数理解析研究所講究録 1374 巻 2004 年 126-140

インスタントン分布の理論と3-接触構造への一般化

待田　芳徳　(沼津高専)
Yoshinori MACHIDA (Numazu College of Technology)

1．はじめに

R.Montgomery「A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications」([M]) の中の6.10, 7.12において，非退化なタイプ$(4,7)$分布(M,D)は,

(i) 楕円型，双曲型に対応して，階数4の分布D上に共形$(4,0)$型構造，共形$(2,2)$型構造を定める,

(ii) 自己同型群は有限次元で，楕円型の場合に最大次元をとるのは，4元型Hopf束上の基本インスタントン分布の$Sp(2,1)$である,

ことを示している．ここでは，これらのタイプ$(4,7)$分布の議論を換骨奪胎して, 自分なりに整理, 再構築して発展, 応用させることを目的とする．さらに一般化, 高次元化したタイプ$(4n,4n+3)$分布を考え, 3-接触構造なる概念を定式化することを試みる．

Mをn次元多様体とする．DをM上の階数kの分布, 即ち, 接束TMの階数kの部分束とする．(M,D)が**タイプ**(k,n)**の** (次数2の非ホロノーム) **分布**とは,

$$TM = D + [D,D]$$

であるときをいう．ただし, Dの切断の芽の層に同じ記号Dを用いた．非可積分分布のため, $k\geq 2$に注意する．2つの分布$(M,D),(M',D')$が同型であるとは, $\Phi_*D=D'$なる微分同相写像$\Phi: M\longrightarrow M'$が存在するときをいう．

最も次元の小さいものは, タイプ$(2,3)$分布, 即ち, 3次元接触構造である．基本的な性質として,（1）無限型,（2）標準形(Darboux型),（3）安定性(Gray型)　をもつ．典型的な例として, (複素型)Hopf束がある．

自然な一般化, 高次元化は, 一般奇数次元の接触構造のタイプ$(2n,2n+1)$分布であり, 上記の性質や例をもつ．

ここでは, 接触構造の考え方をとり入れた別の一般化として, タイプ$(4,7)$分布を議論し, 上記の（1）（2）（3）はもはや成立しないことをみる．典型的な例である4元型Hopf束$S^3\longrightarrow S^7\longrightarrow S^4$は，標準的な$SU(2)$接続によるタイプ$(4,7)$分布をもつ．これを，インスタントン分布といおう．さらに, 高次元化であるタイプ$(4n,4n+3)$分布の有限型，無限型の幾何構造を, 上記の性質を意識しながら考えていく．

他に, 同じ余階数3のタイプ$(2n,2n+3),(3n,3n+3)$分布などがあるが, ここでは割愛する．
また, 階数2の分布としての一般化であるCartan分布, Goursat分布も割愛する．

2．タイプ (4, 7) 分布

2.1. 構造

2.1.1. 平坦モデル

タイプ (4, 7) 分布の平坦モデルである $(\mathbb{R}^7, D_0)$ は次のようである．$\mathbb{R}^7$ の局所座標系を $(x, y, z, w; r, s, t)$ として，3つの 1-形式を

$$\begin{cases} \omega_1 &= dr - ydx - wdz, \\ \omega_2 &= ds - zdx \mp ydw, \\ \omega_3 &= dt - wdx - zdy, \end{cases}$$

と定義する．4つのベクトル場

$$\begin{cases} X &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial s} + w\frac{\partial}{\partial t}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial t}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial r}, \\ W &= \frac{\partial}{\partial w} \pm y\frac{\partial}{\partial s}, \end{cases}$$

で張られる分布

$$D_0 = \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\} = < X, Y, Z, W >$$

は,

$$[X, Y] = [Z, W] = -\frac{\partial}{\partial r},$$
$$[X, Z] = \pm[W, Y] = -\frac{\partial}{\partial s},$$
$$[X, W] = [Y, Z] = -\frac{\partial}{\partial t}$$

だから，タイプ (4, 7) 分布である．これを 3-接触構造という．定義は III. 冒頭で述べる．ω_1 に $-sdt$, ω_2 に $-tdr$, ω_3 に $-rds$ の項を付け加えることにより，3つの接触構造となることに注意する．

分布 D_0 上では，3つのシンプレクティック形式（超シンプレクティック構造となる）

$$\begin{cases} \Omega_1 &= d\omega_1 = dx \wedge dy + dz \wedge dw, \\ \Omega_2 &= d\omega_2 = dx \wedge dz \pm dw \wedge dy, \\ \Omega_3 &= d\omega_3 = dx \wedge dw + dy \wedge dz \end{cases}$$

は,

$$\Omega_1 \wedge \Omega_1 = \pm\Omega_2 \wedge \Omega_2 = \Omega_3 \wedge \Omega_3 (\neq 0),$$
$$\Omega_1 \wedge \Omega_2 = \Omega_2 \wedge \Omega_3 = \Omega_3 \wedge \Omega_1 = 0$$

となる．向きづけと標準的計量の Hodge 作用素のもとで，自己双対 (反自己双対)2-形式である．

2.1.2. 非退化性, 楕円・双曲型

一般に, 分布 D の曲率とは, 線形束写像

$$F : \Lambda^2 D \longrightarrow TM/D,$$

$$F(X,Y) = [X,Y] \mod D, \qquad X, Y \in D$$

をいい, その双対曲率とは, 線形束写像

$$F^* : D^\perp(\subset T^*M) \longrightarrow \Lambda^2 D^*,$$

$$F^*(\lambda_x)(X,Y) = \lambda_x([X,Y]) = -d\lambda_x(X,Y)$$

をいう.

タイプ $(4,7)$ 分布 (M,D) に対して, F は全射であり, よって F^* は単射である. 各 $x \in M$ に対して, 次の写像を考える：

$$D^\perp \longrightarrow \Lambda^2 D^* \longrightarrow \Lambda^4 D^*,$$

ここで, 第 1 の写像は単射である双対曲率 F^* であり, 第 2 の写像は $\alpha \longmapsto \alpha \wedge \alpha$ な 2 次形式 Q である. D 上に向きづけと (共形) 内積を与えるとする. D 上の 2-形式の空間 $\Lambda^2 D^*$ を, 自己双対な 3 次元部分空間 Λ^2_+ と反自己双対な 3 次元部分空間 Λ^2_- に直和分解する：$\Lambda^2 D^* = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$. そのとき $Q(\Lambda^2_+)$ と $Q(\Lambda^2_-)$ は反対符号のため, Q は符号が $(3,3)$ 型の 2 次形式である.

