数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 215-225

局所的にアーベルなガロア表現の変形について
(On Deformations of Locally Abelian Galois Representations)

大溪 幸子
(SACHIKO OHTANI)
九州大学大学院 数理学府
(Graduate School of Mathematics, Kyushu University)

本稿では,局所的にアーベルであるようなガロア表現の変形理論とそれを用いた不分岐非可解拡大の構成を与える.

講演後, 京都工織大の朝田衞先生と京大数理研の玉川安騎男先生にはそれぞれ貴重な助言を頂きました. この場を借りて厚く御礼を申し上げたいと思います.

1 導入

まず次のような問題がある.

問題 1.1. 与えられた代数体[1] K に対し, K 上の不分岐ガロア拡大を構成せよ.

有限次代数体上に不分岐アーベル拡大を構成するという問題は, 類体の構成問題やヒルベルトの第 12 問題として古くからよく知られている. 一方, 非アーベルな不分岐ガロア拡大を系統的に構成するとなるとアーベルな場合以上に非常に困難であるとされている. しかし K が有理数体 $\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の場合には比較的容易に構成できることが知られている.

例えば可解な場合は, 1982 年の Uchida [Uc3, Theorem 2] より, 任意の有限可解群をガロア群に持つ $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐可解拡大が理論的には存在することが分かる. 非可解な場合は, 1970 年の Uchida [Uc1], [Uc2], Yamamoto [Ya] などにより, 交代群 A_n ($n \geq 5$: 整数) をガロア群に持つ $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の不分岐非可解拡大が無限個存在することが分かる. また 1985 年の Asada [As2, Theorem 3] により, $PSL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ ($p \geq 5$: 素数, $n \geq 1$: 整数) をガロア群に持つ不分岐非可解拡大で独立なものが $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上に無限個構成された.

ここで, [Uc3, Theorem 1] と [As2, Theorem 3] を合わせると $PSL_2(\mathbb{Z}_p)$ をガロア群に持つ $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の不分岐非可解拡大が存在することが分かる. また同様の議論で $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ をガロア群に持つものも存在することが分かる.

しかしそれ以後この問題には進展が見られなかった. そこで今まで得られていない大きな不分岐(非可解)拡大をできるだけ多く系統的に構成したい.

[1] 本項でただ「代数体」とあれば無限次代数体も含める.

そのために本稿では“同伴型式” (定義 4.1) を持つレベル 1 の保形型式に付随する mod p ガロア表現を用い, より大きな拡大を得るためそれを“変形する” (定義 2.3) ことで次のような結果を得た. ここで素数 p に対し $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ を $\mathbb{Q}$ に 1 の p 幂根を全て添加した体とする.

定理 1.2. ある素数 p と代数体 F が存在して, $F\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ 上不分岐ガロア拡大で, そのガロア群は Krull 次元が 1 か 2 のある完備ネーター局所環上 R の 2 次元特殊線形群 $SL_2(R)$ と同型である.

$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上構成することが目標であったが実際にはそれより低い $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ 上に構成することができた.

以下の本稿の流れを説明する. 第二節では証明の道具である局所アーベル表現とその変形理論について説明し, 第三節でそれに関する主結果とその証明の概要について述べる. 最後第四節ではそれまでの結果を応用して $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ 上に不分岐ガロア拡大を構成し, そのガロア群を決定する.

2 局所アーベル表現の変形理論

この節では以下 $\mathbf{k}$ を標数 p の有限体, Λ を剰余体 $\mathbf{k}$ を持つ完備ネーター局所環として固定する. $\mathcal{C}$ を対象が剰余体 $\mathbf{k}$ を持つ完備ネーター局所環かつ Λ-代数であるもの, 射が局所環の準同型で剰余体上の恒等写像を導くようなもののなす圏とする.

