数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 117-128

On Chow groups of surfaces over local fields

Takao Yamazaki
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

局所体上の曲面の Chow 群

山崎 隆雄
筑波大学数学系

1 イデアル類群と Chow 群

スキームの Chow 群は、代数的整数論におけるイデアル類群の拡張概念である。そこで、初めにイデアル類群に関する二つの定理を復習する。K を代数体、O_K と Cl_K をその整数環及びイデアル類群とする。

定理 1.（イデアル類群の構造） Cl_K は有限群である。

定理 2.（ヒルベルトの類体論） H を K の最大不分岐アーベル拡大とするとき、相互写像

$$\rho_K : \mathrm{Cl}_K \to \mathrm{Gal}(H/K)$$

は同型である。

補足 1. 相互写像 ρ_K は次のように記述できる：$\mathfrak{p}$ を O_K の素イデアルとすると、その剰余体 $\kappa(\mathfrak{p}) = O_K/\mathfrak{p}$ は有限体であるから、その絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{\kappa(\mathfrak{p})}/\kappa(\mathfrak{p}))$ は標準的に（フロベニウス写像を 1 に対応させることにより）$\hat{\mathbb{Z}}$ と同型となる。自然な射影 $O_K \twoheadrightarrow O_K/\mathfrak{p}$ の導く写像 $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Gal}(\bar{\kappa(\mathfrak{p})}/\kappa(\mathfrak{p})) \to \mathrm{Gal}(H/K)$ による $1 \in \hat{\mathbb{Z}}$ の像が、ρ_K による $\mathfrak{p}$ の類の像である。

スキーム X に対して、その上のゼロサイクルのなす Chow 群は次の式で定義される [16]：

$$\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{coker}(\bigoplus_{y \in X_1} \kappa(y)^* \xrightarrow{\mathrm{ord}} \bigoplus_{x \in X_0} \mathbb{Z}).$$

ここで、X_i は X 上の i 次元の（スキーム論的な）点全体の集合、$\kappa(y)$ は $y \in X$ での剰余体を表す。写像 ord は、基本的には点 x での付値を取ることで定義される。（$\{y\}$ の閉包が特異点を持つときは、正規化を取ることが必要となる。）上のように O_K が代数体の整数環であるとき、$X = \mathrm{Spec}(O_K)$ の Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X)$ は Cl_K と一致する。（この場合 X_0 は O_K の素イデアル全体の集合、X_1 は剰余体 K を持つ点ひとつだけから成る集合となる。）

上に述べた二つの定理は一般の X に対してはどのようになるであろうか。つまり、次の二つの問題を考えたい。

問題 1. $\mathrm{CH}_0(X)$ のアーベル群としての構造は？

問題 2. $\mathrm{CH}_0(X)$ は、（ガロア群のような）X の数論的な情報とどのような関係にあるか？

本稿ではこれらの問題を、主に X が局所体上の曲面の場合に考える。（ほかの基礎体や一般次元の多様体に対する Chow 群については、Colliot-Thélène によるサーベイ [9], [10] を参照。）第二節では、問題 1 について知られていることをまとめたあと、新しい結果を述べる。主結果は定理 7 である。第三節では、問題 2 について同様に話を進める。主結果は定理 9 である。ここでは、「数論的な情報」としてブラウアー群が現れる。（ガロア群は体の拡大を支配するものであるのに対し、ブラウアー群は斜体を支配するものであることに注意。）第四節と第五節では主結果の証明について簡単に触れる。

なお、局所体上の多様体に対して定理 2 のようにガロア群を記述するためには $\mathrm{CH}_0(X)$ の代わりに高次 Chow 群を利用する必要がある。この方向の研究については [5] [26] [34] [35] [18] を参照。

記号. 以下、本稿を通して次の記号を用いる：自然数 n とアーベル群 A に対して A_n と A/n で $n : A \to A$ の核と余核を表し、$A_{\mathrm{Tor}} = \cup_{n\geq 1} A$ と書く。素数 l に対して $A\{l\} = \cup_{m\geq 1} A_{l^m}$ とする。A_{div} で A の最大可除部分群を表す。