合成写像 $Q \circ F^*$ が非退化なとき, 分布 D は**非退化**という. 以後, 仮定する. 3 次元部分空間 $F^*(D^\perp)$ において,

（1）Q で $(3,0)$ 型のとき, D は**楕円型**, あるいは**4 元型**という

（2）Q で $(2,1)$ 型のとき, D は**双曲型**, あるいは**分離 4 元型**という.

2.1.3. 有限型, 実型

タイプ $(4,7)$ 分布 (M,D) に対し, $D_x \subset T_xM$ $(x \in M)$ において, $\mathfrak{g}_{-1}(x) = D_x$ （4 次元）, $\mathfrak{g}_{-2}(x) = T_xM/D_x$ (3 次元) とおく. $\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{g}_{-2}(x) \oplus \mathfrak{g}_{-1}(x) \cong T_xM$ を, (M,D) のシンボル代数という. Lie ブラケットを積として Lie 代数となる. $\mathfrak{g}_{-2}(x) = [\mathfrak{g}_{-1}(x), \mathfrak{g}_{-1}(x)]$ である.

複素 Lie 群 $G = Sp(3,\mathbb{C})$ の Lie 代数は,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(3,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(6,\mathbb{C}) \mid {}^tXJ + JX = O\},$$

$$J = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & O & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & -1 & & & O & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix}$$

である. $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}$, ($A'$ は A の逆対角成分での転置行列), の形で, $B = B', C = C'$ は逆

対角成分のもとで対称である. $\mathfrak{g}$ は, 第2種単純階別 Lie 代数の構造をもつ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j},$$
$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & e & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$[a, c] = g(= -2ac), \ [b, d] = f(= -2bd),$$
$$[a, d] = [b, c] = e(= -ad = -bc).$$

ここで, 式は行列と思っている.

命題 1. 複素カテゴリーのもとで, 非退化なタイプ $(4,7)$ 分布 (M, D) のシンボル代数 $\mathfrak{m}(x)(x \in M)$ の複素化 $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(x)$ に対して,

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(x) \cong \mathfrak{m}$$

である.

命題 2. (cf. [Y]) 逆に, 上の $\mathfrak{m}$ の延長は, 有限型で, 単純階別 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(3, \mathbb{C})$ である.

実型として, コンパクト型 $Sp(3)$ の他に, 非コンパクト型である $G = Sp(2,1)$ と分離 $Sp(2,1)'$ を考える. $\mathfrak{m}$ に作用する $\mathfrak{g}_0$ の Lie 群を G_0 として, その随伴表現の像を調べることにより, 次がわかる.

命題 3. (1) $G = Sp(2,1)$ の場合, $G_0 = CO(4)$ であり, D 上に共形 $(4,0)$ 型構造を定め, D は楕円型, 4元型である,

(2) 分離 $G = Sp(2,1)'$ の場合, $G_0 = CO(2,2)$ であり, D 上に共形 $(2,2)$ 型構造を定め, D は双曲型, 分離4元型である.

2.1.4. 正規 Cartan 接続, 基本不変量

一般に, 田中理論 ([T]) とは次のようなものである. 単純階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p=-\mu}^{\mu} \mathfrak{g}_p$ が

（1）$\mathfrak{m} = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ が $\mathfrak{g}_{-1}$ によって生成

（2）$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{m}$ (cf.$(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}_0)$) の延長

であるならば, $\mathfrak{g}$ によって幾何構造 : $M_0 = G/G'$ (G, G' は $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}' = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{g}_p$ のそれぞれ Lie 群) と $\mathfrak{g}_{-1}$ から誘導される微分式系 D_0 が定まる. そのとき, 一般の (M, D) と平坦モデルの (M_0, D_0) のシンボル代数が同型であるならば, M の主 G' 束 P 上に G/G' 型の正規 Cartan 接続 ω が一意に存在する.

ここで, M の G/G' 型の主 G' 束 P 上の正規 Cartan 接続 ω について述べる. Cartan 接続 ω とは, 線形同型 $\omega : T_pP \longrightarrow \mathfrak{g}$ である P 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式であって, $\omega(A^*) = A$ $(A \in \mathfrak{g}')$, $R_a^*\omega = Ad(a^{-1})\omega$ $(a \in G')$ をみたすものである. ω の曲率 Ω とは, $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ である P 上の $\mathfrak{g}$-値 2-形式をいう. $\Omega = \frac{1}{2}K(\omega_- \wedge \omega_-)$ (ω_- は ω の $\mathfrak{m}$ 成分) からの曲率関数 $K : P \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \Lambda^2$ に対して, 正規性 (田中の条件)

(i) $K^p = 0$ $(p < 0)$　　(ii) $\partial^* K^p = 0$ $(p \geq 0)$
をみたす Cartan 接続 ω を正規 Cartan 接続という．ここで，K^p は $\mathfrak{g}$ の階別からの分解である．曲率関数 K の調和部分への射影 $HK : P \longrightarrow H^2$ が基本不変量である．即ち，
$K = 0 \Longleftrightarrow HK = 0 \Longleftrightarrow$ モデル空間 G/G' に局所同型である．

命題 4.　非退化なタイプ $(4,7)$ 分布 (M, D) に対して，$G = Sp(2,1), Sp(2,1)'$ として，G/G' 型の正規 Cartan 接続 ω が，M の主 G' 束 P 上に一意に存在する．

命題 5.　上の Cartan 接続 ω は，2 つの基本不変量をもつ：
(i) $K^0 = HK^0$ （捩率部分 − 右曲率），$\mathfrak{g}_0$-加群としての生成元 $\in \mathfrak{g}_{-2} \otimes \Lambda^2_{-3}$,
(ii) HK^1 （曲率部分 − 左曲率），$\mathfrak{g}_0$-加群としての生成元 $\in \mathfrak{g}_0 \otimes \Lambda^2_{-2}$.
ここで，$\Lambda^2_{-3} = \mathfrak{g}^*_{-2} \wedge \mathfrak{g}^*_{-1}$, $\Lambda^2_{-2} = \mathfrak{g}^*_{-1} \wedge \mathfrak{g}^*_{-1}$ である．

2.2. 楕円型

2.2.1. 境界としての例

$(B^2_{\mathbb{H}}, h_0)$ を双曲空間 $H^2_{\mathbb{H}}$ の球モデルである双曲球とする：

$$B^2_{\mathbb{H}} = \{q = (q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |q|^2 = \bar{q}_1 q_1 + \bar{q}_2 q_2 < 1\},$$

$$h_0 = \frac{1}{1 - |q|^2}(d\bar{q}_1 dq_1 + d\bar{q}_2 dq_2 + \frac{1}{1 - |q|^2}(d\bar{q}_1 q_1 + d\bar{q}_2 q_2)(\bar{q}_1 dq_1 + \bar{q}_2 dq_2)).$$

