Die allgemeinen eineindeutigen Transformationen vom Gesichtspunkte der projektiven Geometrie aus und Aufbau einiger pseudoprojektiver Geometrien.

VON

Tsurusaburo Ota,

IN KAGOSHIMA.

(Eingegangen am 5. August 1918.)

Einleitung.

Sind zwei Raeume durch eine eineindeutige Transformation ineinander abgebildet und hat man fuer eine Figur des ersten Raumes einen Satz aus dem Gebiete der Geometrie der Lage[1] bewiesen, der also keine metrischen Begriffe benutzt, so kann man die Figur durch die genannte Transformation in den zweiten Raum uebertragen und fuer diese neue Figur ohne weiteres einen entsprechenden Satz formulieren. Oder es gelingt unter Umstaenden, eine Aufgabe der Geometrie der Lage[1] dadurch zu loesen, dass man den Raum eineindeutig in einen andern abbildet, die in dem zweiten Raume sich ergebende Aufgabe erledigt und die Loesung dann wieder in den ersten Raum uebertraegt.

Es erscheint nun die Frage :—*Wenn ein Raum R, in welchem eine projektive Geometrie gilt, mittels einer Koordinatentransformation in einen andern R' eineindeutig abgebildet ist, gilt dann in dem zweiten Raume R' immer auch eine projektive Geometrie?*

Wir wissen nicht ganz bestimmt, ob Anordnung und Stetigkeit da noch beibehalten sind. In der Tat hat Prof. T. Nishiuchi, indem er die ebene birationale Transformation von Cremona aufnahm, eine

1 Im weiteren Sinne.

pseudoprojektive Geometrie begruendet und einige glaenzende Ergebnisse erzielt[1]. Nach dieser Tatsache zu urteilen, scheint die obige Frage noch nicht erledigt zu sein. Im ersten Teile dieser Abhandlung moechte ich darum diese Frage im bejahenden Sinne beantworten, und zwar unter Berufung auf die Vahlensche Theorie.

Die Nishiuchi'sche ebene pseudoprojektive Geometrie ist aber, wie der Titel zeigt, nur auf die Ebene beschraenkt. Koennten wir sie aber zum Raume erweitern, so wuerde die Wichtigkeit der Geometrie um ein bedeutendes gesteigert. Ist dann eine entsprechende pseudoprojektive *raeumliche* Geometrie unmoeglich? Nun duerften die folgenden zwei Saetze wohl auf die Existenz einer solchen hinweisen.—

Satz 1°. *Fuer eine ebene Geometrie ist das Bestehen des Desargues-schen Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafuer, dass sie Schnitt einer raeumlichen Geometrie ist*[2].

Satz 2°. *Eine ebene Koordinatengeometrie ist Schnitt einer raeumlichen.*[3]

Der zweite Teil dieser Abhandlung besteht also darin, dass ich auf Grund der oben erwaehnten Bejahung der genannten Frage zwei raeumliche pseudoprojektive Geometrien als Ergaenzungen zur Nishiuchi'schen begruende, und dass ich weitere zahlreiche wichtige Ergebnisse daraus ziehe.

KAP. I.

Die allgemeinen birationalen Transformationen vom Gesichtspunkte der projektiven Geometrie aus.

I.

Fundamentalsatz.

1. Fundamentalsatz: *Gilt in einem Raume* R *eine projektive Geometrie und ist* R *in einen andern Raum* R′ *mittels einer Koordinatentransformation eineindeutig abgebildet, so gilt in* R′ *auch eine projektive Geometrie.*

Beweis. Es seien (x) die projektiven Punktkoordinaten im Raume R, so dass (x) zum nicht singulaeren Zahlensytem gehoeren in welchem das associative Gesetz sowie das kommutative Gesetz der Multiplikation

1 Mem. Coll. Sci. Engin., Kyoto. III, No. 10, (1912).

2 Vahlen, Abstrakte Geometrie, II, 137.

3 „ „ „ „ 76.

gilt, es seien (X) die Punktkoordinaten im Raume R′, welche mit (x) eineindeutig d.h. birational verbunden sind[1] :—

$$x_i = \varphi_i(X_i),\ X_i = \psi_i(x_i),\ (i=1, 2, 3, 4);$$

so dass die Punkte, die Ebenen und die Geraden in R′ auf die folgende Weise definiert sind :—

(i) *Es werde ein Zahlenquadrupel* (X_i) *wo* X_i *notwendig nicht alle null sind, als Punkt, zwei Punkte* (X_i), (λX_i), *wo* λ *eine beliebige von Null verschiedene Zahl bezeichnet, als identisch, sonst als verschieden bezeichnet.*

(ii) *Ebenso werde ein Zahlenquadrupel derselben Art* $(s_i)=(\lambda s_i)$ *als Ebene bezeichnet und das Zusammenfallen (die vereinigte Lage) eines Punktes* (X_i) *mit einer Ebene* (s_i) *durch die Gleichung.*

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0$$

definiert, welche bei Variabeln (X_i) *Gleichung der Ebene, bei Variabeln* (s_i) *Gleichung des Punktes* (X_i) *heissen.*

(iii) *Sind* (s_i) *und* (s_i') *irgend zwei Ebenen, dann heisst der Inbegriff der Punkte, die zu* (s_i) *und* (s_i') *gemeinsam sind, die Gerade.*

Dann wird im Raume R′ auch eine projektive Geometrie gelten.

1° Verknuepfungsaxiome. Als die Verknuepfungsaxiome wollen wir nach Vahlen[2], die folgenden annehmen—

I.1. Es giebt wenigstens einen Punkt A und wenigstens einen von A verschiedenen Punkt B.

I.2. Es giebt einen Punkt, der nicht zu der Geraden gehoert, welche durch die beiden nach I.1 existierenden verschiedenen Punkte bestimmt ist.

I.3. Existiert zu A, B, C, D ein Punkt E derart, dass ABE$=$CDE$=0$ ist, so existiert auch ein Punkt F derart, dass ACF$=$BDF $=0$ ist. Also existiert auch ein Punkt G derart, dass BCG$=$ADG $=0$ ist.

I.4. Es giebt einen Punkt, der nicht in der Ebene liegt, welche durch die nach I.1 und I.2 existierenden drei Punkte bestimmt ist.

---

[1] Es ist wohl bekannt, dass die birationalen Transformationen die allgemeinsten eineindeutigen Transformationen sind. Neulich hat Dr. H. Berliner eine glaenzende Aufstellungsmethode von eineindeutigen Beziehungen zwischen unendlich vielen Raeumen gegeben, von welchen die Dualitaet, die quadratischen Transformationen etc. je ein specieller Fall sind. Dabei sind die Koordinaten mittels Doppelverhaeltnisses definiert. S. L'Enseignement Mathématique, Tome XIX, 1917, S. 337.

[2] Abstrakte Geometrie, II, 2, etc.

I.5. Es giebt wenigstens einen Punkt in demselben Raume, wie die nach I.1., I.2., I.4. existierenden vier Punkte, aber mit keinen drei von ihnen in einer Ebene.

I.6. Es existiert kein Punkt ausserhalb $|ABCD|$.

In dem in (i), (ii) und (iii) definierten System von Punkten, Ebenen und Geraden gelten die raeumlichen Axiome der Verknuepfung[1] da (X_i) eben demselben Zahlensystem angehoeren wie (x_i).