2 Chow 群の構造

X を体 k 上の非特異射影的かつ幾何的に連結な多様体とする。初めに $\mathrm{CH}_0(X)$ の群構造について一般に成り立つことを復習する。

まず、次数写像と呼ばれる準同型 $\deg : \mathrm{CH}_0(X) \to \mathbb{Z}$ がある。この写像の像は指数有限である。次数写像の核を $A_0(X)$ と書くと、以上のことは次の完全列で記述される：

$$0 \to A_0(X) \to \mathrm{CH}_0(X) \stackrel{\deg}{\to} \mathbb{Z} \to (\text{有限群}) \to 0.$$

次に、アルバネーゼ写像と呼ばれる準同型 $\mathrm{alb}_X : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(k)$ がある。ここで Alb_X は X のアルバネーゼ多様体と呼ばれる k 上のアーベル多様体であり、$\mathrm{Alb}_X(k)$ はその上の k-有理点のなす群。アルバネーゼ写像の核を $T(X)$ と書くと、以上のことは次の完全列でまとめられる

$$0 \to T(X) \to A_0(X) \stackrel{\mathrm{alb}_X}{\to} \mathrm{Alb}_X(k).$$

基礎体 k が p-進体のときは、写像 alb_X の像は指数有限であり（[29] p. 409）、$\mathrm{Alb}_X(k)$ の構造もよく分かる。実際、$r = \dim \mathrm{Alb}_X$ とおけば $\mathrm{Alb}_X(k)$ は $\mathbb{Z}_p^{r[k:\mathbb{Q}_p]} \oplus$ (有限群) の形の群と同型である。

X が一次元の場合、アルバネーゼ多様体はヤコビ多様体に一致し、$T(X)$ は自明である。従って、$\mathrm{CH}_0(X)$ の構造は（ほぼ）完全に分かったことになる。しかし、高次元では $T(X)$ の構造は非常に難しい。**以下この節を通して、k は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、X は二次元であると仮定する。** この場合、$T(X)$ の構造は次のように予想されている：

予想 1. (Colliot-Thélène [10] p. 56, Raskind, Spiess [25] 3.5.4.)
$T(X)_{\mathrm{div}}$ は uniquly divisible（すなわち $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の構造を持つ）。さらに、$F(X) := T(X)/T(X)_{\mathrm{div}}$ は有限群。

注意 1. 予想 1 が正しければ $T(X)_{\mathrm{Tor}} \cong F(X)$ である。

この予想に関して、任意の曲面 X に対して知られていることは、次の定理でまとめられる：

定理 3. (Colliot-Thélène [10] 2.1 を参照.)
（1）l を素数とする。($l = p$ でもよい。) $T(X)\{l\}$ は、$(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^{\oplus r} \oplus$ (有限群) の形の群に同型。(特に、任意の自然数 n に対して $T(X)_n$ は有限。予想 1 が正しければ $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ はゼロとなる。)
（2）$l \neq p$ を素数とする。$T(X)$ は l-可除群と有限群の直和に同型。(特に、n が p と互いに素な自然数ならば $T(X)/n$ は有限。)

$T(X)$ の構造の複雑さは、$p_g(X) = \dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X)$ が目安となる。実際、$p_g(X) = 0$ の場合は上の定理よりかなり多くのことが知られている：

定理 4. (Colliot-Thélène, Raskind [11], 斉藤 [27].) $p_g(X) = 0$ を仮定する。さらに、X を k の代数閉包まで係数拡大した多様体 $\bar{X}$ に対してすぐ次に述べる Bloch 予想が成り立つことを仮定する。このとき $T(X)$ は有限群である。(特に $T(X)_{\mathrm{div}} = 0, T(X) = F(X)$ となり、予想 1 が成立する。) さらに X がよい還元 Y を持つことを仮定すると、次が成り立つ：

$$T(X)\{l\} \text{ は } T(Y)\{l\} \text{ と同型} \qquad (l \neq p \text{ は素数}),$$
$$T(X)\{p\} \text{ は } \mathrm{Hom}(\mathrm{NS}(\bar{X})\{p\}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \text{ の部分商と同型}.$$

ここで $\mathrm{NS}(\bar{X})$ は $\bar{X}$ の Néron-Severi 群である。

注意 2.
（1）Y が有限体上の非特異射影的な多様体ならば、$T(Y)$ は有限群であることが知られている。([19], [13]. Y の次元は任意でよい。) $T(Y)$ は還元 Y だけで決まる（いわば有限体上の代数幾何だけの言葉で書かれる）群であることに注意。
（2）$\mathrm{NS}(\bar{X})$ は有限生成アーベル群であるから $\mathrm{NS}(\bar{X})\{p\}$ も有限群である。$\mathrm{NS}(\bar{X})$ は係数拡大 $\bar{X}$ だけで決まる（いわば閉体上の代数幾何だけの言葉で書かれる）群であることに注意。