等長変換群は $G = Isom^+(B^2_{\mathbb{H}}, h_0) = Sp(2,1)$ である．原点 o での等方部分群 K は極大コンパクト部分群で，$K = Sp(2) \times Sp(1)$ である．

$$B^2_{\mathbb{H}} = G/K = Sp(2,1)/Sp(2) \times Sp(1)$$

となり，Riemann 対称空間である．

$B^2_{\mathbb{H}}$ の無限遠境界（半測地線の漸近同値類全体の集合）は G 不変で，単位球面 S^7 と同一視される．H を等方部分群として，$S^7 = Sp(2,1)/H$ と表される．$q \in S^7 = \partial B^2_{\mathbb{H}}$, $\bar{q}q = 1$, として，

$$D_q = \{p = (p_1, p_2) \in \mathbb{H}^2 \mid \bar{p}q = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 0\},$$
$$D_0 = \bigcup_{q \in S^7} D_q$$

とおく．そのとき，D_0 は TS^7 の余次元 3 の G 不変な部分束，分布となる．タイプ $(4,7)$ 分布であり，4 元 CR 構造をもつ．

分布 D_0 上に $\mathbb{H}^2$ の Euclid 内積の制限 $g_0(X, Y) = Re(\bar{X}Y)$, $X, Y \in D_q$, を考えると，D_0 上にサブ Riemann 計量を定める．g_0 は K 不変であるが，G 不変ではない．しかし，g_0 の共形構造 $[g_0]$ は G 不変である．即ち，(D_0, g_0) は共形変換群 $Sp(2,1)$ をもつ．

2.2.2. 束としての例

4 元型 Hopf 束

$$S^3 \longrightarrow S^7 \longrightarrow S^4$$

の一般化として，4 次元多様体 N 上の (非自明な) 主 $SU(2)$ 束 M と $SU(2)$ 接続による分布 D からなる (M, D) をとれば，タイプ $(4,7)$ 分布である．

(平坦でない)4 次元 Riemann 多様体 N 上の単位接束 $M = T_1N$ と Levi-Civita 接続による水平リフトによる分布 D からなる (M, D) をとれば, タイプ $(4, 7)$ 分布である.

2.2.3. インスタントン

タイプ $(4, 7)$ 分布 (M, D) として, 次をとる：
(i) M として, 向きづけられた (共形)Riemann 計量をもつ 4 次元多様体 N 上の (非自明な) 主 $SU(2)$ 束,
(ii) D として, N 上の $SU(2)$ ゲージ場 (接続)θ.
そして, 分布 D 上に, N 上の（共形）Riemann 計量をリフトして, (共形) サブ Riemann 計量を与えておく.

定理 1. N 上のインスタントン θ と, M 上の右半平坦な楕円型分布 D とは 1 対 1 に対応する.

インスタントンとは, ここでは自己双対接続, 即ち, 接続の曲率が自己双対 2-形式のことをいう.

右半平坦とは, M の主 H 束 P 上の $Sp(2, 1)/H$ 型の正規 Cartan 接続の右曲率 $K^0 = HK^0$ が 0 であるときをいう.

左曲率 HK^1 も 0 となる平坦な分布 $(Sp(2, 1)/H, D_0)$ に対応するのは, 基本インスタントンといわれる (S^4, g_0) の Levi-Civita 接続から誘導されるものである.

この命題は, 最近の超弦理論・M 理論でいう (7 次元) 重力場と (4 次元) ゲージ場の双対性の一般化と思える. 幾何構造 (G-構造) での積分可能性の程度を, 付随する接続の曲率で測る議論は, 計量構造での重力場の理論を一般化していると思えるからである.

2.3. 双曲型

2.3.1. ツイスター理論

分離 $Sp(2, 1)'$ は $Sp(3, \mathbb{R})$ に同型であることに注意する. $(V^{2n}, \Omega)(n \geq 3)$ を $2n$ 次元実シンプレクティック・ベクトル空間とし, V_k を k 次元イソトロピック部分空間とする. これらの自己同型群はシンプレクティック群 $Sp(n, \mathbb{R})$ である. 1 次元（イソトロピック）部分空間全体である射影空間 P^{2n-1} と, 2 次元イソトロピック部分空間全体である $IG_{2,2n}$ の間のダブル・ファイバリングを考える：

$$\begin{array}{ccccc} P^{2n-3} & \longrightarrow & F_{12} = \{V_1 \subset V_2\} & \longleftarrow & P^1 \\ & \swarrow & & \searrow & \\ P^{2n-1} = \{V_1\} & & & & IG_{2,2n} = \{V_2\}\ . \end{array}$$

P^{2n-1} は射影接触構造をもつ. $IG_{2,2n}$ は Grassmann 多様体 $G_{2,2n}$ の $4n - 5 = 4(n-2) + 3$ 次元（即ち, 余次元 1）部分多様体で, 分離 4 元型, Grassmann 型 3-接触構造をもつ. インシデンス空間 F_{12} は $4n - 4$ 次元旗多様体であり, ファイバー P^{2n-3} は接触構造をもつ.

P^{2n-1} の Legendre 直線 P^1 全体の空間が $IG_{2,2n}$ である. シンプレクティック形式 Ω が $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ となる V の座標系 (x_i, y_i) をとると, $IG_{2,2n} \subset G_{2,2n}$ は非同次座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_3 & \cdots & c_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & d_3 & \cdots & d_n & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

から，1つの関係式 $b_1 = a_2 + \sum_{i=3}^n a_i d_i - \sum_{i=3}^n b_i c_i$ がある．$IG_{2,2n}$ は P^{2n-1} の Legendre 測地線 P^1 のパラメーター空間である：$x_1 = t, x_2 = 1$ として，ジェネリックに，

$$\begin{cases} x_i &= c_i t + d_i, \quad (3 \le i \le n) \\ y_1 &= a_1 t + a_2 + \sum_{i=3}^n a_i d_i - \sum_{i=3}^n b_i c_i, \\ y_2 &= a_2 t + b_2, \\ y_i &= a_i t + b_i \quad (3 \le i \le n) \end{cases}$$

と表示できる．$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n; b_2, b_3, \cdots, b_n; c_3, \cdots, c_n; d_3, \cdots, d_n)$ が $IG_{2,2n}$ の座標系とみなせて，次元は $4n-5 = 4(n-2)+3$ がわかる．