定義 2.1. A を $\mathcal{C}$ の対象, L を代数体 K 上のガロア拡大とする. 自然数 n を与え,

$$\rho : \mathrm{Gal}\,(L/K) \longrightarrow GL_n(A)$$

を n 次元連続表現とする. L の任意の素イデアル $\mathfrak{l}$ に対し, ρ を $\mathfrak{l}$ での分解群 $D_{\mathfrak{l}}$ に制限したときの像がアーベル群であるとき, ρ は **局所アーベル** (*locally abelian*) であるという.

ここで次のような補題がある:

補題 2.2 ([As1], Proposition 1). F を代数体 K 上のガロア拡大, K^{ab} を K の最大アーベル拡大とすると, FK^{ab} が K^{ab} 上不分岐ガロア拡大であるためには, F の任意の素イデアル $\mathfrak{l}$ に対し, $\mathfrak{l}$ での分解群 $D_{\mathfrak{l}} \subset \mathrm{Gal}\,(F/K)$ がアーベル群であることが必要十分である.

この補題より, 特に $\rho : \mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_n(A)$ を局所アーベル表現とし F を ρ の核に対応する体とすれば, $F\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐ガロア拡大となる.

したがって目標のために局所アーベル表現をたくさん得たいのだが, 知られている例は少なく, 特に大きい係数環上への表現は知られていない. そこで既知の局所アーベルな mod p 表現から大きい係数環上への表現に持ち上がらないだろうかと考えた. そこで変形理論の出番となる. ここで Mazur によるガロア表現の変形理論 [Ma3] を簡単に復習する.

Mazur の変形理論

副有限群 Π, 自然数 n を固定する. A_0 と A_1 を $\mathcal{C}$ の対象とし, 射 $h: A_1 \to A_0$ が与えられたとする. このとき h から導かれる準同型 $GL_n(A_1) \to GL_n(A_0)$ も同じく h で表す.

定義 2.3. $\rho_0 : \Pi \to GL_n(A_0)$ を連続準同型としたとき, ρ_0 の A_1 への **変形** (*deformation*) とは, ρ_0 の持ち上げ

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_0"'] & GL_n(A_1) \arrow[d, "h"] \\ & GL_n(A_0) \end{tikzcd}$$

の "狭義同値類" のこととする. ここで, ρ_0 の二つの持ち上げ ρ_1, ρ_1' が **狭義同値** (*strictly equivalent*) であるとは, 一方が h の核の元による共役でもう一方にうつることを意味する.

以下 K は有限次代数体とし, S は p の上の素点全てと無限素点 ∞ を含む K の素点の有限集合とする. $G_{K,S}$ を K 上 S の外最大不分岐拡大のガロア群とし,

$$\bar{\rho} : G_{K,S} \longrightarrow GL_n(\mathbf{k})$$

を n 次元連続表現とする. $\bar{\rho}$ の変形について次のような結果がある.

補題 2.4 ([Ma3], p. 261, Proposition). $\bar{\rho}$ が絶対既約ならば, $\bar{\rho}$ の "普遍変形環" (*universal deformation ring*) R^{univ} と "普遍変形" (*universal deformation*)

$$\rho^{\mathrm{univ}} : G_{K,S} \longrightarrow GL_n(R^{\mathrm{univ}})$$

が存在して, 次のような普遍的性質を持つ: $\mathcal{C}$ の対象 A と $\bar{\rho}$ の A への変形 $\rho : G_{K,S} \to GL_n(A)$ を任意に与えたとき, 唯一つの射 $h : R^{\mathrm{univ}} \to A$ が存在して, ρ^{univ} と h から導かれる準同型 $GL_n(R^{\mathrm{univ}}) \to GL_n(A)$ の合成は ρ と変形として等しい.

$$\begin{tikzcd} & GL_n(R^{\mathrm{univ}}) \arrow[d, "h"] \\ G_{K,S} \arrow[ur, "\rho^{\mathrm{univ}}"] \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\bar{\rho}"'] & GL_n(A) \arrow[d] \\ & GL_n(\mathbf{k}) \end{tikzcd}$$

では $\bar{\rho}$ が局所アーベルだったときに, その "局所アーベルな変形" が存在するだろうか? ここで条件付きの変形を考えるために, "変形条件" というものを紹介する.

