M})$

V: コンパクトリー群 G の表現空間
$\{p_1, ..., p_k\}$: $\mathbf{R}[V]_0^G$ の Hilbert basis
$p = (p_1, ..., p_k): V \to \mathbf{R}^k$
$X \in \mathcal{X}(p(V))$ は $\mathcal{X}(\mathbf{R}^k)$ の polynomial vector field に拡張されるとき、X は polynomial vector field であるという。

Theorem 4.2 (Bierstone, Schwarz [BI1], [SC1]) $\mathcal{X}(p(V))$ は有限個の *polynomial vector field* で生成される。

Example 4.3 $G = \mathbf{Z}_2$, $V = \tilde{\mathbf{R}}$.
$\mathbf{R}[V]^G = \mathbf{R}[x^2]$,
$p: \tilde{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$; $p(x) = x^2$
$\mathcal{D}(\tilde{\mathbf{R}}/\mathbf{Z}_2)$ は $\dfrac{d}{dy}$ を生成元とする $C^\infty(p(\tilde{\mathbf{R}}))$-*module*
$\mathcal{X}(\tilde{\mathbf{R}}/\mathbf{Z}_2) \cong \mathcal{X}(p(\tilde{\mathbf{R}}))$: $X = y\dfrac{d}{dy}$ を生成元とする $C^\infty(p(\tilde{\mathbf{R}}))$-*module*
$p_*: \mathcal{X}_{\mathbf{Z}_2}(\tilde{\mathbf{R}}) \to \mathcal{X}(p(\tilde{\mathbf{R}}))$ は同型写像で
$Y = \dfrac{x}{2}\dfrac{d}{dx}$ として $p_*(Y) = X$.

A: 単位元を含む可換環
$f_1, \cdots, f_n \in A$ に対して次の複体を定義する。
$$\cdots \xrightarrow{d_3} \bigwedge^2(A^n) \xrightarrow{d_2} \bigwedge^1(A^n) \xrightarrow{d_1} A \longrightarrow A/(f_1, \cdots, f_n) \longrightarrow 0, \qquad (*)$$
$$d_k(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \textstyle\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_{i_j} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$
ここで $\{e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0) | , 1 \le i \le n\}$ は A^n の標準基底。
$\{f_i \in A\ (1 \le i \le n)\}$ に対して f_i が $A/(f_1, \cdots, f_{i-1})$ で零因子でないとき $f_1, ..., f_n$ は regular sequence であるという。

Theorem 4.4
$f_1, ..., f_n$ が *regular sequence* ならば、(∗) は完全列となる。

Corollary 4.5 Theorem 4.4 の仮定の下で $Ker\, d_1$ は $\{f_j e_i - f_i e_j |\ 1 \le i < j \le n\}$ で生成される。

Example 4.6 $G = \mathbf{Z}_2,\ V = \tilde{\mathbf{R}}^2$,
$\mathbf{R}[V]^G = \mathbf{R}[x^2, y^2, xy]$,
$p_1(x,y) = x^2,\ p_2(x,y) = y^2,\ p_3(x,y) = xy.\ p = (p_1, p_2, p_3):\ V \to \mathbf{R}^3$
$X \in \mathcal{X}(p(V))$ を $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i(y_1, y_2, y_3)\frac{\partial}{\partial y_i}$ と表す。
$f(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 - y_3^2$,
$f_i = \frac{\partial f}{\partial t_i}\ (i = 1, 2, 3)$
として Corollary 5.5 を用いると $\mathcal{X}(p(V))$ は次の 4 個の生成元からなる。

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) &= (y_1, y_2, y_3), \quad (-y_1, y_2, 0),\\ &\quad\ (2y_3, 0, y_2), \quad (0, 2y_3, y_1)\end{aligned}$$

また $\pi_*:\ \mathcal{X}_G(V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}(p(V))$ により $\pi_*(Y) = X$ をみたす
$Y = \sum_{j=1}^{2} b_j(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_i}$ は

$$\begin{aligned}(b_1, b_2) &= (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2), \quad (-\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2),\\ &\quad\ (x_2, 0), \quad (0, x_1)\end{aligned}$$