さらに，

$$A_i = \frac{\partial}{\partial a_i} - d_i \frac{\partial}{\partial a_2} - c_i \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial d_i} + b_i \frac{\partial}{\partial b_2},$$
$$C_i = \frac{\partial}{\partial c_i} + b_i \frac{\partial}{\partial a_2} + a_i \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad B_i = \frac{\partial}{\partial b_i} - d_i \frac{\partial}{\partial b_2},$$

$(3 \le i \le n)$ とおくと，$[A_i, C_i] = 2\frac{\partial}{\partial a_1}, [A_i, D_i] = \frac{\partial}{\partial a_2}, [B_i, C_i] = \frac{\partial}{\partial a_2}, [B_i, D_i] = 2\frac{\partial}{\partial b_2}$，その他は 0，をみたす．$IG_{2,2n}$ 上の余次元 3 の分布 $D = D^{4(n-2)}$ を定め，タイプ $(4(n-2), 4(n-2)+3)$ 分布で分離 4 元型の 3-接触構造を定義する．特に，$n=3$ の場合，双曲型分布の平坦モデルである．

2.3.2. Legendre 測地線

射影幾何とは，直線の幾何で，不変にする群は $PSL(n, \mathbb{R})$ であるのに対応して，射影接触幾何とは，Legendre 直線の幾何で，不変にする群は $PSp(n, \mathbb{R})$ であるといえる．簡単に低次元でみてみる．アフィン・チャートの非同次座標系をとる．

・$\mathbb{R}^3 : (x, y, z)$ において，接触形式を $\omega = dy - zdx$ とする．x をパラメーターとして，Legendre 直線は

$$\left(x, \frac{1}{2}ax^2 + bx + c, ax + b\right)$$

と表されて，(a, b, c) が Legendre 直線全体の 3 次元空間のパラメーターとなる．独立変数 x に関する微分方程式として，$z'' = 0$ をみたす．$y''' = 0$ は前式からでてくる．

・$\mathbb{R}^5 : (x, y, z, u, v)$ において，接触形式を $\omega = dz - udx - vdy$ とする．x をパラメーターとして，Legendre 直線は

$$\left(x, cx + d, \frac{1}{2}(a + ce)x^2 + (b + cf)x + g, ax + b, ex + f\right)$$

と表されて，(a, b, c, d, e, f, g) が Legendre 直線全体の 7 次元空間のパラメーターとなる．微分方程式として，$y'' = 0, v'' = 0$ をみたす．$z''' = 0, u'' = 0$ は前式からでてくる．

射影接触構造と Legendre 測地線の概念を定義する．

射影接触構造の平坦モデルは，$P^{2n-1} = Sp(n, \mathbb{R})/H$ である．射影構造とみた場合は，$P^{2n-1} = SL(2n, \mathbb{R})/\tilde{H}$，$H = \tilde{H} \cap Sp(n, \mathbb{R})$ である．$n(2n+1) = 2n^2 + n$ 次元である $Sp(n, \mathbb{R})$ の Lie 代数

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ は, 第 2 種単純階別 Lie 代数の構造をもつ：

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \\ \mathfrak{h} &= \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \end{aligned}$$

$$\dim \mathfrak{g}_{-2} = \dim \mathfrak{g}_2 = 1, \ \dim \mathfrak{g}_{-1} = \dim \mathfrak{g}_1 = 2n-2.$$

$0 \in \mathbb{R}^{2n-1}$ での線形枠の群 $G^1(2n-1) = GL(2n-1, \mathbb{R})$ に対して, 2-枠 (2-ジェット) の群を $G^2(2n-1)$ と表す. 次をもつ：

$$\begin{aligned} G^2(2n-1) &\xrightarrow{\rho} G^1(2n-1) = GL(2n-1, \mathbb{R}), \\ SL(n, \mathbb{R}) \supset \tilde{H} &\xrightarrow{\rho} \rho(\tilde{H}), \\ Sp(n, \mathbb{R}) \supset H &\xrightarrow{\rho} \rho(H) = SC(2n-1), \end{aligned}$$

ここで, 左側は $G^2(2n-1) \supset \tilde{H} \supset H$, 右側は

$$G^1(2n-1) = \rho(\tilde{H}) \supset \rho(H) = SC(2n-1) = \left\{ \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A & \\ * & & & \end{pmatrix} \right\} \quad A \in GL(2n-2, \mathbb{R}).$$

一般の接触構造 D をもつ $2n-1$ 次元多様体 M に対して, それぞれ構造群 $G^1(2n-1), G^2(2n-1)$ をもつ枠束 $P^1(M), P^2(M)$ を考えると, 次をもつ：

$$\begin{array}{ccc} G^2(2n-1) \curvearrowright P^2(M) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & P^1(M) \curvearrowleft G^1(2n-1), \\ H \curvearrowright P(M) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & SP(M) \curvearrowleft SC(2n-1), \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M, \end{array}$$

ここで, 左側は $P^2(M) \supset P(M)$, 右側は $P^1(M) \supset SP(M)$ である.

$P^2(M)$ の H 簡約 $P(M)$ を, M 上の**射影接触構造**という.

$P(M)$ 上に $Sp(n, \mathbb{R})/H$ 型の正規 Cartan 接続 ω が存在することがわかる (cf.[S-Y]).

$\xi = (\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ に対して, $\omega_-(B(\xi)) = \xi, \omega_0(B(\xi)) = 0$, $\omega_+(B(\xi)) = 0$ となるような $P(M)$ 上に基底ベクトル場 $B(\xi)$ が一意に存在する. 射影を $\pi : P(M) \longrightarrow M$ として,

$$x_t = \pi((\exp tB(\xi))u_0), \quad u_0 \in P(M),$$

を射影接触構造の測地線という. 特に, $\xi = (0, \xi^2, \cdots, \xi^{2n-1})$ とした x_t を, **射影接触構造の Legendre 測地線**という.

2.3.3. 微分方程式

Legendre 測地線の微分方程式をどう特徴づけるかという問題を考える. 常微分方程式を ODE, 偏微分方程式を PDE と略すことにする.

まず, 2階微分方程式をみておく. 単独2階ODE:$y''=f(x,y,y')$に対して, $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}):(x,y,y')$において, $J^0:(x,y)$の微分同相の延長の接触微分同相のもとで, 解曲線を解曲線にうつすものを同値としての局所同値問題を考える. そのとき, $PT^*P^2=SL(3,\mathbb{R})/K$として, J^1上に主K束Qとその上に$SL(3,\mathbb{R})/K$型の正規Cartan接続ηが存在して, 2つの曲率A,Bが不変量となる (Tresse, Cartan). $A=B=0$の場合, $y''=0$と同値である.