2° Unsre raeumliche projektive Geometrie koennte vollstaendig begruendet werden, wenn wir noch weiter die Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome bewiesen. Da aber unsre Geometrie eine Koordinatengeometrie ist, koennen wir kuerzlich den *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie* ermitteln, indem wir den Pascal'schen Satz einfuehren. In der Tat ist der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (die Definition der Projektivitaet auf dieselbe Weise wie in der gewoehnlichen projektiven Geometrie gemacht seiend), auf Grund des Pascal'schen und des Desarguesschen Satzes rechnerisch beweisbar.[2]

Also bleibt nur noch uebrig, die Desarguesschen und Pascal'schen Saetze zu beweisen.

3° Desarguesscher Satz: *Sind* $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ *drei Gerade eines Punkte* O, *welche nicht in einer Ebene liegen, schneiden sich die Geraden* $[AB]$, $[A_1B_1]$ *in einem Punkte* R, *die Geraden* $[BC]$, $[B_1C_1]$ *in einem Punkte* P, *die Geraden* $[CA]$, $[C_1A_1]$ *in einem Punkte* Q, *so liegen die drei Punkte* P, Q, R *in einer Geraden.*

In der Tat liegt P auf $[BC]$, also in $\{ABC\}$, ebenso in $\{A_1B_1C_1\}$, also in der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen; dasselbe gilt von Q und R.

Zusatz: *In jeder Ebene in der Pseudogeometrie gilt der Desarguessche Satz.*

In der Tat kann die ebene Geometrie in jeder Ebene als Schnitt einer raeumlichen Geometrie angesehen werden.

4° Pascal'scher Satz: *Liegen* A, B, C *auf einer und* A_1, B_1, C_1 *auf einer zweiten Geraden einer Ebene, so liegen die drei Punkte* $([BC_1], [B_1C])$, $([CA_1], [C_1A])$, $([AB_1], [A_1B])$ *in einer Geraden.*

Dieser Satz folgt aus dem folgenden Lemma, da in dem unsrer Geometrie zu Grunde liegenden Zahlensystem das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt.—

---

1 Abstrakte Geometrie, II, 68.

2 „ „ „ 141.

Lemma: *In einer ebenen Desarguesschen Koordinatengeometrie gilt der Pascal'sche Satz, wenn in dem zu Grunde liegenden Zahlensystem das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt*[1].

Hiermit ist unser Satz vollstaendig begruendet.

3. Wir wollen jetzt, der spaeteren Anwendungen wegen, einige Saetze betrachten.—

Satz: *Sind* (X_i'), (X_i'') *zwei verschiedene Pseudopunkte der Pseudoschnittgeraden der beiden Pseudoebenen* (s_i'), (s_i''), *so ist in* $(\lambda' X_i' + \lambda'' X_i'')$ *fuer beliebige Werte von* λ', λ'', *die nicht beide Null sind, stets ein Pseudopunkt und fuer geeignete Werte von* λ', λ'' *jeder Pseudopunkt* (X_i) *der Pseudogeraden enthalten*.[2]

4. Satz: *Sind* (s_i'), (s_i'') *zwei verschiedene Pseudoebenen der Pseudoverbindungsgeraden der zwei verschiedenen Pseudopunkte* (X_i'), (X_i''), *so ist in* $(l' s_i' + l'' s_i'')$ *fuer beliebige Werte von* l', l'', *die nicht beide Null sind, stets eine Pseudoebene und fuer geeignete Werte von* l', l'' *jede beliebige Pseudoebene der Pseudogeraden enthalten*.[3]

5. Satz: *Sind* (X_i'), (X_i''), (X_i''') *drei nicht in einer Pseudogeraden liegende Pseudopunkte einer Pseudoebene, so ist in* $(\lambda' X_i' + \lambda'' X_i'' + \lambda''' X_i''')$ *fuer beliebige Werte vou* $\lambda', \lambda'', \lambda'''$, *die nicht zugleich Null sind, stets ein Pseudopunkt und fuer geeignete Werte von* $\lambda', \lambda'', \lambda'''$, *jeder beliebige Punkt* (X_i) *der Pseudoebene enthalten*.[4]

6. Satz: *Sind* (s_i'), (s_i''), (s_i''') *drei nicht durch eine Pseudogerade gehende Pseudoebenen eines Pseudopunhtes, so ist in* $(l' s_i' + l'' s_i'' + l''' s_i''')$ *fuer beliebige Werte von* l', l'', l''', *die nicht zugleich Null sind, stets eine Pseudoebene und fuer geeignete Werte von* l_i', l_i'', l_i''' *jede beliebige Pseudoebene des Pseudopunktes enthalten*.[5]

II.

Pseudoprojektivitaet, Pseudokegelschnitt etc.

7. Die Definition der *pseudoharmonischen Elemente* soll analog zur gewoehnlichen gemacht werden. Also gelten in unsrer Pseudogeometrie die folgenden Saetze.—

Erster Harmoniesatz: *Durch irgend drei von vier pseudoharmonischen Pseudoelementen ist der vierte eindeutig bestimmt.*

---

1 Abstrakte Geometrie, II, 110.
2 „ „ „ 69.
3 „ „ „ 70.
4 „ „ „ 71.
5 „ „ „ 72.

Zweiter Harmoniesatz: *Wenn A, B, C, D pseudoharmonisch sind, dann sind auch C, D, A, B pseudoharmonisch.*

8. Die Definition der *Pseudoprojektivitaet*, die der *Pseudoperspektivitaet* und die der *Pseudoinvolution*, sollen analog zur gewoehnlichen gemacht werden.

9. Definition. Zwei Pseudoraeume heissen *pseudokollineaer aufeinander bezogen*, wenn jedem Pseudopunkte (X_i) des einen Raumes ein Pseudopunkt (X_i) des andern so zugeordet ist, dass

$$\begin{aligned} k'X_1' &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4, \\ k'X_2' &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4, \qquad |a_{ij}| \neq 0. \\ k'X_3' &= a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4, \\ k'X_4' &= a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4, \end{aligned}$$

Satz: *Jedem Pseudopunkt des einen Pseudoraumes entspricht bei der Pseudokollineation ein einziger Pseudopunkt des andern.*

Satz: *Die Pseudoebenen der Pseudoraeume sind bei der Pseudokollineation einander eindeutig zugeordnet.*

Satz: *So oft ein Pseudopunkt (X_i') in einer Pseudoebene (s_i) liegt bei der Pseudokollineation auch der entsprechende Pseudopunkt (X_i') in der zu (s_i) zugeordneten Pseudoebenen (s_i').*

Definition. Ist Ω eine Pseudokollineation derart, dass $\Omega^2 = 1$ ist, dann heisst Ω eine *Pseudoinvolution der Pseudokollineation.*

10. Definition. Zwei Pseudoraeume heissen *einander pseudoreciprok* (oder *pseudokorrelativ*) *zugeordnet*, wenn jedem Pseudopunkte (X_i) des ersten Raumes eine Pseudoebene (s_i') des zweiten Raumes und jeder Pseudoebene (s_i) des ersten ein Pseudopunkt (X_i') des zweiten so zugeordnet sind, dass

$$\begin{aligned} r'X_1' &= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 + a_{14}s_4, \\ r'X_2' &= a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 + a_{24}s_4, \qquad |a_{ij}| \neq 0; \\ r'X_3' &= a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 + a_{34}s_4, \\ r'X_4' &= a_{41}s_1 + a_{42}s_2 + a_{43}s_3 + a_{44}s_4, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} tX_1 &= a_{11}s_1' + a_{21}s_2' + a_{31}s_3' + a_{41}s_4', \\ tX_2 &= a_{12}s_1' + a_{22}s_2' + a_{32}s_3' + a_{42}s_4', \end{aligned}$$