圏 $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の充満部分圏で, 対象が $\mathcal{C}$ の対象かつアルティン環であるようなものからなるものとする. 圏 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\Lambda; \Pi)$ を, 対象が $\mathcal{C}'$ の対象 A と A-線形な連続 Π-作用を持つ階数

n の自由 A-加群 V の組 (A, V) からなるようなものとする. $\mathcal{F}_n$ における対象 (A, V) から対象 (A_1, V_1) への射は, $\mathcal{C}'$ の射 $A \to A_1$ と, A-加群の射 $V \to V_1$ で Π-作用と (自明な意味で) 両立する A-加群の同型を導くものとの組とする. ここで条件 $\mathcal{D}$ を満たす対象たちのなす $\mathcal{F}_n$ の充満部分圏を $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ と書き, $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ について以下の 3 条件を考える:

(1) $\mathcal{F}_n$ の任意の射 $(A, V) \to (A_1, V_1)$ に対し, (A, V) が $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ の対象なら, (A_1, V_1) も $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ の対象である.

(2) A, B, C が次の図式を満たす $\mathcal{C}'$ の対象とする:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C. & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}_n$ の対象 $(A \times_C B, V)$ を考え, V_A (resp. V_B) を V の $A \times_C B$ から A (resp. B) への自然な射影 $1 \times_C \beta$ と (resp. $\alpha \times_C 1$) に関するテンソル積とする. このとき $(A \times_C B, V)$ が $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ の対象であるためには (A, V_A) と (B, V_B) がどちらも $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ の対象であることが必要十分である.

(3) $\mathcal{F}_n$ の任意の射 $(A, V) \to (A_1, V_1)$ に対し, (A_1, V_1) が $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ の対象で $A \to A_1$ が単射なら, (A, V) も $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ の対象である.

$\bar{V}$ を $\bar{\rho}$ によって与えられる $\mathbf{k}$-線形な Π-作用を持つ n 次元 $\mathbf{k}$-線形空間 $\mathbf{k}^n$ とする. このとき $\mathcal{D}\mathcal{F}_n$ が上記の条件 (1), (2), (3) を満たし, 対象として $(\mathbf{k}, \bar{V})$ を含むとき, $\mathcal{D}$ を $\bar{\rho}$ に対する **変形条件**(*deformation condition*) という. 例えば [Ma3, §30, Proposition 3] より, 通常という条件は変形条件である.

条件付きの変形にも補題 2.4 と同様なことが成り立つ.

補題 2.5 ([Ma3], p.297, Corollary). $\mathcal{D}$ が $\bar{\rho}$ に対する変形条件であり, $\bar{\rho}$ が絶対既約ならば, $\bar{\rho}$ の "普遍 $\mathcal{D}$-変形環" (universal $\mathcal{D}$-deformation ring) $R^{\mathcal{D}}$ と "普遍 $\mathcal{D}$-変形環" (universal $\mathcal{D}$-deformation)

$$\rho^{\mathcal{D}} : G_{K,S} \longrightarrow GL_n(R^{\mathcal{D}})$$

が存在する. このとき $R^{\mathcal{D}}$ は $\bar{\rho}$ の普遍変形環 R^{univ} の商として得られる.

[Ma3, §25, Proposition 1] より, 局所アーベルという条件は変形条件である. よって $\bar{\rho}$ が絶対既約かつ局所アーベルならば, $\bar{\rho}$ の普遍局所アーベル変形環 R^{lab}, 普遍局所アーベル変形

$$\rho^{\mathrm{lab}} : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow GL_n(R^{\mathrm{lab}})$$

が存在することが分かる.

そこで R^{lab} の構造について詳しく, 例えばその Krull 次元などが知りたい. しかし直接は困難なので特別な場合を考える. そのために次のような表現を定義する.