一般化として,

(1) 連立2階ODE系 (Tanaka): $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n-2})$において, 射影構造の測地線の微分方程式を特徴づける

(2) 連立(1未知関数)2階PDE系：ホロノミック系で, $J^1(\mathbb{R}^{n-2},\mathbb{R})$における横断的なLagrange対であるLegendre 2-ウェブとして拡張する

の2つの違う立場があり, 統括する群は$SL(n,\mathbb{R})(n\geq 4)$である.

さて, 3階微分方程式をみてみよう. 単独3階ODE：$y'''=f(x,y,y',y'')$に対して, $J^2(\mathbb{R},\mathbb{R}):(x,y,y',y'')$において, $J^1:(x,y,y')$の接触微分同相の延長のもとで, 解曲線を解曲線にうつすものを同値としての局所同値問題を考える. そのとき, $LP^3=Sp(2,\mathbb{R})/K$ (LP^3はP^3のLegendre直線束) として, J^2上に主K束Qとその上に$Sp(2,\mathbb{R})/K$型の正規Cartan接続ηが存在して, 2つの曲率A,Bが不変量となる (Chern, Sato-Yoshikawa[S-Y]). $A=B=0$の場合, $y'''=0$と同値である.

一般化として,

(2)' 連立(1未知関数)3階PDE系：ホロノミック系で, $J^2(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$においてLagrange-Grassmann構造と関係づけて拡張する

の立場があり, 統括する群は$Sp(n,\mathbb{R})(n\geq 3)$であるが, 安易に(1)' 連立3階ODE系を考えた場合, 統括する群は単純Lie群にならないことが知られている. ここでは, 接触空間上の連立2階ODE系を考えて, 射影接触構造のLegendre測地線の微分方程式を特徴づけて, 統括する群が$Sp(n,\mathbb{R})(n\geq 3)$であることをみてみる.

$n=3$の場合, $\mathbb{R}^5:(x,y,z,u,v)$において, 接触形式を$\omega=dz-udx-vdy$とする. 接触構造(の接触分布)Dは,

$$D=<\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial y}+v\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}>$$

である. Legendre直線束Lの非同次座標系を, $\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial z}+p(\frac{\partial}{\partial y}+v\frac{\partial}{\partial z})+q\frac{\partial}{\partial u}+r\frac{\partial}{\partial v}$として, $\mathbb{R}^8:(x,y,z,u,v;p,q,r)$をとる. 各ファイバーには接触構造$\omega_1=dq-rdp$が付加されている. xをパラメーターとして, 連立1階常微分方程式系 (ここでは, $\mathbb{R}^8$上のベクトル場)

$$\begin{cases} x' &= 1, y'=p, z'=u+vp, u'=q, v'=r, \\ p' &= f(x,y,z,u,v,p,q,r), q'=rf, r'=g(x,y,z,u,v,p,q,r) \end{cases}$$

を考える. 主要部は, 接触空間$\mathbb{R}^5$上の連立2階常微分方程式系

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y,z,u,v,y',u',v'), \\ v'' &= g(x,y,z,u,v,y',u',v') \end{cases}$$

と思うことができる. $f=0,g=0$の場合は, 2.Legendre測地線で述べた例にほかならない.

連立微分方程式系に対して, $\mathbb{R}^8:(x,y,z,u,v;p,q,r)$において, $\mathbb{R}^5:(x,y,z,u,v)$の接触微分同相の延長のもとで, 解曲線を解曲線にうつすものを同値としての局所同値問題を考える. $\mathbb{R}^8$

での随伴した余枠から, 不変な自己同型群がわかり, G 構造が決まる. 平坦モデルと正規 Cartan 接続から, 曲率の不変量, そしてツイスター・ダイアグラムより次がわかる.

定理 2. 上の連立 1 階常微分方程式系に対して, $LP^5 = Sp(3,\mathbb{R})/K$ (LP^5 は P^5 の Legendre 直線束) として, 上の $\mathbb{R}^8$ 上に主 K 束 Q とその上に $Sp(3,\mathbb{R})/K$ 型の正規 Cartan 接続 η が存在して, 2 つの曲率 A, B が不変量となる.
(i) $B=0$ ならば, 解曲線は, 射影接触構造から定まる Legendre 測地線の測地流の軌道である.
(ii) $A=0$ ならば, 解曲線全体の空間に右半平坦な双曲型のタイプ $(4,7)$ 分布の構造がはいる.
(iii) $A=B=0$ ならば, $f=0, g=0$ の場合に同値である.

$Sp(3,\mathbb{R})$ の Lie 代数 $\mathfrak{sp}(3,\mathbb{R})$ は, 第 4 種単純階別 Lie 代数の構造をもち, $\dim \mathfrak{g}_{-4}=1, \dim \mathfrak{g}_{-3}=1, \dim \mathfrak{g}_{-2}=3, \dim \mathfrak{g}_{-1}=3$ である. 曲率 A の $\mathfrak{g}_0$ 加群としての生成元は, $\mathfrak{g}_{-2}\otimes\Lambda^2_{-3}$ の元で, 曲率 B の $\mathfrak{g}_0$ 加群としての生成元は, $\mathfrak{g}_0\otimes\Lambda^2_{-3}$ の元である.

一般の $n \geq 4$ の場合も同様に成立する. $\mathbb{R}^{2n-1}$: (x_i, z, u_i) において, 接触形式を $\omega = dz - \sum_{i=1}^{n-1} u_i dx_i$ とする. $4n-4 = 4(n-1)$ 次元である Legendre 直線束 L の非同次座標系を $(x_i, z, u_i; p_j, q_k)$ $(1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-1)$ とする. x をパラメーターとして, L での連立 1 階常微分方程式系の主要部は, 接触空間 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 上の $2(n-2)$ 個の連立 2 階常微分方程式系

$$\begin{cases} x_i'' &= f_i(x_j, z, u_j, x_j', u_j'), \\ q_i'' &= g_i(x_j, z, u_j, x_j', u_j') \quad (2 \leq i \leq n-1) \end{cases}$$

と思うことができる.

3. 3-接触構造

非退化なタイプ $(4,7)$ 分布は, 接触構造と違って有限型であることがわかった. では, 高次元化の非退化なタイプ $(4n, 4n+3)$ 分布 $(n \geq 2)$ ではどうであろうか.

非退化なタイプ $(2n, 2n+1)$ 分布である接触構造の分布は, シンプレクティック構造をもつ. また, シンプレクティック化や (必ずしも存在するわけではないけれども) 接触化など, 接触構造とシンプレクティック構造はお互いに密接に関係している. $4n$ 次元で 3-シンプレクティック構造なる概念を定義しておけば, $4n+3$ 次元で 3-接触構造の概念の定義はしやすいであろう.