Bloch 予想. (Bloch [3].) V を $\mathbb{C}$（と同型な体）上の非特異射影的曲面とする。

(p-進体の代数閉包は $\mathbb{C}$ と同型であることに注意。) $p_g(V)=0$ ならば $T(V)=0$ である。

この予想の逆は Mumford によって証明されている。Bloch 予想の方も、小平次元が 2 でない曲面に対しては示されている [7]。さらに、小平次元が 2 の曲面であっても、証明されている例がいくつかある [2], [17], [36]。しかし、一般の曲面に対しては未解決である。この予想は閉体上の代数幾何内部の問題であることに注意しよう。つまり、上の定理は p-進体上の代数幾何の問題を閉体上の代数幾何に帰着している定理と見られる。

$p_g(X)=0$ であるような曲面については具体的な曲面に対する精密な結果も多々得られている。([14] [15] [12] 2.8 を参照。) 他方、$p_g(X)\neq 0$ であるような曲面に対してはかなり少ない結果しか知られていない。ここでは次の定理5・6を紹介する。その他には Raskind [24] の結果がある。

定理5.(Raskind-Spiess [25].) C_1 と C_2 を k 上の曲線で、その還元についてある仮定を満たすものとする。すると、$X=C_1\times C_2$ に対して $F(X)=T(X)/T(X)_{\mathrm{div}}$ は有限群である。

曲線に対する仮定は、雑にいうと「還元が good ordinary と multiplicative な還元の混合」というものである。精密な形については上記の文献を参照。この仮定は、ヤコビ多様体が ordinary なよい還元や multiplicative な還元を持つ場合は成立するが、ordinary でないよい還元を持つ場合は成立しない。

C_1,C_2 の種数が 1 以上の場合、$T(X)_{\mathrm{div}}$ は実際に無限群となることが [8] から分かる ([10] p. 61 を参照)。これは、$p_g(X)=0$ のときには現れなかった、新しいタイプの群である。

注意3. $T(X)_{\mathrm{div}}$ が uniquely divisible かどうか分かっていないため、$T(X)_{\mathrm{Tor}}\to F(X)$ が同型かどうかは分からない。

次に、$F(X)$ について考えよう。予想1によれば、これは $T(X)_{\mathrm{Tor}}$ と同型になるべきであるが (注意1)、後者について次の定理がある:

定理6.(Spiess [32].) E_1,E_2 を k 上のよい還元を持つ楕円曲線とする。(還元は ordinary でなくてもよい。) $l\neq p$ を素数とすると、$X=E_1\times E_2$ に対して $T(X)\{l\}\cong T(Y)\{l\}$ が成り立つ。(特に $T(X)\{l\}$ は有限群である。)

注意4. E_1,E_2 の還元が ordinary の場合は、定理5と定理6から $l\neq p$ のとき $T(X)\{l\}\cong F(X)\{l\}$ と分かる。

つまり、定理6の X の場合 $T(X)\{l\}$ は $p_g(X)=0$ の場合と同じく還元だけで決まってしまう。これに反し、次の定理は $F(X)\{p\}$ が $p_g(X)=0$ のときと大きく違う振る舞いをすることを示す。これは本稿の第一の主結果である。

定理7.([38], [39].) E_1,E_2 を次の (1) (2) のいずれかを満たす k 上の楕円曲線として、$X=E_1\times E_2$ とする:
(1) E_1,E_2 は有限体上の ordinary な楕円曲線の標準持ち上げの generic fiber (この場合、k は $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大となる);
(2) E_1,E_2 は split multiplicative 還元を持つ楕円曲線。