定義 2.6. A を $\mathcal{C}$ の対象, L を代数体 K 上のガロア拡大とする. D, I を $\mathrm{Gal}(L/K)$ の p の上の素点での分解群, 惰性群とする. 2 次元連続表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow GL_2(A)$$

もしくはその表現空間 W が **概超常** (*nearly extraordinary*) であるとは, W の非自明な D-安定部分 A-加群 W_1 と W_2 が存在して, $W = W_1 \oplus W_2$ であることをいう. また **超常** (*extraordinary*) であるとは, さらに W_1 が I の作用で不変であることをいう.

したがって ρ が概超常なら, ρ の D への制限は共役を除き

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}$$

と表せる, ここで $\varphi_i : D \to A^\times$ $(i = 1, 2)$ は指標とする. また特に ρ が超常なら φ_1 は I 上自明である. 定義から超常表現は通常表現[2] の特別な場合になっている[3].

ここで $\bar{\varphi}_i : D \to \mathbf{k}^\times$ $(i = 1, 2)$ を φ_i の還元とすると, 以下概超常や超常は $\bar{\varphi}_1$ と $\bar{\varphi}_2$ が同型でない場合しか扱わないのでそう仮定する.

ここで定義した 2 種類の表現に対して以下が成り立つ.

命題 2.7. 概超常, 超常という条件は変形条件である. したがって $\bar{\rho}$ が絶対既約かつ概超常 (resp. 超常) ならば, $\bar{\rho}$ の普遍概超常変形環 R^{neo} と普遍概超常変形 ρ^{neo} (resp. 普遍超常変形環 R^{eo} と普遍超常変形 ρ^{eo}) が存在する.

証明の概略. 3 つの条件 (1),(2),(3) を確かめる. □

註 2.8. 補題 2.5 にもあるように, 自然な全射の列 $R^{\mathrm{univ}} \twoheadrightarrow R^{\mathrm{neo}} \twoheadrightarrow R^{\mathrm{eo}}$ が存在する. 一般には概超常は局所アーベルではないが, 応用上はそうであるような場合を扱う. このとき

$$R^{\mathrm{univ}} \twoheadrightarrow R^{\mathrm{lab}} \twoheadrightarrow R^{\mathrm{neo}} \twoheadrightarrow R^{\mathrm{eo}}$$

となっている.

3 主定理

特別な場合には普遍概超常変形環や超常変形環の構造がある程度は分かる.

---

[2] ここでは ρ もしくはその表現空間 W が **通常** (*ordinary*) であるとは, W の非自明な D-安定部分 A-加群 W_1 が存在して, W_1 は A 上自由階数 1 の直和因子でかつ I の作用で不変であることをいう.

[3] "extraordinary" という名前については講演後に誤解を招く等の様々な御意見を頂きましたが, Mazur 氏の了解が得られましたのでこのまま変更せずに使用させて頂きたいと思います.

定理 3.1. $\mathbf{k}$ を標数 $p \geq 5$ の有限体とし, $G_{\mathbb{Q},p}$ を $\mathbb{Q}$ 上 $S = \{p, \infty\}$ の外不分岐最大拡大のガロア群とする. 2 次元連続表現

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbf{k})$$

が絶対既約かつ概超常 (resp. 超常) なら, $\bar{\rho}$ の普遍変形環 R^{univ} から普遍概超常変形環 R^{neo} (resp. 普遍超常変形環 R^{eo}) への自然な全射の核は 2 元 (resp. 3 元) 生成なイデアルである.

証明の概略. 証明の方法は [Ma2, Main Proposition] の証明とほとんど同じである. $\bar{\rho}$ は絶対既約かつ概超常 (ないしは超常) であるとする. L を $\bar{\rho}$ に対応する体, $L^{(p)}$ を L 上 $\{p, \infty\}$ の外不分岐最大副 p-拡大とする. このとき, $P = \mathrm{Gal}\,(L^{(p)}/L)$, $\quad G = \mathrm{Gal}\,(L/\mathbb{Q})$, $\quad \Pi = \mathrm{Gal}\,(L^{(p)}/\mathbb{Q})$ とおくと, 完全列 $1 \to P \to \Pi \to G \to 1$ を得る. ここで P は Π の正規副 p-部分群で, G は $\bar{\rho}$ の像と同型である.