[1] Also ist die Pseudokollineation von der Form $B^{-1}LB$, wo L eine gewoehnliche Kollineation und B eine birationale Transformation sind.

$$tX_3 = a_{13}s_1' + a_{23}s_2' + a_{33}s_3' + a_{43}s_4', \qquad | a_{ji} | \neq 0.$$
$$tX_4 = a_{14}s_1' + a_{24}s_2' + a_{34}s_3' + a_{44}s_4',$$

Satz: *Jedem Pseudopunkte des einen Pseudoraumes entspricht eine Pseudoebene des andern Pseudoraumes, und jeder Pseudoebene des einen Pseudoraumes entspricht ein Pseudopunkt des andern Raumes.*

Definition. Ist Ω eine Pseudokorrelation derart, dass $\Omega^2 = 1$ ist, dann heisst Ω eine *Pseudopolarreciprocitaet.*

Satz: *Jede Pseudopolarreciprocitaet fuehrt auf eine Pseudoflaeche zweiter Ordnung.*

11. Definition. Zwei Pseudoebenen heissen *pseudokollineaer aufeinander bezogen*, wenn jedem Pseudopunkte (X_i) der einen Pseudoebene ein Pseudopunkt (X_i') der andern Pseudoebene so zugeordnet ist, dass

$$r'X_1' = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3,$$
$$r'X_2' = a_{21}X_1 + a_{22}X_1 + a_{23}X_3, \qquad | a_{ij} | \neq 0.$$
$$r'X_3' = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3,$$

Satz: *Jedem Pseudopunkte der einen Pseudoebene entspricht ein einziger Pseudopunkt der andern.*

Satz: *Die Pseudogeraden der Pseudoebenen sind einander eindeutig zugeordnet.*

Satz: *So oft ein Pseudopunkt (X_i) in einer Pseudogeraden (s_i) liegt, liegt auch der entsprechende Pseudopunkt (X_i') in der zu (s_i) zugeordneten Pseudogeraden (s_i').*

Definition. Ist Ω eine Pseudokollineation derart, dass $\Omega^2 = 1$ ist, dann heisst Ω eine *Pseudoinvolution der Pseudokollineation.*

12. Definition. Zwei Pseudoebenen sind einander *pseudoreciprok* (oder *pseudokorrelativ*) zugeordnet, wenn jedem Pseudopunkte (X_i) der ersten Pseudoebene ein Pseudogerade (s_i') der zweiten Pseudoebene und jeder Pseudogeraden (s_i) der ersten Pseudoebene ein Pseudopunkt (X_i') der zweiten so zugeordnet sind, dass

$$r'X_1' = a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3,$$
$$r'X_2' = a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3. \qquad | a_{ij} | \neq 0;$$
$$r'X_3' = a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3,$$

und

$$tX_1 = a_{11}s_1' + a_{21}s_2' + a_{31}s_3',$$
$$tX_2 = a_{12}s_1' + a_{22}s_2' + a_{32}s_3', \qquad |a_{ji}| \neq 0.$$
$$tX_3 = a_{13}s_1' + a_{23}s_2' + a_{33}s_3',$$

Satz: *Jedem Pseudopunkt der einen Pseudoebene entspricht eine Pseudogerade der andern und jeder Pseudogeraden der einen Pseudoebene entspricht ein Pseudopunkt der andern.*

Definition. Es sei in der Pseudokorrelation $(s_i) \equiv (s_i')$, und $(X_i) \equiv (X_i')$; eine derartige Zuordnung in der Pseudoebene nennt man ein *pseudoebenes Polarsystem* oder eine *Pseudopolarreciprocitaet.*

Satz: *Jede Pseudopolarreciprocitaet fuehrt auf eine Pseudokurve zweiter Ordnung.*

13. Die Erzeugung des Pseudokegelschnittes, die des Pseudokegels, die der Kurve dritter Ordnung, die der Regelflaeche zweiter Ordnung sind ganz zu den gewoehnlichen analog.

14. Satz: *In jeder Pseudoebene gilt eine ebene pseudoprojektive Geometrie.*

Wir koennen ein Koordinatensystem $(X_1' : X_2' : X_3')$ in jede Pseudoebene einfuehren, indem wir in den Formeln in 9 nur $X_4' = 0$ setzen.

KAP. II.

Aufbau einer raeumlichen pseudoprojektiven Geometrie mittels der allgemeinen kubischen birationalen Transformation.

III

Pseudoelemente.

15. Es sei die allgemeine kubische birationale Transformation durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} A \equiv \sum\limits_{i,k} a_{ik}x_iX_k = 0, \\ B \equiv \sum\limits_{i,k} b_{ik}x_iX_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \\ C \equiv \sum\limits_{i,k} c_{ik}x_iX_k = 0, \end{cases}$$

gegeben. Ordnen wir die gegebenen birationalen Gleichungen nach den X_i, so moegen sie die Form annehmen:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 = 0, \\ B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_4X_4 = 0, \\ C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 = 0, \end{cases}$$

wo

$$(3)\qquad \begin{aligned} A_i &= \frac{\partial A}{\partial X_i} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4,\\ B_i &= \frac{\partial B}{\partial X_i} = b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + b_{3i}x_3 + b_{4i}x_4,\\ C_i &= \frac{\partial C}{\partial X_i} = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + c_{3i}x_3 + c_{4i}x_4. \end{aligned}$$

Nach den x_i geordnet erhaelt man dagegen

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_1'x_1 + A_2'x_2 + A_3'x_3 + A_4'x_4 &= 0,\\ B_1'x_1 + B_2'x_2 + B_3'x_3 + B_4'x_4 &= 0,\\ C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 + C_4'x_4 &= 0, \end{aligned}$$

wo

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_k' &= \frac{\partial A}{\partial x_k} = a_{k1}X_1 + a_{k2}X_2 + a_{k3}X_3 + a_{k4}X_4,\\ B_k' &= \frac{\partial B}{\partial x_k} = b_{k1}X_1 + b_{k2}X_2 + b_{k3}X_3 + b_{k4}X_4,\\ C_k' &= \frac{\partial C}{\partial x_k} = c_{k1}X_1 + c_{k2}X_2 + c_{k3}X_3 + c_{k4}X_4. \end{aligned}$$

Aus (2) oder (3) erhalten wir

$$(6)\qquad X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

oder

$$rX_i = \varphi_i,\ (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$(7)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{vmatrix} A_2A_3A_4 \\ B_2B_3B_4 \\ C_2\,C_3\,C_4 \end{vmatrix}, \quad \varphi_2 = -\begin{vmatrix} A_1A_3A_4 \\ B_1B_3B_4 \\ C_1\,C_3\,C_4 \end{vmatrix},\\ \varphi_3 &= \begin{vmatrix} A_1A_2A_4 \\ B_1B_2B_4 \\ C_1\,C_2\,C_4 \end{vmatrix}, \quad \varphi_4 = -\begin{vmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \\ C_1\,C_2\,C_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ist, waehrend andererseits

$$(8)\qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4,$$

oder

$$r'x_i = \psi_i,\ (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$(9)\qquad \begin{aligned} \psi_1 &= \begin{vmatrix} A_2'A_3'A_4' \\ B_2'B_3'B_4' \\ C_2'C_3'C_4' \end{vmatrix}, \quad \psi_4 = -\begin{vmatrix} A_1'A_3'A_4' \\ B_1'B_3'B_4' \\ C_1'C_3'C_4' \end{vmatrix},\\ \psi_3 &= \begin{vmatrix} A_1'A_2'A_4' \\ B_1'B_2'B_4' \\ C_1'C_2'C_4' \end{vmatrix}, \quad \psi_4 = -\begin{vmatrix} A_1'A_2'A_3' \\ B_1'B_2'B_3' \\ C_1'C_2'C_3' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ist.
Die Funktion φ_i, ebenso die ψ_i sind demnach vom dritten Grade in x_i resp. X_i. Einer Ebene

$$(10) \qquad e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3+e_4x_4 = 0$$

im Raume R entspricht im Raume R′ die Flaeche dritter Ordnung

$$(11) \qquad e_1\psi_1+e_2\psi_2+e_3\psi_3+e_4\psi_4 = 0,$$

und ebenso der Ebene

$$(12) \qquad e_1'X_1+e_2'X_2+e_3'X_3+e_4'X_4 = 0$$

die Flaeche dritter Ordnung

$$(13) \qquad e_1'\varphi_1+e_2'\varphi_2+e_3'\varphi_3+e_4'\varphi_4 = 0.$$

Also ist die Transformation kubisch in beiderlei Sinn.