このとき、k の有限次完全分岐拡大の列 $k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots$ で、$n \to \infty$ のときに $F(X \times \operatorname{Spec} k_n)\{p\}$ の位数が任意に大きくなるようなものが存在する。(定理5によって $F(X \times \operatorname{Spec} k_n)$ は有限群である。)

k_n は k の完全分岐拡大なので、$X \times \operatorname{Spec} k_n$ の還元は n によらずに一定である。従って(1)の場合、p と異なる素数 l に対しては $F(X \times \operatorname{Spec} k_n)\{l\}$ が n に依存しないことが定理6から分かる。実際には(1)(2)のどちらの場合にもこの群は自明になる。それに対し、$F(X \times \operatorname{Spec} k_n)\{p\}$ の方は任意に大きくなるという著しい対照が、定理7では見られる。また、$p_g(X) = 0$ の場合、定理4によれば $F(X)\{p\}$ の構造は代数閉体への係数拡大 $\bar{X}$ によって有限個の可能性だけに限定されていた。定理7の曲面はこの点でも大きく違う振る舞いをする。以上のように、定理7に現れた群 $F(X)\{p\}$ は($T(X)_{\mathrm{div}}$ と同じく)$p_g(X) = 0$ の場合とは大きく異る振る舞いをする群である。

3 ブラウアー群との関係

これまでの通り、k は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする。X は k 上の非特異射影的かつ幾何的に連結な多様体とし、少しの間だけ次元は任意とする。このとき、$\mathrm{CH}_0(X)$ から X のブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)$ の双対への標準的な準同型

$$\rho_X : \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が存在する。

補足2. 写像 ρ_X は次のように記述できる。(補足1の相互写像 ρ_K との類似に注意。)x を X の閉点とすると、その剰余体 $\kappa(x)$ は k の有限次拡大であるから、そのブラウアー群 $\mathrm{Br}(\kappa(x))$ は標準的に(局所類体論の invariant 写像によって)$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ と同型となる。その双対写像 $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(\kappa(x)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と、埋め込み $x \to X$ の導く写像 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(\kappa(x)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の合成による $1 \in \hat{\mathbb{Z}}$ の像が ρ_X による x の類の像である。

X が一次元のとき、写像 ρ_X は(ほぼ)同型であることが Lichtenbaum [20] により示されている。しかし、X の次元が2以上の場合は一般に ρ_X は全射でも単射でもない。ただし、ρ_X の像については十分に一般的な状況下でよい記述が得られている(Colliot-Thélène, 斉藤 [12])。

以下では X を二次元に限定して ρ_X の核について考察する。この方向への初めの結果は次の定理である。

定理8.(斉藤 [28]. Colliot-Thélène [9] 8.4 も参照。)
X が次の三条件を満たせば ρ_X は単射である:(1)$p_g(X) = 0$、(2)$\bar{X}$ は Bloch 予想を満たす、(3)Alb_X は潜在的によい還元を持つ。

条件(1)(2)は定理4でも仮定されている、予想1が成り立つための十分条件であった。条件(3)は定理4では不要だった仮定であるが、ここでは本質的である。実際、Parimara-Suresh [23] により ρ_X が非自明な(有限の)核を持つような X が構成されている。その例は(1)(2)を満たすが(3)を満たさな

い。一方、(条件（1）（2）の下で) ρ_X が単射になるためのより緩い十分条件が佐藤 [30] で得られている。このように、$p_g(X)=0$ の場合は ρ_X の核の様子はだいぶ詳しく分かってきている。

その反面で $p_g(X)\neq 0$ であるような曲面 X についてはCH$_0(X)$ はかなり違った振る舞いをすることを前節で見た。実際、この場合には $T(X)_{\mathrm{div}}$ が無限群になりうるが、直ちに分かるとおり $T(X)_{\mathrm{div}}$ は $\ker(\rho_X)$ に含まれる。すなわち ρ_X は無限群を核に持つ。それだけでなく、$F(X)=T(X)/T(X)_{\mathrm{div}}$ の方も (p-torsion 部分は) $p_g(X)=0$ の場合と大きく違う振る舞いをすることを定理７で見た。そこで、ρ_X はこの部分の情報を汲み取るのかどうかが問題になる。それを考察したのが次に述べる本稿の第二の主結果である。

定理９.([39].) E_1,E_2 を split multiplicative 還元を持つ楕円曲線として、$X=E_1\times E_2$ とする。このとき、

$$\ker(\rho_X)=T(X)_{\mathrm{div}}.$$

すなわち、ρ_X は単射 $F(X)\hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を誘導する。なお、定理７（１）の楕円曲線の場合に同じ結論が成り立つかどうかは分かっていない。