Example 4.7 (Kawai [K] and Hatta [HA]) $G = \mathbf{Z}_2,\ V = \tilde{\mathbf{R}}^3$,
$p_1 = x_1^2\ ,\ p_2 = x_2^2\ ,\ p_3 = x_3^2$
$p_4 = x_1 x_2\ ,\ p_5 = x_2 x_3\ ,\ p_6 = x_1 x_3$
$\mathbf{R}[V]^G = \mathbf{R}[p_1, p_2, ..., p_6]$,
$p = (p_1, \cdots, p_6) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6$
$X \in \mathcal{X}(p(V))$ を $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} a_i(y_1, y_2, ..., y_6)\frac{\partial}{\partial y_i}$ と表すと $\mathcal{X}(p(V))$ は次の 7 個の生成元からなる。

$(a_1,$	$a_2,$	$a_3,$	$a_4,$	$a_5,$	$a_6)$
$(y_1,$	$y_2,$	$y_3,$	$y_4,$	$y_5,$	$y_6)$
$(2y_4y_6,$	$0,$	$0,$	$y_2y_6,$	$0,$	$y_3y_4)$
$(0,$	$2y_4y_5,$	$0,$	$y_1y_5,$	$y_3y_4,$	$0)$
$(0,$	$0,$	$2y_5y_6,$	$0,$	$y_2y_6,$	$y_3y_4)$
$(y_1y_4,$	$y_2y_4,$	$-y_3y_4,$	$y_1y_2,$	$0,$	$0)$
$(-y_1y_5,$	$y_2y_5,$	$y_3y_5,$	$0,$	$y_2y_3,$	$0)$
$(y_1y_6,$	$-y_2y_6,$	$y_3y_6,$	$0,$	$0,$	$y_1y_3)$

またこれらの生成元 X に対して $\pi_*(Y) = X$ をみたす

$$Y = \sum_{j=1}^{3} b_j(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}_G(V)$$

は 順番に次のようになる。

	$(b_1,$	$b_2,$	$b_3,)$
$\frac{1}{2}($	$x_1,$	$x_2,$	$x_3)$
$($	$x_1x_2x_3,$	$0,$	$0)$
$($	$0,$	$x_1x_2x_3,$	$0)$
$($	$0,$	$0,$	$x_1x_2x_3)$
$\frac{1}{2}x_1x_2($	$x_1,$	$x_2,$	$-x_3)$
$\frac{1}{2}x_2x_3($	$-x_1,$	$x_2,$	$x_3)$
$\frac{1}{2}x_1x_3($	$x_1,$	$-x_2,$	$x_3)$

次に表現と関連していない場合に考察する。

Example 4.8 (cusp)
$p:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2;\quad p(x) = (8x^3, 6x^2)$

$f(y_1, y_2) = 27y_1^2 - 8y_2^3$
$\mathcal{X}(p(\mathbf{R}^2))$ の生成元は

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{y_1}{2}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{y_2}{3}\frac{\partial}{\partial y_2}, \\ X_2 &= 24y_2^2\frac{\partial}{\partial y_1} + 54y_1\frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

$p_*(Y_i) = X_i \ (i = 1, 2)$ をみたす $Y_i \in \mathcal{X}(\mathbf{R})$ は

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{x}{6}\frac{d}{dx} \\ Y_2 &= 36x^2\frac{d}{dx} \end{aligned}$$

Example 4.9 (swallow-tail)
$p: \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3;$
$p(x_1, x_2) = (x_1, \ -3x_1x_2 - 10x_2^3, \ 3x_1x_2^2 + 15x_2^4)$
$f(y_1, y_2, y_3) = -27y_1^3y_2^2 - 135y_2^4 + 81y_1^4y_3 + 540y_1y_2^2y_3 - 360y_1^2y_3^2 + 400y_3^3$
このとき $\mathcal{X}(p(\mathbf{R}^2)) = \mathcal{D}(p(\mathbf{R}^2))$ となることが分かる。

$\mathcal{D}(p(\mathbf{R}^2))$ の生成元は以下の $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$:

$$X_1 = 2y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + 4y_3\frac{\partial}{\partial y_3}$$

$$\begin{aligned} X_2 = &(-54y_1^3y_2 - 540y_2^3 + 1080y_1y_2y_3)\frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+(81y_1^2y_2^2 - 324y_1^3y_3 - 540y_2^2y_3 + 720y_1y_3^2))\frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 = &(81y_1^4 + 540y_1y_2^2 - 720y_1^2y_3 + 1200y_3^2))\frac{\partial}{\partial y_2} \\ &+(54y_1^3y_2 + 540y_2^3 - 1080y_1y_2y_3)\frac{\partial}{\partial y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 = &(-81y_1^4 - 540y_1y_2^2 + 720y_1^2y_3 - 1200y_3^2)\frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+(-81y_1^2y_2^2 + 324y_1^3y_3 + 540y_2^2y_3 - 720y_1y_3^2)\frac{\partial}{\partial y_3} \end{aligned}$$