3 次元多様体上で, 2 つの横断的な接触平面場をもつ双接触構造 (bi-contact structure) なる概念がある. 素朴にそれにならって, $4n+3$ 次元多様体上で, 3 つの横断的な接触分布をもつものを鼎接触構造 (tri-contact structure), (言葉をやさしくして)3-接触構造をもつといってよいが, 少し条件を付加する. $4n$ 次元多様体上で, 3-シンプレクティック構造とは, 3 つのシンプレクティック形式が, 各点で 2-形式のベクトル空間として 1 次独立であるときをいう. **3-接触構造**とは, 3 つの接触分布の共通部分をとることにより, 非退化なタイプ $(4n, 4n+3)$ 分布となり, 階数 $4n$ の分布上に 3-シンプレクティック構造をもつときをいう.

3-接触構造と 3-シンプレクティック構造は, あまりに一般的な概念すぎて, 幾何構造として捉えられないので, 条件をおいてみる:
（1）今まで議論してきた 4 元構造をそのまま受け継いだ拡張をする. これは, よく調べられている部分もあるが, 2.1. の立場で述べていく.
（2）射影余接束の接触構造, Legendre 特異点論の議論 ([I-I]) を, 3-接触構造の立場でどれだけ拡張できて, さらに興味あるものがでてくるかをみていく.

3.1. 4元構造に関する3-接触構造

よく知られているように, $2n$ 次元において, シンプレクティック構造は, 複素構造と, Kähler 計量 (大事なクラスとして, Calabi-Yau 計量) を介して結ばれている (cf. ミラー対称性):

$$\text{シンプレクティック構造} \longleftarrow \text{Kähler 計量} \longrightarrow \text{複素構造}.$$

$2n+1$ 次元においては, 接触構造は, CR 構造と, Sasaki 計量 (大事なクラスとして, Einstein-Sasaki 計量) を介して結ばれている:

$$\text{接触構造} \longleftarrow \text{Sasaki 計量} \longrightarrow \text{CR 構造}.$$

さて, $4n$ 次元において, 超シンプレクティック構造は, 超複素構造 (4元構造) と, 超 Kähler 計量 ($\Longrightarrow$ Ricci 平坦) を介して結ばれているが, お互いに他を規定するほどに強い:

$$\text{超シンプレクティック構造} \longleftarrow \text{超 Kähler 計量} \longrightarrow \text{超複素構造}.$$

厳密には, 超複素構造と4元構造は区別されて, (概) 超複素構造は $GL(n,\mathbb{H})$ 構造で超 Kähler 計量 ($Sp(n)$) と関係し, (概) 4元構造は $GL(n,\mathbb{H})\mathbb{H}^*$ 構造で4元 Kähler 計量 ($Sp(n)Sp(1)$) と関係する. $4n+3$ 次元においては, 超接触構造は, 超 CR 構造 (4元 CR 構造), 通常 3-Sasaki 計量とよばれる超 Sasaki 計量 ($\Longrightarrow$ 正の Einstein) を介して結ばれている:

$$\text{超接触構造} \longleftarrow \text{超 Sasaki 計量} \longrightarrow \text{超 CR 構造}.$$

$4n$ 次元多様体 M 上の超シンプレクティック構造とは, 3つのシンプレクティック形式 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ が存在して, Ω_i の定める線形同型束写像を $\varphi_i : TM \longrightarrow T^*M$ として, $J_1 = \varphi_3^{-1}\varphi_2, J_2 = \varphi_1^{-1}\varphi_3, J_3 = \varphi_2^{-1}\varphi_1$ は, 4元関係式: $J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = J_1J_2J_3 = -1$ をみたすときをいう. そのとき, 計量 g は, $\phi = \varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_3 (= \varphi_3\varphi_1^{-1}\varphi_2 = \varphi_2\varphi_3^{-1}\varphi_1)$ による線形同型束写像 $\phi : TM \longrightarrow T^*M$ によって定まる. $4n+3$ 次元多様体 M 上の4元型の3-接触構造である超接触構造とは, 3つの横断的な接触構造 D_1, D_2, D_3 が存在して, 共通部分の階数 $4n$ の分布 $D = \cap_{i=1,2,3} D_i$ に超シンプレクティック構造が存在するときをいう. われわれの立場で, 以下みていこう.

非退化なタイプ $(4,7)$ 分布の2. での議論をそのまま拡張したものが, (分離) 4元型の3-接触構造である非退化なタイプ $(4n, 4n+3)$ 分布 (M, D) である.

- 非退化: 合成写像 $D^\perp \longrightarrow \Lambda^2 D^* \longrightarrow \Lambda^{4n} D^*$, (第2の写像は $\alpha \longmapsto \alpha^{2n} = \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha$), が非退化のときをいう.
- 定義と平坦モデル: $\mathbb{R}^{4n+3}$ の局所座標系を
$(x_i, y_i, z_i, w_i; r, s, t)$ として, 3つの1-形式

$$\begin{cases} \omega_1 &= dr - \sum_{i=1}^n y_i dx_i - \sum_{i=1}^n w_i dz_i, \\ \omega_2 &= ds - \sum_{i=1}^n z_i dx_i \mp \sum_{i=1}^n y_i dw_i, \\ \omega_3 &= dt - \sum_{i=1}^n w_i dx_i - \sum_{i=1}^n z_i dy_i, \end{cases}$$

を零化する $4n$ 個のベクトル場

$$\begin{cases} X_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial r} + z_i \frac{\partial}{\partial s} + w_i \frac{\partial}{\partial t}, \\ Y_i &= \frac{\partial}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial}{\partial t}, \\ Z_i &= \frac{\partial}{\partial z_i} + w_i \frac{\partial}{\partial r}, \\ W_i &= \frac{\partial}{\partial w_i} \pm y_i \frac{\partial}{\partial s}, \end{cases}$$

で張られる分布

$$D_0 = \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\} = < X_i, Y_i, Z_i, W_i \ (i = 1, \cdots, n) >$$

は,

$$[X_i, Y_i] = [Z_i, W_i] = -\frac{\partial}{\partial r},$$
$$[X_i, Z_i] = \pm[W_i, Y_i] = -\frac{\partial}{\partial s},$$
$$[X_i, W_i] = [Y_i, Z_i] = -\frac{\partial}{\partial t},$$

その他は0, だから, (分離) 4元型のタイプ $(4n, 4n+3)$ 分布である.