4　サントミック・コホモロジー

この節では定理７（１）の証明の方針を述べる。主要な道具は、Spiess [32] の主結果と、K-コホモロジー群とサントミック・コホモロジーを関係づける [37] の方法である。

k を $\mathbb{Q}_p$ の不分岐有限次拡大、O_k をその整数環とする。k の剰余体上の ordinary 楕円曲線ふたつの O_k 上への標準持ち上げの積を $\mathfrak{X}$ と書き、$X=\mathfrak{X}\times_{O_k}\mathrm{Spec}\,k$ とする。k' を k の有限次完全分岐拡大、$O_{k'}$ と $\mathcal{P}_{k'}$ をその整数環と極大イデアルとして、$\mathfrak{X}_{O_{k'}}=\mathfrak{X}\times_{\mathrm{Spec}\,O_k}\mathrm{Spec}\,O_{k'}$ と書く。補助に使う自然数 i を取り、$A(k',i)=O_{k'}/\mathcal{P}_{k'}^i$, $\mathfrak{X}_{A(k',i)}=\mathfrak{X}\times_{\mathrm{Spec}\,O_k}\mathrm{Spec}\,A(k',i)$ とする。以下では、大まかな方針のみを示すことを目的とし、不正確な記述を多く使う。特に、ある準同型写像が単射や全射と書くときは、核や余核が k' と i に依存しない群であることだけを意味することが多い。(証明にはこれで十分となる。) 正確な証明は [38] を参照してください。

始めに、全射準同型

$$\mathrm{CH}_0(X)\twoheadrightarrow H^2(\mathfrak{X}_{A(k',i)},K_2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}))$$

が存在することを示す。ここで、$K_2(\mathfrak{X}_{A(k',i)})$ は $\mathfrak{X}_{A(k',i)}$ の K_2-群のなすザリスキ層。体上の任意の非特異曲面 V に対して Bloch の公式 $\mathrm{CH}_0(V)\cong H^2(V,K_2(V))$ が成り立つことを念頭において、群 $H^2(\mathfrak{X}_{A(k',i)},K_2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}))$ を $\mathrm{CH}_0(\mathfrak{X}_{A(k',i)})$ の役割として用いる。(後者は、第一節の定義のままでは $\mathrm{CH}_0(Y)$ と一致してしまい、i や k' に依存する情報を得られない。)

この写像の構成は次のように行う。Spiess は [32] において、$\ker(CH_1(\mathfrak{X})\to \mathrm{CH}_0(X))$ が有限 p-群であることを示した。(Spiess はよい還元を持つ任意の楕円曲線ふたつの積に対してこの主張を示した。定理６はこの結果から従う。) この有限

p-群の位数は k' に依存しない数でおさえられることが簡単に分かる。そこで、(前述した不正確さのもとで) 全射 $CH_1(\mathfrak{X}) \to H^2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, K_2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}))$ を構成すればよいことになるが、それは Bloch の公式 (の混標数版 [6]) $CH_1(\mathfrak{X}) \cong H^2(\mathfrak{X}, K_2(\mathfrak{X}))$ と関手性から直ちに得られる。

次に、[37] の方法を用いて群 $H^2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, K_2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}))$ を計算する。それには $\mathfrak{X}_{A(k',i)}$ のサントミック・コホモロジー $H^*(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, \mathcal{S}(2))$ を用いる。[37] で全射な準同型

$$H^2(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, K_2(\mathfrak{X}_{A(k',i)})) \twoheadrightarrow H^4(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, \mathcal{S}(2))$$

を構成されている。そこで $H^4(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, \mathcal{S}(2))$ を計算すればよいことになるが、それには次のスペクトル系列を用いる：

$$E_2^{k,l} = H^k(A(k',i), \mathcal{S}(H^l_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k), 2)) \Rightarrow H^{k+l}(\mathfrak{X}_{A(k',i)}, \mathcal{S}(2)).$$

ここで、$H^k(A(k',i), \mathcal{S}(H^l_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k), 2))$ は $\mathfrak{X}/O_k$ の de Rham コホモロジー $H^l_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k)$ を係数に持つ $A(k',i)$ のサントミック・コホモロジーである。

このスペクトル系列の E_2-項は次のように計算できる。まず、$k > 2$ ならば $E_2^{k,l} = 0$ であり、さらに次の準同型がある：

$$\begin{aligned} &H^0(A(k',i), \mathcal{S}(H^4_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k), 2)) \xrightarrow{(i)} \mathbb{Z}_p, \\ &H^1(A(k',i), \mathcal{S}(H^3_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k), 2)) \xrightarrow{(ii)} \hat{X}(A(k',i)), \\ &H^2(A(k',i), \mathcal{S}(H^2_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k), 2)) \xrightarrow{(iii)} G(A(k',i))_{\mathrm{Tor}}. \end{aligned}$$