16. *Das Fundamentalsystem in jedem Raume besteht aus einer Kurve sechster Ordnung (vom Geschlechte drei) L^6 und einer Regelflaeche achter Ordnung* M, *welche aus allen dreifachen Sehnen dieser Raumkurve besteht und die Kurve sechster Ordnung als eine dreifache Kurve enthaelt. Den Punkten der Fundamentalkurven in einem Raume entsprechen je die Erzeugenden der Regelflaeche des andern Raumes.*[1]

IV.

Geometrische Darlegung der Pseudopunkte, Pseudoebenen und Pseudogeraden.

17. Es giebt vier Arten von Pseudoebenen :—

(i) *Eine Pseudoebene erster Art* heisst jede die Fundamentalkurve sechster Ordnung L^6 enthaltende Flaeche dritter Ordnung und ist durch eine Gleichung von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0,\ s_4 \neq 0)$$

gegeben. Nun fragt es sich, ob die Flaeche dritter Ordnung, welche aus Bild einer Ebene

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0$$

in der kubischen Transformation (1) ergiebt, die allgemeine ihrer Art ist. Da wir aber in der Transformation 48 Konstanten zur Verknuep-

[1] Doehlemann, Transformationen II.

fung haben, die allgemeine Flaeche dritter Ordnung weiter nur von 19 Konstanten abhaengt, so koennen wir noch jede allgemeine Flaeche dritter Ordnung als durch eine derartige Verwandtschaft entstanden auffassen.

(ii) *Einen Pseudoebene zweiter Art* heisst jede durch den bestimmten Punkt z. B. $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0$ hindurchgehende, die Fundamentalkurve L^6 enthaltende Flaeche dritter Ordnung, und ist durch eine Gleichung von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0;\ s_4 = 0)$$

gegeben.

(iii) *Eine Pseudoebene dritter Art* heisst jede durch eine Raumkurve dritter Ordnung z. B. $\varphi_1=\varphi_2=0$ und die Fundamentalkurve L^6 hindurchgehende Flaeche dritter Ordnung und ist durch eine Gleichung von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 = 0,\ s_4 = 0)$$

gegeben.

(iv) *Eine Pseudoebene vierter Art* heisst die feste die L^6 enthaltende Flaeche dritter Ordnung, welche durch eine Gleichung von der Form

$$s_iX_i = 0,\ (i=1,2,3,4)$$
$$(s_i \neq 0,\ s_j = s_k = s_l = 0)$$

gegeben ist.

18. Es giebt vier Arten von Pseudopunkten.

(i) *Ein Pseudopunkt erster Art* heisst jeder gewoehnliche Punkt nicht auf $\varphi_i=0$, $(i=1,2,3,4)$, und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3+b_4s_4 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0,\ b_4 \neq 0)$$

gegeben.

(ii) *Ein Pseudopunkt zweiter Art* heisst jeder gewoehnliche Punkt auf einer von $\varphi_i=0$, $(i=1,2,3,4)$ und ist durch eine Gleichung z. B. von der Form

$$b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0,\ b_4 = 0)$$

gegeben.

(iii) *Ein Pseudopunkt dritter Art* heisst jeder gewoehnliche Punkt auf der Raumkurve dritter Ordnung z. B. $\varphi_3=\varphi_4=0$ und ist durch eine Gleichung z. B. von der Form

$$b_1 s_1 + b_2 s_2 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 = b_4 = 0)$$

gegeben.

(iv) *Ein Pseudopunkt vierter Art* heisst jeder Schnittpunkt z. B. von $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ und ist durch eine Gleichung von der Gestalt

$$b_1 s_1 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 = b_3 = b_4 = 0)$$

gegeben.

19. Definition. Sind (s_i) und (s_i') irgend zwei Pseudoebenen, dann heisst der Inbegriff der Punkte, die zu (s_i) und (s_i') gemeinsam sind, eine *Pseudogerade*.

20. Es giebt sieben Arten von Pseudogeraden.

(i) *Ein Pseudogerade erster Art* heisst jede Raumkurve dritter Ordnung, welche durch vier feste Punkte hindurchgeht, und ist durch Gleichungen von der Gestalt entweder

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$
$$a_1' X_1 + a_2' X_2 + a_3' X_3 + a_4' X_4 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_i' \neq 0,\ i = 1, 2, 3, 4)$$

oder

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$
$$a_1' X_1 + a_2' X_2 + a_3' X_3 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_j' \neq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3)$$

oder

$$a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$
$$a_1' X_1 + a_3' X_3 + a_4' X_4 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_j \neq 0,\ i = 2, 3, 4,\ j = 1, 3, 4)$$

gegeben. In der Tat, die ersten zwei koennen immer zur dritten Gestalt reduciert werden.

(ii) *Eine Pseudogerade zweiter Art* heisst jede der bestimmten kubischen Kurve z. B. $\varphi_2 = \varphi_2 = 0$ begegnende Raumkurve dritter Ordnung und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$
$$a_1' X_1 + a_2' X_2 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_j' \neq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2)$$

oder

$$a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$
$$a'_1 X_1 + a'_2 X_2 = 0,$$

$$(a_i \neq 0,\ a_j' \neq 0,\ i=2, 3, 4,\ j=1, 2)$$

gegeben. In der Tat ist die erste zur letzten Gestalt reduzierbar.

(iv) *Eine Pseudogerade vierter Art* heisst jede zwei bestimmten kubischen Raumkurven z.B. $\varphi_1=\varphi_2=0$, $\varphi_2=\varphi_3=0$ begegnende gewoehnliche Raumkurve dritter Ordnung und ist durch Gleichungen von der Form

$$a_1X_1+a_2X_2 = 0,$$
$$a_3'X_3+a_4'X_4 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_j' \neq 0,\ i=1, 2,\ j=3, 4)$$

gegeben.

(v) *Eine Pseudogerade fuenfter Art* heisst jede gewoehnliche kubische Raumkurve in der Flaeche dritter Ordnung z.B. $\varphi_2=0$, welche durch die festen Schnittspunkte von $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=0$ hindurchgeht, und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4 = 0,$$
$$a_1'X_1 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_1' \neq 0,\ i=1, 2, 3, 4)$$

oder

$$a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4 = 0,$$
$$a_1'X_1 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_1' \neq 0,\ i=2, 3, 4)$$

gegeben. In der Tat ist die erste zur letzten reducierbar.