[Bo, Lemma (1.2)] より, $\mathcal{C}$ の対象 A に対し準同型 $GL_2(A) \to GL_2(\mathbf{k})$ の核は副 p-群である. よって $\bar{\rho}$ の全ての持ち上げは Π を経由する.

D と I を Π のそれぞれ分解群, 惰性群とし, $D^0 \subset D$ と $I^0 \subset I$ をそれぞれの副 p-シロー部分群とする. 今は $\bar{\rho}$ が概超常なので特に正規である. そこで $A = I/I^0$, $B = D/D^0$ とすると, B は p と素な位数を持つアーベル群, A は p と素な位数を持つ巡回群である. このとき半直積分解

$$I = A \ltimes I^0, \quad D = B \ltimes D^0$$

が得られる.

K_v を $\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$ の中間体で $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow B$ の核に対応するガロア拡大とする.

補題 3.2 (*cf.* [Ma2], §8, Lemma). 次の性質を満たす元 $x, y \in I^0$, $z \in D^0$ が存在する:

(i) $B \hookrightarrow D$ は z の中心化群に含まれる.

(ii) K_v が 1 の原始 p 乗根を含まないなら $y = 1$, そうでなければ, $g \in B$ に対し, y は

$$gyg^{-1} \;=\; y^{\hat{\chi}(g)}$$

を満たす. ここで $\hat{\chi} : B \to \mathbb{Z}_p^\times$ は円分指標 $B \to \mathbb{F}_p^\times$ のタイヒミュラー持ち上げ.

(iii) $\{gxg^{-1}\,(g \in B),\, y,\, z\}$ は副有限群として D^0 を生成する.

(iv) $\{gxg^{-1}\,(g \in B),\, y\}$ で生成された D^0 の閉正規部分群は I^0 に等しい.

ここで

$$\bar{\rho} : \Pi \longrightarrow GL_2(\mathbf{k})$$

の普遍変形を ρ^{univ} とし, その D への制限の表現空間の基底を上手に選び, それに関して狭義同値類を固定する. このとき ρ^{univ} による z の像が対角行列になることが分かる. また y の像が単位行列になることも分かる. そこで ρ^{univ} による x の像を

$$\rho^{\mathrm{univ}}(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置く. このとき補題 3.2 などを応用して

$$R^{\mathrm{neo}} \simeq R^{\mathrm{univ}}/(a-1,\, c), \quad R^{\mathrm{eo}} \simeq R^{\mathrm{univ}}/(a-1,\, b,\, c)$$

が成り立つことが証明できる. □

4 応用

これまでの結果を全円分体上の不分岐ガロア拡大の構成に応用する. そのためにまず同伴型式について説明する.

同伴型式

$\bar{f} = \sum a_n q^n$ を標数 p の有限体 $\mathbf{k}$ に係数を持つ $\Gamma_1(N)$ 上重み w, 指標 ε の正規化された尖点固有型式とする. このとき $\bar{f}$ に付随する連続半単純ガロア表現を

$$\bar{\rho}_f : \mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(\mathbf{k})$$

とすると, これは Np の外不分岐な表現である. ここで $a_p \neq 0$ とすると, $\bar{\rho}_f$ は通常表現である. よって $\bar{\rho}_f$ を $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の p での分解群 D_p に制限したときの像は $GL_2(\mathbf{k})$ のボレル部分群に含まれる.