ここで、G は $\mathfrak{X}$ の形式ブラウアー群 [1]、$\hat{X}$ は $\mathfrak{X}$ の完備化として得られる O_k 上の p-divisible group である。($\mathrm{Alb}_X = X$ に注意。)

写像 (i) は簡単に構成でき、同型であることも分かる。その理由は群 $H^4_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k)$ がランク 1 の自由 O_k-加群という単純な構造であることにある。次に、写像 (ii) は [37] で構成され、(ほぼ) 同型であることが示されている。ここでの根拠は群 $H^3_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k)$ が $\hat{X}$ の Dieudonné 加群に同型ということにある。最後に、写像 (iii) を構成するときの手がかりは G の Dieudonné 加群が $H^2_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/O_k)$ の直和因子という事実である。これは $\mathfrak{X}$ が標準持ち上げという仮定から従う。([22] を参照。) さらに、i を十分大きく取れば (iii) が全射になることも示せる。

写像 $(i), (ii)$ は次数写像とアルバネーゼ写像に対応し、写像 (iii) によって $T(X)$ を評価できる。G は高さ 1 の連結形式群であるから、k_n を k 上 G の p^n 等分点により生成される体とすれば、(十分大きい i に対して) $G(A(k_n,i))_{\mathrm{Tor}} \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ となる。かくして定理７（１）の結論が得られる。

この証明は $T(X)$ ないし $F(X)$ と形式ブラウアー群 G の関係を示唆する。この点については [37] でより深く掘り下げられている。また、同様な関係は、異なった状況のもとで Bloch [3] [4], Stienstra [33] などで調べられていた。

5 染川 K-群

この節では定理７（２）と定理９の証明について概略を述べる。(この内容は、講演では省略した。) 鍵となる道具は、染川 [31] により導入され Raskind-Spiess [25]

によって発展させられたある種の K-群である。これは、いわば準アーベル多様体を係数とするミルナー K-群のような役割を果たす。

F を体、G, G' を F 上の準アーベル多様体とする。(ここでは乗法群 $\mathbb{G}_m$ かアーベル多様体の場合を考えれば十分である。) このとき、染川は [31] で $K(F; G, G')$ と記されるアーベル群を導入し、ガロア・コホモロジーと結びつける準同型写像

$$c_n(F; G, G') : K(F; G, G')/n \to H^2(F, G_n \otimes G'_n)$$

を F の標数と素な整数 n に対して定義した。(本稿ではこれらの定義は述べないが、以下で説明する例からその雰囲気をつかんでいただきたい。) 染川は、さらに次の予想を立てた：

予想2. $c_n(F; G, G')$ は単射。

例1. $G = G' = \mathbb{G}_m$ の場合、$K(F; \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$ はミルナー K-群 $K_2(F)$ と同型である。この同一視のもと、写像

$$c_n(F; \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) : K_2(F)/n \to H^2(F, \mu_n \otimes \mu_n)$$

はガロア・シンボルとなる。(ここで $\mu_n = \ker(n : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m)$.) $c_n(F; \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$ は一般の体 F で同型となることが Merkurev-Suslin [21] により示されている。特に予想2も成立する。

例2. C を F 上の非特異射影的な曲線で F-有理点を持つものとする。G が C のヤコビ多様体 Jac_C で G' が $\mathbb{G}_m$ の場合、$K(F; \mathrm{Jac}_C, \mathbb{G}_m)$ は次の名前で呼ばれてきた群と同型である

$$\begin{aligned} V(C) &= \ker(SK_1(X) \to k^*) \\ &\cong \ker(H^1(C, K_2(C)) \to H^0(\operatorname{Spec} k, K_1(k)) \end{aligned}$$

基礎体 $F = k$ が局所体の場合、写像

$$c_n(k; \mathrm{Jac}_C, \mathbb{G}_m) : V(C)/n \to H^2(k, (\mathrm{Jac}_C)_n \otimes \mu_n)(\cong \pi_1^{ab,geo}(C)/n)$$