(vi) *Eine Pseudogerade sechster Art* heisst jede durch einen festen Punkt z.B. $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0$ hindurchgehende gewoehnliche kubische Raumkurve in der Flaeche dritter Ordnung $\varphi_2=0$ und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3 = 0,$$
$$a_1'X_1 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_1' \neq 0,\ i=1, 2, 3)$$

oder

$$a_2X_2+a_3X_3 = 0.$$
$$a_1'X_1 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_1' \neq 0,\ i=2, 3)$$

gegeben. In der Tat ist die erste zur zweiten reducierbar.

(vii) *Eine Pseudogerade siebenter Art* heisst jede bestimmte gewoehnliche kubische Raumkurve, welche durch Gleichungen von der Form entweder

$$a_1X_1+a_2X_2 = 0,$$
$$a_1'X_1+a_2'X_2 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_i' \neq 0,\ i=1, 2)$$

oder

$$a_1X_1+a_2X_2 = 0,$$
$$a_1'X_1 = 0,$$
$$(a_i \neq 0,\ a_1' \neq 0,\ i=1, 2)$$

oder

$$a_1X_1 = 0,$$
$$a_2'X_2 = 0,$$
$$(a_1 \neq 0,\ a_2' \neq 0)$$

gegeben ist. In der Tat sind die ersten beiden zur letzten reducierbar.

21. Die Definition der *Pseudogrundgebilde* koennen ganz wie in der gewoehnlichen projektiven Geometrie gemacht werden.

22. Die Definitionen der *pseudoprojektiven Operationen* koennen ganz wie in der gewoehnlichen projektiven Geometrie gemacht werden.

V.

Die entsprechenden Gebilde.

23. *Der Flaeche F m-ter Ordnung, welche durch L^6 λ-mal hindurchgeht, entspricht eine Pseudoflaeche F_1 von der Ordnung $(3m\text{-}8\lambda)$, welche (M_1, F_1) zur $(m\text{-}3\lambda)$ fachen Kurve hat.*[1]

24. Bezeichnet man mit $F^m(\lambda)$ eine Flaeche m-ter Ordnung, welche durch L^6 λ-mal hindurchgeht, und mit $F_1^{m'}(\mu)$ eine Pseudoflaeche m'-ter Ordnung, welche $(M_1, F_1^{m'}(\mu))$ als eine μ-fache Kurve hat, dann erhalten wir dass folgende Schema

$$F^1(0)\ F^2(0)\ F^3(0)\ F^4(0)\ F^3(1)\ F^4(1)$$
$$F_1^3(1)\ F_1^6(0)\ F_1^9(3)\ F_1^{12}(4)\ F_1^1(0)\ F_1^4(1)$$

Es ist klar, dass mit leicht verstaendlicher Bezeichnung $F^m(\lambda)$ und $F_1^{m'}(\mu)$ durch $F_1^m(\lambda)$ resp. $F^{m'}(\mu)$ ersetzbar sind.

25. *Einer Raumkurve k-ter Ordnung, welche L^6 in n Punkten trifft, entspricht eine Pseudokurve $(3k\text{-}n)$-ter Ordnung, welche L_1^6 in $(8k\text{-}3n)$ Pseudopunkten begegnet.*[2]

1 Transformationen II.

2 " "

26. Bezeichnet man mit $K^k(n)$ eine Raumkurve k-ter Ordnung, welche L^6 in n Punkten trifft, und mit $K_1^{k'}(s)$ eine Pseudokurve k'-ter Ordnung, welche L_1^6 in s Pseudopunkten begegnet, so erhaelt man das folgende Schema—

$$\begin{array}{ccccccc} K^1(0) & K^2(0) & K^1(1) & K^2(1) & K^1(2) & K^2(2) & \\ K_1^3(8) & K_1^6(16) & K_1^2(5) & K_1^5(13) & K_1^1(2) & K_1^4(10) & \\ K^2(3) & K^3(3) & K^2(4) & K^3(4) & K^2(5) & K^3(5) & K^3(6) \\ K_1^3(7) & K_1^6(15) & K_1^2(4) & K_1^5(12) & K_1^1(1) & K_1^4(9) & K_1^3(6). \end{array}$$

KAP. III.

Ein specieller Fall der vorhergehenden als eine Ergaenzung zur Nishiuchi'schen ebenen pseudoprojektiven Geometrie.

VI.

Pseudopunkte, Pseudoebenen uud Pseudogerade.

27. Die in Kap. II betrachtete Transformation kann mancherlei specielle Formen annehmen, die sich dadurch ergeben, dass die Fundamentalkurven L^6 und L_1^6 zerfallen und zwar entweder fuer beide Raeume in der gleichen Weise oder auch in verschiedener Art.

Im speciellsten Falle besteht jede der beiden Fundamentalkurven aus sechs Geraden, welche je ein Tetraëder bilden. Waehlen wir diese als Fundamentaltetraëder, so laesst sich die Transformation in der Gestalt schreiben :

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = a_1x_2x_3x_4 : a_2x_1x_3x_4 : a_3x_1x_2x_4 : a_4x_1x_2x_3,$$

wobei a_1, a_2, a_3, a_4 Zahlenkoeffizienten sind. Umgekehrt folgt daraus

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_1X_2X_3X_4 : a_2X_1X_3X_4 : a_3X_1X_2X_4 : a_4X_1X_2X_3.$$

Diese Gleichungen erinnern an den analytischen Apparat in der Nishiuchi'schen ebenen Pseudogeometrie, wenn sie sich in der Form schreiben lassen:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \frac{a_1}{x_1} : \frac{a_2}{x_2} : \frac{a_3}{x_3} : \frac{a_4}{x_4},$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{a_1}{X_1} : \frac{a_2}{X_2} : \frac{a_3}{X_3} : \frac{a_4}{X_4}.$$

Speciell koennten wir die Einheitspunkte eines jeden der beiden Koordinatensysteme einander zuweisen und erhielten dann die Formeln

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_4}.$$

28. Beschreibt nun der Punkt (X_i) eine Ebene

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0,$$

so beschreibt der Punkt (x_i) eine *Flaeche dritter Ordnung*

$$s_1a_1x_2x_3x_4+s_2a_2x_3x_4x_1+s_3a_3x_4x_1x_2+s_4a_4x_1x_2x_3 = 0,$$

welche die sechs Kanten des Fundamentaltetraëders in sich enthaelt. Umgekehrt ist

$$\sum_{ijk} a_{ijk}\, x_ix_jx_k = 0, \quad (i, j, k=1, 2, 3)$$

eine beliebige Flaeche dritter Ordnung, welche die sechs Kanten enthaelt. Gesetzt $x_4=0$, so muss es geben $x_1x_2x_3=0$, so dass $a_{111}=a_{222}=a_{333}=a_{112}=a_{221}=a_{113}=a_{331}=a_{223}=a_{332}=0$ sind. Ebenso erhalten wir $a_{444}=a_{114}=a_{441}=a_{224}=a_{442}=a_{334}=a_{443}=0$, so dass die obige Gleichung

$$a_{123}x_1x_2x_3+a_{234}x_2x_3x_4+a_{341}x_3x_4x_1+a_{412}x_4x_1x_2 = 0$$

wird.

29. Es giebt drei Arten von eigentlichen Pseudoebenen :—

(i) *Eine eigentliche Pseudoebene erster Art* heisst jede die sechs Kanten des Fundamentaltetraëders in sich enthaltende Flaeche dritter Ordnung und ist durch eine Gleichung von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0,\ s_4 \neq 0)$$

gegeben.