以下 $2 \leq w \leq p$ かつ $a_p \neq 0$ を仮定し, さらに $w = p$ なら $a_p^2 \neq \varepsilon(p)$ を仮定する. このとき Gross [Gr] の結果より, $\bar{\rho}_f$ を D_p に制限したときに完全可約になるためには, ある $\mathbf{k}$-係数で $\Gamma_1(N)$ 上重みが $w' = p+1-w$, 指標が ε の正規化された固有型式 $\bar{g} = \sum b_n q^n$ が存在して, 任意の自然数 n に対し, $n^w b_n = n a_n$ が成り立つことが必要十分である. このとき $\bar{f}$ は**同伴型式**(*companion form*) $\bar{g}$ を持つという. $\bar{f}$ と $\bar{g}$ の関係は対称である.

したがって, $\bar{f}$ が同伴型式を持つなら, $\bar{\rho}_f$ は超常表現となる. さらに $p \neq 2$ で $\bar{\rho}_f$ の像が $SL_2(\mathbf{k})$ を含むならば $\bar{\rho}_f$ は絶対既約になる.

例 4.1 (*cf.* [Gr], p. 513). レベル $N=1$ とし, 重み w を $12, 16, 18, 20, 22, 26$ のいずれかとして, f を重み w の $SL_2(\mathbb{Z})$ 上正規化された尖点固有型式とする. このとき $\bar{f} = f \bmod p$ に付随する半単純 $\mathrm{mod}\, p$ ガロア表現を

$$\bar{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$$

とする.

Elkies と Atkin の数値計算により, 尖点型式 f と素数 p の組 (f,p) で, $\bar{\rho}_{f,p}$ の像が $SL_2(\mathbb{F}_p)$ を含み, $\bar{f}$ が同伴型式を持つようなものが存在することが分かる. $p < 3500$ に対し, そのような f の重み w と素数 p の組は

$$(w,p) = (16,397), (18,271), (20,139), (20,379), (26,107),$$

の 5 つである.

構成

$\bar{f}$ を標数 $p \geq 5$ の有限体 $\mathbf{k}$ に係数を持つ $SL_2(\mathbb{Z})$ 上重み w の正規化された尖点固有型式とし, $\bar{f}$ に付随する連続半単純ガロア表現を

$$\bar{\rho}_f : G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbf{k})$$

とする. また $\bar{\rho}_f$ の像が $SL_2(\mathbf{k})$ を含み, $\bar{f}$ は同伴型式を持つと仮定する.

$\bar{\rho}_f$ の普遍変形環を R^{univ} とする. $\bar{\rho}_f$ は特に通常表現でもあるから, その普遍通常変形環 R^{o} も存在する. 一方 $\bar{f}$ の "普遍ヘッケ環" を $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ とする (その構成は [Hi1], [Hi2] 等を参照). ここで $W(\mathbf{k})$ を $\mathbf{k}$ の ヴィット環, $\Lambda \simeq W(\mathbf{k})[\![T]\!]$ を岩澤加群とする. このとき [Hi1], [Hi2] により, $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ は有限平坦 Λ-代数であることが知られている. よってその Krull 次元は 2 である. また [Go] より $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ はほとんどの場合ある離散付値環上の一変数冪級数環と同型であることが知られている. この $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ へは R^{o} から自然な全射が存在するのだが, さらにそれは同型だと予想されている.

予想 4.2.

$$R^{\mathrm{o}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}^{\mathrm{o}}$$

は同型である.

ここで命題 2.7 で得られる $\bar{\rho}_f$ の普遍超常変形環 R^{eo} とする. また a, b, c を定理 3.1 の証明のものとすると, [Ma2, p. 130, Proposition] より,

$$R^{\mathrm{o}} \simeq R^{\mathrm{univ}}/(a-1,\, c)$$

となることが分かるので, R^{eo} は R^{o} を単項イデアル (b) で割ったものになっている. ここで $R^{\mathrm{univ}} \twoheadrightarrow R^{\mathrm{o}}$ から導かれる全射による $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ の像 を $\mathbb{T}' = \mathbb{T}^{\mathrm{o}}/(b)$ とすると次が成り立つ. [4]

補題 4.3.

$$\text{Krull-dim}\, R^{\mathrm{eo}} \geq \text{Krull-dim}\, \mathbb{T}' \geq 1.$$

$\bar{\rho}_f$ の普遍超常変形を $\rho^{\mathrm{eo}} : G_{\mathbb{Q},p} \to GL_2(R^{\mathrm{eo}})$ とすると, 今は $\{p, \infty\}$ の外不分岐ということから局所アーベルでもある. このようにして Krull 次元が 1 以上の係数環上の局所アーベル表現が得られる.