$\pi_*(Y_i) = X_i\ (1 \leq i \leq 4)$ をみたす

$$Y_i = \sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^2)$$

は次のようになる。

$$Y_1 = 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y_2 = 54x_2(x_1 + 10x_2^2)^3(3x_1 + 10x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1} - 27x_2^2(x_1 + 10x_2^2)^2(3x_1 + 10x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y_3 = -9(x_1 + 10x_2^2)^3(3x_1 + 10x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y_4 = -27(x_1 + 10x_2^2)^3(3x_1 + 10x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + 27x_2(x_1 + 10x_2^2)^2(3x_1 + 10x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Remark Example 4.8 では $\{Y_1, Y_2\}$ は $p^*C^\infty(\mathbf{R}^2)$ 加群として、また Example 4.9 では $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ が $p^*C^\infty(\mathbf{R}^3)$ 加群としての基底である。

参考文献

[AB1] K. Abe, *On the homotopy type of the groups of equivariant diffeomorphisms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 16(1980), 601-626.

[AB2] K. Abe, *Pursell-Shanks type theorem for orbit spaces of G-manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 18(1982), 265-282

[AF1] K. Abe and K. Fukui, *On commutators of equivariant diffeomorphisms*, Proc. Japan Acad., 54 (1978), 52-54.

[AF2] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit*, Topology, 40 (2001), 1325-1337.

[AF3] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 53 (2001), 501-511.

[AF4] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II*, 2003, Jour. Math. Soc. Japan, **55** , 947-956.

[AF5] K. Abe and K. Fukui, *On the first homology of the group of diffeomorphisms of smooth orbifolds with isolated singularities*, preprint.

[AF6] K. Abe and K. Fukui, *Commutators of C^∞-diffeomorphisms preserving a submanifold*, preprint.

[AFM] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, *On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms*, preprint.

[BA1] A. Banyaga, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms*, Topology, 16(1977), 279-283.

[BA2] A. Banyaga, The Structure of Classical Diffeomorphism Groups, Kluwer Academic Publishers, (1997).

[BI1] E. Bierstone,*Lifting isotopies from orbit spaces*, Topology, 14(1975), 245-252.

[BI2] E. Bierstone, The Structure of Orbit Spaces and the Singularities of Equivariant Mappings, Instituo de Mathematica Pura e Aplicada, (1980).

[BR] B. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York-London, (1972).

[DA] M. Davis, Multiaxial Actions on Manifolds, Lecture Notes in Mathematics 643, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1978).

[EP] D.B.A.Epstein, The simplicity of certain groups of homeomorphisms, Compos. Math. 22(1970), 165-173.

[FI] R.P. Filipkiewicz, Isomorphisms between diffeomorphism groups, Ergodic Theory Dynamical Systems, 2(1982), 159-171.

[F] K. Fukui, *Homologies of the group of $Diff^\infty(R^n, 0)$ and its subgroups*, J. Math. Kyoto Univ., 20(1980), 475-487.

[GR] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique, III Étude cohomologique des faisceau cohérents*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 11(1961).

[HA] T.Hatta, $\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル場の研究, 修士論文 (2004).

[HE] M.R.Herman, Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞, isotopes L'identité, du tore de dimension n, CR. Acad.Sci. Paris, Sér. A-B., 273(1971) A 232-234.

[K] K.Kawai, 可微分軌道体のベクトル場の研究, 修士論文 (2002).

[M] J. N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms I and II*, Comment. Math. Helv., 49(1992), 512-528; 50(1975), 33-40.

[PS] L.Pursell and M.Shanks, *The Lie algebra of smooth manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 5(1954), 468-472.

[SC1] G.W. Schwarz, *Smooth invariant functions under the action of a compact Lie group*, Topology, 14(1975), 63-68.

[SC2] G.W. Schwarz, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 51(1980) 37-135.

[ST] R. Strub, *Local classification of quotients of smooth manifolds by discontinuous groups*, Math. Zeitschrift 179(1982), 43-57.

[TA] F. Takens, *Normal forms for certain singularities of vectorfields*, Ann. Inst. Fourrier, Grenoble , 23(1973), 163-195.

[TH] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 80(1974), 304-307.

[TS] T. Tsuboi, *On the group of foliation preserving diffeomorphisms*, preprint