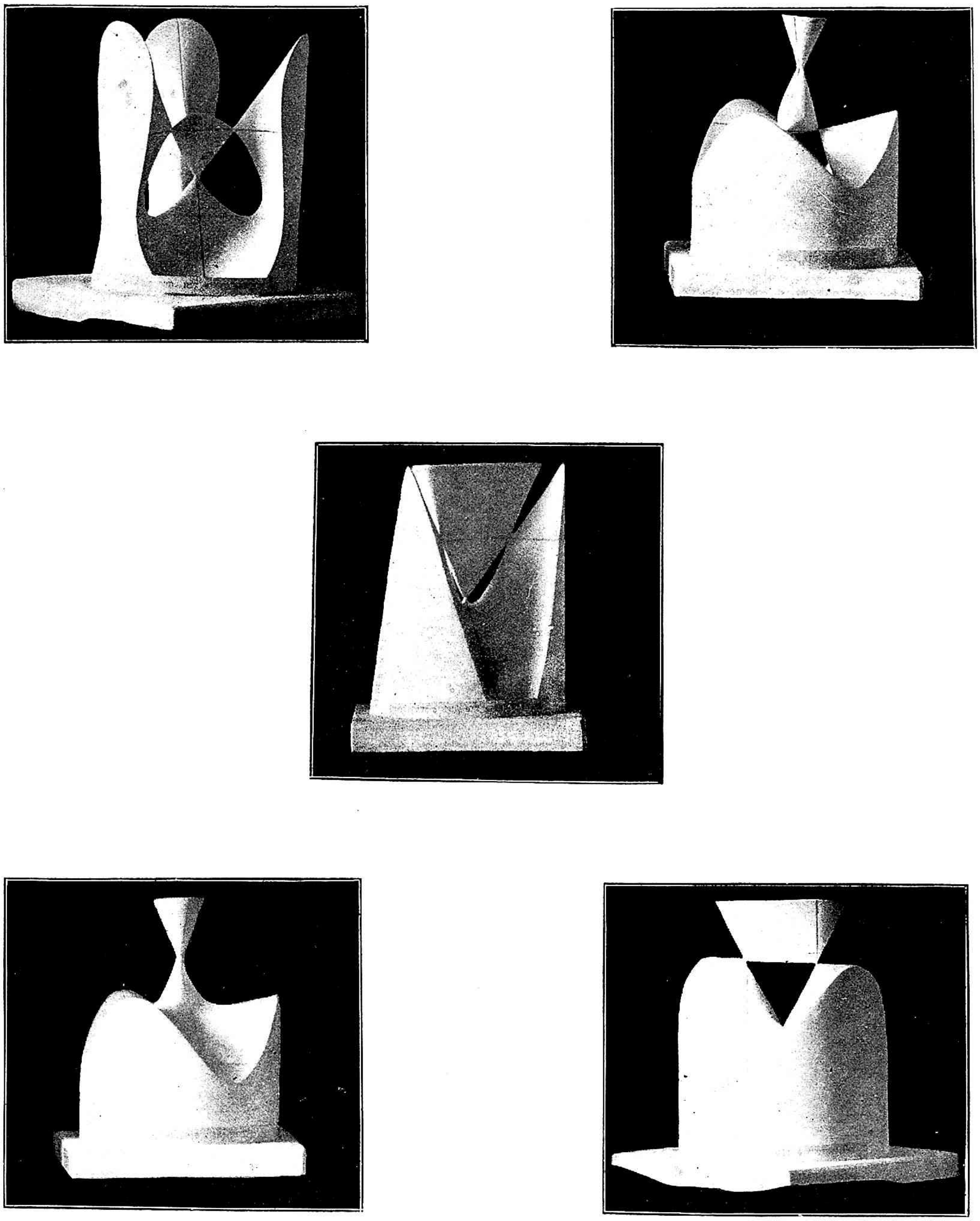
Diese kubische Flaeche gehoert zur XVI-ten Art bei der Cayley'schen Einteilung in 23 Arten[1]; und besitzt vier Knotenpunkte A_1, A_2, A_3, A_4.

Die 27 Geraden in derselben bestehen in

i) den sechs vierfachen Geraden

$$[A_1A_2] : x_3 = 0,\ x_4 = 0;$$
$$[A_1A_3] : x_2 = 0,\ x_4 = 0;$$
$$[A_1A_4] : x_2 = 0,\ x_3 = 0;$$
$$[A_2A_3] : x_1 = 0,\ x_4 = 0;$$

1 Cayley, Collected Mathematical Papers, Vol. VI, p. 359.



Eigentliche

Pseudoebenen erster Art.

(Modelle, verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.)

$$[A_2A_4] : x_1 = 0, \ x_3 = 0 ;$$
$$[A_3A_4] : x_1 = 0, \ x_2 = 0 ;$$

und ii) den drei einfachen Geraden

$$([A_1A_2][A_3A_4]) : s_3a_3x_3 + s_4a_4x_4 = 0, \ s_1a_1x_1 + s_2a_2x_2 = 0,$$
$$([A_1A_3][A_2A_4]) : s_2a_2x_2 + s_4a_4x_4 = 0, \ s_1a_1x_1 + s_3a_3x_3 = 0,$$
$$([A_1A_4][A_2A_3]) : s_2a_2x_2 + s_3a_3x_3 = 0, \ s_1a_1x_1 + s_4a_4x_4 = 0,$$

so dass $6.4 + 3.1 = 27$ ist. Die 45 dreifachen Tangentialebenen bestehen in—

i) den sechs zweifachen Ebenen

$$s_3a_3x_3 + s_4a_4x_4 = 0,$$
$$s_2a_2x_2 + s_4a_4x_4 = 0,$$
$$s_2a_2x_2 + s_3a_3x_3 = 0,$$
$$s_1a_1x_1 + s_4a_4x_4 = 0,$$
$$s_1a_1x_1 + s_3a_3x_3 = 0,$$
$$s_1a_1x_1 + s_2a_2x_2 = 0,$$

und ii) den vier achtfachen Ebenen

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_4 = 0,$$

und iii) der einen einfachen Ebene

$$s_1a_1x_1 + s_2a_2x_2 + s_3a_3x_3 + s_4a_4x_4 = 0,$$

so dass $6.2 + 4.8 + 1.1 = 45$ ist.

(ii) *Eine eigentliche Pseudoebene zweiter Art* heisst jede die drei Knnten $[A_iA_j]$, $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$[1] enthaltende Kegelflaeche zweiter Ordnung und ist durch eine Gleichung z.B. von der Form

$$s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0, \ s_2 \neq 0, \ s_3 \neq 0, \ s_4 = 0)$$

gegeben.

(iii) *Ein eigentliche Pseudoebene dritter Art* heisst jede Ebene, welche durch eine Kante z.B. $[A_3A_4]$ hindurchgeht und mit keiner von den Ebenen $\{A_1A_3A_4\}$, $\{A_2A_3A_4\}$ zusammenfaellt, und ist durch eine Gleichung z.B. von der Form

[1] Wir wollen das Fundamentaltetraëder mit $A_1A_2A_3A_4$ bezeichnen.

$$s_1X_1+s_2X_2 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 = 0,\ s_4 = 0)$$

gegeben.

30. Es giebt eine Art von *uneigentlichen Pseudoebenen*; sie besteht aus dem Inbegriff der Linienelemente in einem Ecke z.B. A_1 des Fundamentaltetraëders, die Kanten $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_1A_4]$ inklusiv, und ist durch eine Gleichung von der Form

$$s_1X_1 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0,\ s_4 = 0)$$

gegeben.

31. Es giebt eine Art von *eigentlichen Pseudopunkten*: Ein eigentlicher Pseudopunkt ist ein gewoehnlicher Punkt und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3+b_4s_4 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0,\ b_4 \neq 0)$$

gegeben.