しかし現時点では予想 4.2 を仮定しなければ R^{eo} はそれ以上の詳しい構造について, $\mathbb{Z}_p$ 上平坦なのか, 正則なのか整域なのかなど, まだ分からないことが多く扱いづらいので, R^{eo} の代わりに $\mathbb{T}'$ を考える. $\bar{\rho}_f$ の $\mathbb{T}'$ への変形

$$\rho' : G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbb{T}')$$

[4] b の像も同じく b で表す.

は作り方から超常変形となる．特に先と同様局所アーベルでもある．したがって ρ' の核に対応する $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大を F とすれば，第二節にあるように $F\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐ガロア拡大になることが分かる．また実際には同じく $\{p,\infty\}$ の外不分岐ということから $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ 上まで持ち上げれば不分岐になることが分かる．

次にそのガロア群を決定するために ρ' の像がどうなるかを知りたい．そのために $\bar\rho_f$ の $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ への変形

$$\rho^{\mathrm{mo}} : G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbb{T}^{\mathrm{o}})$$

の像を調べる．ちなみに今の状況を図にすると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd}
 & GL_2(R^{\mathrm{o}}) \arrow[r] \arrow[d] & GL_2(\mathbb{T}^{\mathrm{o}}) \arrow[d] \\
G_{\mathbb{Q},p} \arrow[ur, "\rho^{\mathrm{o}}"] \arrow[r, "\rho^{\mathrm{eo}}"] \arrow[dr, "\bar\rho"'] & GL_2(R^{\mathrm{eo}}) \arrow[r] \arrow[d] & GL_2(\mathbb{T}') \arrow[dl] \\
 & GL_2(\mathbf{k}). &
\end{tikzcd}$$

ここで次の補題を $\bar\rho_f$ と ρ^{mo} に適用する．

補題 4.4 ([MaWi], Appendix, Proposition 3). A を $\mathcal{C}$ の対象とし，その Krull 次元は 2 で，その極大イデアルが $\mathfrak{m}=(p,\tau)$ であるとする．よって A は正則でかつ $p\notin\mathfrak{m}^2$ である．$\rho:\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow GL_2(A)$ を連続表現で $\bar\rho:\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow GL_2(A/\mathfrak{m})$ を導くものとする．I_p を $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の p での惰性群とする．次の 4 条件が成り立つならば，ρ の像は $SL_2(A)$ を含む．

(i) $\bar\rho$ の像は $SL_2(A/\mathfrak{m})$ を含む．

(ii) $\rho(I_p)$ 内に行列 $\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1+\tau\end{pmatrix}$ が存在する．

(iii) $(A/\mathfrak{m})^\times$ の各元 d に対し，$\bar\rho(I_p)$ 内に行列 $\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & d\end{pmatrix}$ が存在する．

(iv) $\rho(I_p)$ は $\left\{\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & *\end{pmatrix}\right\}$ に含まれる．

ここで $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}\simeq\Lambda$ と仮定する[5]．はじめの仮定より $\bar\rho_f$ の像は $SL_2(\mathbf{k})$ を含むので (i) は満たされる．また ρ^{mo} が通常変形であることから (iv) が満たされ，(ii) を満たすことも [Hil] の結果を応用することにより分かる．あとは (iii) が満たされれば良い．I_p 上では $\det\bar\rho_f=\chi^{w-1}$

[5]この仮定が成り立つ例については [Go] の 192 頁以降を参照．

であることから, 少なくとも $w-1$ と $p-1$ が互いに素であればよい. ここで $\chi : I_p \to \mathbf{k}^\times$ は円分指標とする.