は C の類体論における相互写像の主要部をなしており、[5] [26] で深く研究されている。その主結果の一つが $c_n(k; \mathrm{Jac}_C, \mathbb{G}_m)$ の単射性である。つまり、この場合も予想2は正しい。一般には $c_n(k; \mathrm{Jac}_C, \mathbb{G}_m)$ は全射ではない。その余核を C の還元の様子によって記述することが類体論のもう一つの主結果である。

例3. C_1, C_2 を F 上の非特異射影的な曲線で F-有理点を持つものとする。$G = \mathrm{Jac}_{C_1}, G' = \mathrm{Jac}_{C_2}$ がそれらのヤコビ多様体の場合、$K(F; \mathrm{Jac}_{C_1}, \mathrm{Jac}_{C_2})$ は $X = C_1 \times C_2$ に対する $T(X)$ と同型である。写像

$$c_n(F; \mathrm{Jac}_{C_1}, \mathrm{Jac}_{C_2}) : T(X)/n \to H^2(F, (\mathrm{Jac}_{C_1})_n \otimes (\mathrm{Jac}_{C_1})_n)$$

はサイクル写像の主要部と解釈できる。

定理7(2)と定理9の証明の中心は、次の補題を示すことにある。

補題 1. k を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、E_1, E_2 を split multiplicative 還元を持つ楕円曲線、$X = E_1 \times E_2$ とする。このとき、任意の自然数 n に対して、写像

$$c_n(k; E_1, E_2) : T(X)/n \cong K(k; E_1, E_2)/n \to H^2(k, (E_1)_n \otimes (E_1)_n)$$

は単射であり（つまり予想 2 が成立し）、その像は

$$H^2(k, \mu_n \otimes \mu_n) \overset{(*)}{\to} H^2(k, (E_1)_n \otimes (E_1)_n)$$

の像に等しい。ここで $(*)$ は Tate parametraization から得られる完全列

$$0 \to \mu_n \to (E_i)_n \to \mathbb{Z}/n \to 0$$

のテンソル積が誘導する写像。

補題 1 から定理 7（2）と定理 9 の証明を導くのは簡単である。実際、ブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)$ とガロアコホモロジー $H^2(k, (E_1)_n \otimes (E_1)_n)$ の関係をみれば定理 9 が導出される。また、補題 1 では $c_n(k; E_1, E_2)$ の像をガロアコホモロジーだけを用いて記述しており、後者はテイトの双対性などを用いて簡単に計算ができる。特に $T(X)/n$ の大きさが下から評価でき、定理 7（2）が示される。

補題 1 の証明にはテイトの一意化 $E_i \cong \mathbb{G}_m/q_i^{\mathbb{Z}}$ を用いる。$G = G' = \mathbb{G}_m$ の場合は例 1 に述べたとおり $c_n(k; \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$ は同型であることが分かっている。残りは $q_i^{\mathbb{Z}}$ の効果を計算することであるが、これにはかなり技術的な計算が必要になる。そのための方法は [25] で導入されたものに多くを依っている。

References

[1] M. Artin, B. Mazur, Formal groups arising from algebraic varieties, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 1, 87–131.

[2] R. Barlow, Rational equivalence of zero cycles for some more surfaces with $p_g = 0$, Invent. Math. 79 (1985), no. 2, 303–308.

[3] S. Bloch, K_2 of Artinian Q-algebras, with application to algebraic cycles, Comm. in Alg. 3 (1975), 405–428.

[4] S. Bloch, Some formulas pertaining to the K-theory of commutative group schemes, J. Alg. 53 (1978), 304–326.

[5] S. Bloch, Algebraic K-theory and classfield theory for arithmetic surfaces, Ann. of Math. (2) 114 (1981), no. 2, 229–265.

[6] S. Bloch, A note on Gersten's conjecture in the mixed characteristic case, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 75–78, Contemp. Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[7] S. Bloch, A. Kas, D. Lieberman, Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$, Compositio Math. 33 (1976), no. 2, 135–145.

[8] S. Bloch, V. Srinivas, Remarks on correspondences and algebraic cycles, Amer. J. Math. 105 (1983), no. 5, 1235–1253.

[9] J-L. Colliot-Thélène, Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), 1–49, Lecture Notes in Math., 1553, Springer, Berlin, 1993.

[10] J-L. Colliot-Thélène, L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles, J. Théor. Nombres Bordeaux 7 (1995), no. 1, 51–73.