32. Es giebt drei Arten von uneigentlichen Pseudopunkten:

(i) *Ein uneigentlicher Pseudopunkt erster Art* heisst jedes Linienelement in einem Ecke z.B. A_4 und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0,\ b_4 = 0)$$

gegeben.

(ii) *Ein uneigentlicher Pseudopunkt zweiter Art* heisst jedes Ebenenelement durch eine Kante z.B. $[A_3A_4]$ und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_1s_1+b_2s_2 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0)$$

gegeben.

(iii) *Ein uneigentlicher Pseudopunkt dritter Art* heisst jeder Punkt in einer der vier Flaechen z.B. $\{A_2A_3A_4\}$ des Fundamentaltetraëders (die ganze Ebene) und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_1s_1 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0)$$

gegeben. Jede zwei solchen Punkte sollen als ein und derselbe angesehen werden.

33. Es giebt vier Arten von eigentlichen Pseudogeraden:

(i) *Eine eigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jede durch A_1, A_2 A_3, A_4 hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung, und ist durch Gleichungen von der Gestalt entweder

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2+s_3'X_3+s_4'X_4=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_i'\neq 0,\ i=1,2,3,4)$$

oder

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2+s_3'X_3=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_j'\neq 0,\ i=1,2,3,4,\ j=1,2,3)$$

oder

$$s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0,$$
$$b_1'X_1+s_3'X_3+s_4'X_4=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_j'\neq 0,\ i=2,3,4,\ j=1,3,4)$$

gegeben. In der Tat koennen die ersten zwei zur dritten Gestalt reduciert werden..

(ii) *Eine eigentliche Pseudogerade zweiter Art* heisst jeder Kegelschnitt, welcher durch zwei Ecke z.B. A_3, A_4 des Fundamentaltetraëders hindurchgeht und die gegenueberliegende Kante trifft und in keiner der Tetraëderflaechen enthalten ist, und ist durch Gleichungen von der Gestalt entweder

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_3'\neq 4,\ i=1,2,3.4,\ j=1,2)$$

oder

$$s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0.$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_j'\neq 0,\ i=2,3,4,\ j=1,2)$$

gegeben. In der Tat ist die erste zur letzten Gestalt reducierbar.

(iii) *Eine eigentliche Pseudogerade dritter Art* heisst jede Gerade, die durch A_i hindurchgeht und in keiner der Fundamentaltetraëderflaechen liegt, und ist durch Gleichungen z.B. entweder von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3=0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2+s_3'X_3\equiv 0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_i'\neq 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3)$$

oder von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3 = 0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2 = 0,$$
$$(s_i \neq 0, \ s_j' \neq 0, \ i=1, 2, 3, \ j=1, 2)$$

oder von der Form

$$s_2X_2+s_3X_3 = 0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2 = 0,$$
$$(s_i \neq 0, \ s_j' \neq 0, \ i=2, 3, \ j=1, 2)$$

gegeben. In der Tat sind die beiden ersten zur letzten Gestalt reducierbar.

(iv) *Eine eigentliche Pseudogerade vierter Art* heisst jede Gerade, die einen Punkt in einer Kante $[A_iA_j]$ mit einem Punkte in der gegenueberliegenden Kante $[A_kA_l]$ verbindet und mit keiner der sechs Kanten zusammenfaellt, und ist durch Gleichungen von der Form

$$s_3'X_3+s_4'X_4 = 0,$$
$$s_1X_1+s_2X_2 = 0,$$
$$(s_i \neq 0, \ s_j' \neq 0, \ i=1, 2, \ j=3, 4)$$

gegeben.

34. Es giebt drei Arten von uneigentlichen Pseudogeraden.

(i) *Eine uneigentliche Pseudogerade erster Art* heisst der Inbegriff der Linienelemente im Punkte A_i, den Kanten $[A_iA_j]$, $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ inklusiv, welche in einer Kegelflaeche etwa $A_i(A_jA_kA_lPQ)$ liegen, und ist durch Gleichungen z.B. von der Form entweder

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0,$$
$$s_1'X_1 = 0,$$
$$(s_i \neq 0, \ s_1' \neq 0, \ i=1, 2 \ 3, 4)$$

oder

$$s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4 = 0,$$
$$s_1'X_1 = 0,$$
$$(s_i \neq 0, \ s_1' \neq 0, \ i=2, 3, 4)$$

gegeben. In der Tat, die erste ist zur letzten reducierbar.

(ii) *Eine uneigentliche Pseudogerade zweiter Art* heisst der Inbegriff der Linienelemente im Punkte A_i, welche in der $[A_iA_j]$ enthaltenden, aber nicht mit $\{A_iA_jA_k\}$, $\{A_iA_jA_l\}$ zusammenfallenden Ebene ε liegen, die Geraden $[A_iA_j]$, $[\{A_iA_kA_l\}, \varepsilon]$ inklusiv, und ist durch Gleichungen von der Gestalt entweder

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3=0,$$
$$s_1'X_1=0,$$
$$(s_i\neq 0.\ s_1'\neq 0,\ i=1,2,3)$$

oder

$$s_2X_2+s_3X_3=0,$$
$$s_1'X_1=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_1'\neq 0,\ i=2,3)$$

gegeben. In der Tat, die erste ist zur zweiten Gestalt reducierbar.

(iii) *Eine uneigentliche Pseudogerade dritter Art* heisst jede Kante $[A_iA_j]$ und ist durch Gleichungen z.B. von der Gestalt entweder

$$s_1X_1+s_2X_2=0,$$
$$s_1'X_1+s_2'X_2=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_i'\neq 0,\ i=1,2)$$

oder

$$s_1X_1+s_2X_2=0,$$
$$s_1X_1=0,$$
$$(s_i\neq 0,\ s_1'\neq 0,\ i=1,2)$$

oder

$$s_1X_1=0,$$
$$s_2'X_2=0,$$
$$(s_1\neq 0,\ s_2'\neq 0)$$

gegeben. In der Tat, die ersten beiden sind zur letzten reduzierbar.

VII

Merkwuerdige Tatsachen in der Pseudogeometrie.

35. Satz: (i) *Eine durch* $[A_iA_j]$ *hindurchgehende gewoehnliche Ebene und* (ii) *eine die sechs Kanten enthaltende kubische Flaeche sind je eine Pseudoebene.*

36. Satz: (i) *Eine* A_1, A_2, A_3, A_4 *enthaltende gewoehnliche Quadriflaeche und* (ii) *eine* A_i *enthaltende gewoehnliche Ebene koennen je als eine Pseudoquadriflaeche angesehen werden.*

37. Satz: (i) *Eine* A_i *nicht enthaltende gewoehnliche Ebene und* (ii) *eine* A_i, A_j, A_k *enthaltende Quadriflaeche kann je als eine pseudokubische Flaeche angesehen werden.*

38. Satz: (i) *Eine durch* A_i *hindurchgehende gewoehnliche Gerade,* (ii) *eine* $[A_iA_j]$, $[A_kA_l]$ *betreffende Gerade,* (iii) *eine Kante*

$[A_iA_j]$, (iv) *ein durch* A_k, A_l *hindurchgehender und* $[A_iA_j]$ *betreffender Kegelschnitt und* (v) *eine durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende kubische Kurve sind je eine Pseudogerade.*

39. Satz: (i) *Eine* $[A_kA_l]$ *und keine anderen Kanten schneidende gewoehnliche Gerade,* (ii) *ein durch* A_j *hindurchgehender und* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ *schneidender Kegelschnitt,* (iii) *ein durch* A_i, A_j *hindurchgehender und keine andern Kanten schneidender Kegelschnitt,* (iv) *ein durch* A_{ij}[1], A_k *hindurchgehender und durch* A_l *nicht hindurchgehender Kegelschnitt in der Ebene* $\{A_{ij}A_kA_l\}$, (v) *ein* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$, $[A_jA_k]$, $[A_jA_l]$ *schneidender Kegelschnitt und* (vi) *eine durch* A_k, A_l *hindurchgehende und* $[A_iA_j]$, $[A_jA_k]$, $[A_jA_l]$ *betreffende kubische Raumkurve sind je ein Pseudokegelschnitt.*

Beweis. (i). $K^1\ (1) = K_1^2\ (5)$.
(ii), (iii), (iv), (v). $K^2\ (4) = K_1^2\ (4)$.
(vi). $K^3\ (7) = K_1^2\ (3)$.