● 有限型と実型：群 $G = Sp(n+2, \mathbb{C})$ の Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n+2, \mathbb{C})$ は, 第2種単純階別 Lie 代数の構造をもつ. 放物部分代数, べき零部分代数を, それぞれ $\mathfrak{g}', \mathfrak{m}$ とする：$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}'$. (分離) 4元型のタイプ $(4n, 4n+3)$ 分布 (M, D) のシンボル代数 $\mathfrak{m}(x)(x \in M)$ に対して,

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(x) \cong \mathfrak{m}$$

である. 一方, $\mathfrak{m}$ の延長は, 有限型で, 単純階別 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(n+2, \mathbb{C})$ である. 実型の非コンパクト型において, $G = Sp(n+1, 1)$ は4元型, $G = Sp(n+1, 1)' \cong Sp(n+2, \mathbb{R})$ は分離4元型である.

● 正規 Cartan 接続と基本不変量：(分離) 4元型のタイプ $(4n, 4n+3)$ 分布 (M, D) に対して, $G = Sp(n+1, 1), Sp(n+1, 1)'$ として, G/G' 型の正規 Cartan 接続 ω が, M の主 G' 束 P 上に一意に存在する. そして, Cartan 接続 ω は, $n \geq 2$ に対して, ただ1つの基本不変量をもつ：HK^1（曲率部分）, $\mathfrak{g}_0$-加群としての生成元は, $\mathfrak{g}_0 \otimes \Lambda^2_{-2}$ の元である.

● 4元型の $Sp(n+1, 1)$ の典型的な例：2.2. での 2.2.1. と 2.2.2. の議論が, 4元型 Hopf 束

$$S^3 \longrightarrow S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

としていえる. $\mathbb{R}^{2n+1}$ での不変な接触構造をもつ Heisenberg 群, 代数に対応して, $\mathbb{R}^{4n+3}$ での不変な (分離) 4元型の 3-接触構造をもつ 3-Heisenberg 群, 代数が定義できて, 行列で表現できる [A].

● 分離4元型の $Sp(n+1, 1)' \cong Sp(n+2, \mathbb{R})$ に対して, 2.3. での 2.3.1. ツイスター理論と 2.3.3. 微分方程式が, まったく同様にいえる.

$G \subset SO(n)$ である G を, 微分形式で特徴づける問題を考える (cf. キャリブレーション). ベクトル空間 V でみてみる. 7次元ベクトル空間 $V = \mathrm{Im}\mathbb{O}$ において, G_2 で不変な (結合的) 基本 3-形式, そして, 8次元ベクトル空間 $V = \mathbb{O}$ において, $Spin(7)$ で不変な (Cayley) 基本 4-形式といった例がある (Bryant). また, $2n$ 次元ベクトル空間 V において, Calabi-Yau 計量と関係する $SU(n)$ で不変なシンプレクティック形式と2つの n-形式といった例もある (Hitchin).

同様にして, $4n$ 次元ベクトル空間 V において, 超 Kähler 計量と関係する $Sp(n)$ で不変な3つのシンプレクティック形式 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ の特徴づけ問題を考える. $n = 1$, 即ち, 4次元の場合, 2.1.1. でみたように, 1次独立な5つの関係式で特徴づけられる：

$$\Omega_i \wedge \Omega_i - \Omega_j \wedge \Omega_j = 0, \quad \Omega_i \wedge \Omega_j = 0 \quad (i \neq j).$$

$n=2$, 即ち, 8 次元の場合, 7 つの関係式で特徴づけられる：

$$\Omega_i \wedge (\Omega_i \wedge \Omega_i - 3\Omega_j \wedge \Omega_j) = 0, \quad \Omega_i \wedge \Omega_j \wedge \Omega_k = 0 \quad (i \neq j \neq k).$$

$n=3$, 即ち, 12 次元の場合, 9 つの関係式で特徴づけられる：

$$\Omega_i \wedge \Omega_i \wedge \Omega_i \wedge \Omega_i - 3(\Omega_i \wedge \Omega_i \wedge \Omega_j \wedge \Omega_j + \Omega_i \wedge \Omega_i \wedge \Omega_k \wedge \Omega_k - \Omega_j \wedge \Omega_j \wedge \Omega_k \wedge \Omega_k) = 0,$$
$$\Omega_i \wedge \Omega_j \wedge (\Omega_i \wedge \Omega_i - 3\Omega_k \wedge \Omega_k) = 0 \quad (i \neq j \neq k).$$

一般の $4n$ 次元の場合, Ω_i $(i=1,2,3)$ の $n+1$ 外積の $2n+3$ 個の関係式で特徴づけられる (今のところ, 必要条件のみ証明). 関係式は, $(\Omega_1 + i\Omega_2)^{n+1} = 0$ に $O(3,\mathbb{C})$ を作用してえられる $2n+3$ 個の式である. ただし, Ω_i $(i=1,2,3)$ を $\mathbb{C}^3$ 値 2-形式の空間の元とみて, $O(3,\mathbb{C})$ を作用させる [A].

3.2. 射影余接束に関する 3-接触構造

M を $n+1$ 次元多様体とすると, よく知られているように, $2n+1$ 次元の射影余接束 PT^*M 上に標準的な接触構造をもつ. 複素 $n+1$ 次元 (実 $2n+2$ 次元)Kähler 多様体 M の $4n+3$ 次元の実射影余接束 (あるいは, 単位接束)PT^*M 上に自然な 3-接触構造をもつことをみる. 条件をゆるめて, 複素構造を概複素構造ではどうか, Kähler 計量を一般の線形接続ではどうかという問題は, ここでは省略する.

$PT^*_{\mathbb{C}}M$ を複素 $2n+1$ 次元 (実 $4n+2$ 次元) の複素射影余接束とする. 次を考える：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}P^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}P^{2n+1} & \longrightarrow & PT^*M^{4n+3} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\
 & & \mathbb{C}P^n & \longrightarrow & PT^*_{\mathbb{C}}M^{4n+2} \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\
 & & & & M^{2n+2}.
\end{array}$$

$\pi : PT^*M^{4n+3} \longrightarrow M^{2n+2}$ を自然な射影とする. $PT^*_{\mathbb{C}}M$ 上には標準的な複素接触構造 D' をもち, 実余階数 2 である. それの標準的な局所的複素接触形式を $\omega_{\mathbb{C}}$ として, $\omega_1 = \mathrm{Re}\omega_{\mathbb{C}}, \omega_2 = \mathrm{Im}\omega_{\mathbb{C}}$ とおく. 束 $\pi_2 : PT^*M \longrightarrow PT^*_{\mathbb{C}}M$ の各ファイバーは Hopf 束であるが, Kähler 計量を用いた $\mathbb{R}P^1 = S^1 = U(1)$ 接続によって, $PT^*_{\mathbb{C}}M$ 上の分布 D' を水平リフトすれば, PT^*M 上に余次元 3 の分布 D が定義される. もう 1 つの 1-形式 ω_3 が存在して, 局所的に $D = \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ となる. 分布 (PT^*M, D) は, タイプ $(4n, 4n+3)$ 分布で 3-接触構造をもつ.