[11] J-L. Colliot-Thélène, W. Raskind, Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres: un the'ore'me de finitude pour la torsion, Invent. Math. 105 (1991), no. 2, 221–245.

[12] J-L. Colliot-Thélène, S. Saito, Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer, Internat. Math. Res. Notices 1996, no. 4, 151–160.

[13] J-L. Colliot-Thélène, J-J. Sansuc, C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux Duke Math. J. 50 (1983), no. 3, 763–801.

[14] K. Coombes, D. Muder, Zero cycles on del Pezzo surfaces over local fields, J. Algebra 97 (1985), no. 2, 438–460.

[15] C. Dalawat, Le groupe de Chow d'une surface de Châtelet sur un corps local, Indag. Math. (N.S.) 11 (2000), no. 2, 173–185.

[16] W. Fulton, Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[17] H. Inose, M. Mizukami, Rational equivalence of 0-cycles on some surfaces of general type with $p_g = 0$, Math. Ann. 244 (1979), no. 3, 205–217.

[18] U. Jannsen, S. Saito, Kato Homology of Arithmetic Schemes and Higher Class Field Theory over Local Fields, Documenta Math. Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003) 479–538.

[19] K. Kato, S. Saito, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, Ann. of Math. (2) 118 (1983), no. 2, 241–275.

[20] S. Lichtenbaum, Duality theorems for curves over p-adic fields, Invent. Math. 7 (1969) 120–136.

[21] A. Merkurev, A. Suslin, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), no. 5, 1011–1046, Math. USSR-Izv. 21 (1983), no. 2, 307–340.

[22] W. Messing, The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes, Lecture Notes in Mathematics, 264, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[23] R. Parimala, V. Suresh, Zero-cycles on quadric fibrations: finiteness theorems and the cycle map, Invent. Math. 122 (1995), no. 1, 83–117.

[24] W. Raskind, Torsion algebraic cycles on varieties over local fields, Algebraic K-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), 343–388, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[25] W. Raskind, and M. Spiess, Milnor K-groups and zero-cycles on products of curves over p-adic fields, Compositio Math. 121 (2000), no. 1, 1–33.

[26] S. Saito, Class field theory for curves over local fields, J. Number Theory 21 (1985), no. 1, 44–80.

[27] S. Saito, On the cycle map for torsion algebraic cycles of codimension two, Invent. Math. 106 (1991), no. 3, 443–460.

[28] S. Saito, A conjecture of Bloch and Brauer groups of surfaces over p-adic fields, preprint, 1990.

[29] S. Saito, R. Sujatha, A finiteness theorem for cohomology of surfaces over p-adic fields and an application to Witt groups, K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 403–415, Proc. Sympos. Pure Math., 58, Part 2, AMS, 1995.

[30] K. Sato, Injectivity of the torsion cycle map of codimension two of varieties over p-adic fields with semi-stable reduction, J. Reine Angew. Math. 501 (1998), 221–235.

[31] M. Somekawa, On Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties, K-Theory 4 (1990), no. 2, 105–119.

[32] M. Spiess, On indecomposable elements of K_1 of a product of elliptic curves, K-Theory 17 (1999), no. 4, 363–383.

[33] J. Stienstra, Cartier-Dieudonné theory for Chow groups, J. Reine Angew. Math. 355 (1985), 1–66; Correction, J. Reine Angew. Math. 362 (1985), 218–220.

[34] T. Szamuely, Sur l'application de réciprocité pour une surface fibrée en coniques définie sur un corps local, K-Theory 18 (1999), no. 2, 173–179.

[35] T. Szamuely, Sur la théorie des corps de classes pour les variétés sur les corps p-adiques, J. Reine Angew. Math. 525 (2000), 183–212.

[36] C. Voisin, Sur les zéro-cycles de certaines hypersurfaces munies d'un automorphisme, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 19 (1992), 473–492.

[37] T. Yamazaki, Formal Chow groups, p-divisible groups, and syntomic cohomology, Duke Math. J. 102 (2000), no. 2, 359–390.

[38] T. Yamazaki, Torsion zero-cycles on a product of canonical lifts of elliptic curves, to appear in K-Theory.

[39] T. Yamazaki, On Chow and Brauer groups of a product of curves over local fields, in preparation.

Institute of Mathematics, University of Tsukuba, Tsukuba-shi Ibaraki 305-8571, Japan
ytakao@math.tsukuba.ac.jp