そこで $w-1$ と $p-1$ が互いに素であると仮定すると, 補題 4.4 より ρ^{mo} の像は $SL_2(\mathbb{T}^{\mathrm{o}})$ を含む. よって ρ' の像は $SL_2(\mathbb{T}')$ を含む. ρ' の像は上記の F の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群と同型であり, $SL_2(\mathbb{T}')$ は非自明なアーベル商を持たないことから $F\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ の $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ 上のガロア群は $SL_2(\mathbb{T}')$ と同型になることが分かる. 以上より次を得る.

定理 4.5. $\bar{f}$ を標数 $p \geq 5$ の有限体 $\mathbf{k}$ に係数を持つ $SL_2(\mathbb{Z})$ 上重み w の正規化された尖点固有型式とする. このとき $\bar{f}$ に付随する連続半単純ガロア表現を

$$\bar{\rho}_f : G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbf{k})$$

とする. 次の仮定 (a), (b), (c), (d) が満たされるとき, $\bar{\rho}_f$ の $\mathbb{T}'$ への変形の核に対応する体を F とすると $F\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ 上不分岐ガロア拡大で, そのガロア群は $SL_2(\mathbb{T}')$ と同型になる:

(a) $\bar{\rho}_f$ の像が $SL_2(\mathbf{k})$ を含む.

(b) $\bar{f}$ が同伴型式を持つ.

(c) $\bar{f}$ の普遍ヘッケ環 $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ が Λ と同型である.

(d) $w-1$ と $p-1$ が互いに素である.

例 4.6. $\bar{f}$ として特に例 4.1 のものを考える. このとき [Go] により, $\bar{f}$ が通常なら $\mathbb{T}^{\mathrm{o}}$ は $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ と同型であることが知られている. つまりこのとき (c) は満たされる. さらに (a), (b) を満たす計算例 5 つのうち (d) を満たすものはそのうちの 4 つである.

註 4.7. 予想 4.2 が正しければ, $\mathbb{T}' \simeq R^{\mathrm{eo}}$, $\rho' = \rho^{\mathrm{eo}}$ である.

参考文献

[As1] Asada, M., *On unramified Galois extensions over maximum abelian extensions of algebraic number fields*, Math. Ann. **270** (1985), 477-487.

[As2] Asada, M., *Construction of certain non-solvable unramified Galois extensions over the total cyclotomic field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math. **32** (1985), 397-415.

[Bo] Boston, N., *Explicit deformations of Galois representations*, Invent. Math. **103** (1991), 181-196.

[Go] Gouvêa, F. Q., *On the ordinary Hecke algebra*, J. Number Theory **41** (1992), 178-198.

[Gr] Gross, B.H., *A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms* $(\bmod p)$, Duke Math. J. **61** (1990), 445-517.

[Hi1] Hida, H., *Galois representations in $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85** (1986), 231-273.

[Hi2] Hida, H., *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986), 231-273.

[Ma1] Mazur, B., *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, (Berkeley, CA, 1987), pp.385-437, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, NewYork, 1989.

[Ma2] Mazur, B., *Two-dimensional p-adic Galois representations unramified away from p*, Comp. Math. **74** (1990), 115-133.

[Ma3] Mazur, B., *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), Springer, NewYork, 1997, pp.243-311.

[MaWi] Mazur, B. and Wiles, A., *On p-adic analytic families of Galois representations*, Comp. Math. **59** (1986), 231-264.

[Uc1] Uchida, K, *Unramified extensions of quadratic number fields.* I, Tohoku Math. J. (2) **22** (1970), 138-141.

[Uc2] Uchida, K, *Unramified extensions of quadratic number fields.* II, Tohoku Math. J. (2) **22** (1970), 220-224.

[Uc3] Uchida, K, *Galois groups of unramified solvable extensions*, Tohoku Math. J. (2) **34** (1982), 311-317.

[Ya] Yamamoto. Y, *Unramified Galois extensions of quadratic number fields*, Osaka J. Math. **7** (1970), 57-76.