$\mathbb{C}^{n+1}$: $(z_1, \cdots, z_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{n+1}, y_1, \cdots, y_{n+1})$, $z_i = x_i + iy_i$, でみてみる. 余接束 $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ の局所座標系は, $\sum_{i=1}^{n+1} w_i dz_i$ において,

$$\begin{aligned}
&(z_1, \cdots, z_{n+1}, w_1, \cdots, w_{n+1}), \qquad w_i = u_i + iv_i \\
=&(x_1, \cdots, x_{n+1}, y_1, \cdots, y_{n+1}, u_1, \cdots, u_{n+1}, v_1, \cdots, v_{n+1})
\end{aligned}$$

である. 射影余接束 $PT^*\mathbb{C}^{n+1}$ の非同次局所座標系として, $x_{n+1} = s, y_{n+1} = r, u_{n+1} = t, v_{n+1} = 1$ とおくと,

$$\begin{cases}
\omega_1 &= -dr + tds + \sum_{i=1}^n u_i dx_i - \sum_{i=1}^n v_i dy_i, \\
\omega_2 &= ds + tdr + \sum_{i=1}^n v_i dx_i + \sum_{i=1}^n u_i dy_i, \\
\omega_3 &= -dt - \frac{1}{2}(rds - sdr) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i dx_i - x_i dy_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (v_i du_i - u_i dv_i)
\end{cases}$$

がわかる．ω_1 から tds を除いて (-1) をかけたもの，ω_2 から tdr を除いたもの，ω_3 から $\frac{1}{2}(rds-sdr)$ を除いて (-1) をかけたものを，それぞれ改めて，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とする．分布 $D = \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ に制限することによって，$(PT^*\mathbb{C}^{n+1}, D)$ は，特にこの場合，4元型の3-接触構造である．一般の M の場合，もちろん4元型ではない．

3.3. 3-Legendre 特異点論をめざして

よく知られているように，接触構造に対して，Legendre の冠のつくはめこみ，ファイブレーション，リフト，変換等という概念がある．3-接触構造に対しても同様に，3-Legendre はめこみ，ファイブレーション，リフト，変換を定義する．

• 複素 $n+1$ 次元 Kähler 多様体 M の実 $4n+3$ 次元射影余接束 PT^*M 上の上記の3-接触構造 D が，局所的 (あるいは，芽のレベル) に $D = \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ である3つの1-形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ で与えられているとする．D に接する極大積分多様体の次元は n であることがわかるから，D の n 次元積分多様体を3-Legendre 部分多様体という．例として，上記の3.2. での $(PT^*\mathbb{C}^{n+1}, D)$ において，

$$N = \{(x_i, y_i, u_i, v_i; r, s, t) \mid y_i = u_i = v_i = 0, r, s, t = \text{定数}\}$$

は，3-Legendre 部分多様体である．n 次元多様体 N から PT^*M へのはめこみ f が3-Legendre はめこみであるとは，$f^*\omega_1 = f^*\omega_2 = f^*\omega_3 = 0$ のときをいう．

• 束 $\pi : PT^*M \longrightarrow M$ を，3-Legendre ファイブレーションというならば，各ファイバーは $2n+1$ 次元接触構造をもつから，3-Legendre ファイブレーションは接触ファイブレーションである．

• M の n 次元全実 (Kähler 形式に関して，イソトロピック) 部分多様体 N の PT^*M への3-Legendre リフトを定義する．N の複素化した多様体 $N_{\mathbb{C}}$ は，M の複素余1次元部分多様体であるから，複素射影余接束 $PT^*_{\mathbb{C}}M$ への複素 Legendre リフトがある．それをさらに，実射影余接束 PT^*M へ水平リフトした $N^L \subset N^L_{\mathbb{C}}$ を，3-Legendre リフトという．そのとき，3-Legendre リフト N^L は，PT^*M の3-Legendre 部分多様体である．

• $n+1$ 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ と双対複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1^*}$ に対して，インシデンス空間 $Q_{\mathbb{C}} \cong PT^*_{\mathbb{C}}\mathbb{C}P^{n+1} \cong PT^*_{\mathbb{C}}\mathbb{C}P^{n+1^*}$ と，さらに実インシデンス空間 $Q \cong PT^*\mathbb{C}P^{n+1} \cong PT^*\mathbb{C}P^{n+1^*}$ を考えれば，Q において3-Legendre 変換が定義される．アフィン・チャートの $PT^*\mathbb{C}^{n+1}$ で，3-Legendre 変換 L を具体的にみてみる：

$$L : PT^*\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow PT^*\mathbb{C}^{n+1},$$

$$L : (x_i, y_i, u_i, v_i; r, s, t) \longmapsto (X_i, Y_i, U_i, V_i; R, S, T)$$

$$\begin{cases} X_i &= u_i, Y_i = v_i, U_i = x_i, V_i = y_i, \\ R &= \sum_{i=1}^n (x_i u_i - y_i v_i) - r, \\ S &= -\sum_{i=1}^n (x_i v_i + y_i u_i) - s, \\ T &= -\sum_{i=1}^n (x_i y_i + u_i v_i) - t. \end{cases}$$

これらの概念を手に入れることによって，今，われわれは3-Legendre 特異点論の緒に就いたわけである．

謝辞

佐藤肇先生をはじめ, 阿賀岡芳夫さん, 石川剛郎さん, 高橋雅朋さんには, いろいろと議論にのってもらい多くのことを教えていただき, ここに改めて感謝をいたします. 阿賀岡さんには, 一般 $4n$ 次元での 3 つのシンプレクティック形式を使った 4 元構造の特徴づけに関して, 表現論を使った膨大な計算をしていただきました. 石川さん, 高橋さんには, 従来の Legendre 特異点論から 3-接触構造の射影余接束, 3-Legendre 特異点論への拡張, 応用の是非などについて論じていただきました.

References

[A] Y. Agaoka, private communications.

[I-I] 泉屋-石川, 応用特異点論, 共立出版, 1998.

[M] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical Surveys and Monographs 91, American Mathematical Society, 2002.

[S-Y] H. Sato-A. Y. Yoshikawa, *Third order ordinary differential equations and Legendre connections*, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), pp.993–1013.

[T] N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras*, Hokkaido Math. J., 8 (1979), pp.23-84.

[Y] K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras*, Advanced Studies in Pure Math., 22 (1993), pp.413–494.