40. Satz: (i) *Eine keine von den sechs Kanten* $[A_iA_j]$ *betreffende gewoehnliche Gerade,* (ii) *ein* $[A_iA_j]$, $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ *schneidender und durch* A_n $(n=1, 2, 3, 4)$ *nicht hindurchgehender Kegelschnitt,* (iii) *ein* $[A_iA_j]$ *schneidender und mit* $[A_kA_l]$ *koplanaerer und* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ *nicht betreffender Kegelschnitt,* (iv) *ein* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$, $[A_jA_k]$ *betreffender Kegelschnitt und* (v) *eine die sechs Kanten* $[A_iA_j]$, $(i, j=1, 2, 3, 4,\ i \neq j)$ *betreffende kubische Kurve sind je eine pseudokubische Kurve.*

Beweis. (i). $K^1\ (0) = K_1^3\ (8)$.
(ii), (iii), (iv). $K^2\ (3) = K_1^3\ (7)$.
(v). $K^3\ (6) = K_1^3\ (6)$.

41. Satz: *Sind* P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ *irgend vier Pseudopunkte entweder* (i) *auf einer eigentlichen Pseudogeraden erster Art, oder* (ii) *auf einer eigentlichen Pseudogeraden zweiter Art, oder* (iii) *auf einer uneigentlichen Pseudogeraden erster Art, so ist das Pseudodoppelverhaeltnis* $(P_1P_2, P_\lambda P_{\lambda'})$ *gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis der vier projizierenden gewoehnlichen Ebenen* $\{P_\mu A_1P_1\}$, $\{P_\mu A_1P_2\}$, $\{P_\mu A_1P_\lambda\}$, $\{P_\mu A_1P_{\lambda'}\}$, *worin* P_μ *ein beliebiger Punkt auf der Pseudogeraden ist; und umgekehrt.*

Beweis. Man projiziere die vier Punkte $P_1(X')$, $P_2(X'')$, $P_\lambda(X'+\lambda X'')$, $P_{\lambda'}(X'+\lambda' X'')$ von der Geraden $[P_\mu A_1]$ aus mittels der gewoehnlichen Ebenen. Die Gleichungen dieser Ebenen nehmen je die Gestalt

$$a_2X_3X_4 + a_3X_4X_2 + a_4X_2X_3 = 0.$$

---

[1] Von jetzt an, wollen wir einen Punkt auf der Geraden $[A_iA_j]$ stillschweigend mit A_{ij}, P_{ij} etc. bezeichnen.

Also erhalten wir

$$\{P_\mu A_1 P_1\}: \quad \varphi_1 \equiv \begin{vmatrix} X_3'X_4' & X_4'X_2' & X_2'X_3' \\ (X_3'+\mu X_3'')(X_4'+\mu X_4'') & (X_4'+\mu X_4'')(X_2'+\mu X_2'') & (X_2'+\mu X_2'')(X_3'+\mu X_3'') \\ X_3X_4 & X_4X_2 & X_2X_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\{P_\mu A_1 P_2\}: \quad \varphi_2 \equiv \begin{vmatrix} X_3''X_4'' & X_4''X_2'' & X_2''X_3'' \\ (X_3'+\mu X_3'')(X_4'+\mu X_4'') & (X'_4+\mu X_4'')(X_2'+\mu X_2'') & (X_2'+\mu X_2'')(X_3'+\mu X_3'') \\ X_3X_4 & X_4X_2 & X_2X_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\{P_\mu A_1 P_\lambda\}: \quad \varphi_\lambda \equiv \begin{vmatrix} (X_3'+\lambda X_3'')(X_4'+\lambda X_4'') & (X_4'+\lambda X_4'')(X_2'+\lambda X_2'') & (X_2'+\lambda X_2'')(X_3'+\lambda X_3'') \\ (X_3'+\mu X_3'')(X_4'+\mu X_4'') & (X_4'+\mu X_4''.(X_2'+\mu X_2'') & (X_2'+\mu X_2'')(X_3'+\mu X_3'') \\ X_3X_4 & X_4X_2 & X_2X_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\{P_\mu A_1 P_{\lambda'}\}: \quad \varphi_{\lambda'} \equiv \begin{vmatrix} (X_3'+\lambda' X_3'')(X_4'+\lambda' X_4'') & (X_4'+\lambda' X_4'')(X_2'+\lambda' X_2'') & (X_2'+\lambda' X_2'')(X_3'+\lambda' X_3'') \\ (X_3'+\mu X_3'')(X_4'+\mu X_4'') & (X_4'+\mu X_4'')(X_2'+\mu X_2'') & (X_2'+\mu X_2'')(X_3'+\mu X_3'') \\ X_3X_4 & X_4X_2 & (X_2X_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man nun

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} X_3'X_4' & X_4'X_2' & X_2'X_3' \\ X_3''X_4'' & X_4''X_2'' & X_2''X_3'' \\ X_3X_4 & X_4X_2 & X_2X_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} X_3'X_4' & X_4'X_2' & X_2'X_3' \\ X_3'X_4''+X_3''X_4' & X_4'X_2''+X_4''X_2' & X_2'X_3''+X_2''X_3' \\ X_3X_4 & X_4X_2 & X_2X_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta'' \equiv \begin{vmatrix} X_3''X_4'' & X_4''X_2'' & X_2''X_3'' \\ X_3'X_4''+X_3''X_4' & X_4'X_2''+X_4''X_2' & X_2'X_3''+X_2''X_3' \\ X_3X_4 & X_4X_2 & X_2X_3 \end{vmatrix},$$

so erhaelt man

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mu(\mu'+\mu\Delta), \\ \varphi_2 &= -\Delta+\mu\Delta'', \\ \varphi_\lambda &= \varphi_1+\lambda^2\varphi_2-\lambda(\Delta'+\mu^2\Delta''), \\ \varphi_{\lambda'} &= \varphi_1+\lambda'^2\varphi_2-\lambda'(\Delta'+\mu^2\Delta''). \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen ergiebt sich

$$\Delta'+\mu^2\Delta'' = \frac{\varphi_1}{\mu}+\varphi_2\mu,$$

so dass

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= 0, \\ \varphi_1(\mu-\lambda)-\lambda\mu(\mu-\lambda)\varphi_2 &= 0, \\ \varphi_1(\mu-\lambda')-\lambda'\mu(\mu-\lambda')\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Da $\mu-\lambda \neq 0$, $\mu-\lambda' \neq 0$ sind, so erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= 0, \\ \varphi_1-\lambda\mu\varphi_2 &= 0, \\ \varphi_1-\lambda'\mu\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Das Doppelverhaeltnis der vier projizierenden Ebenen ist also

$$(-\lambda\mu):(-\lambda'\mu)=\lambda:\lambda'.$$

Nun ist das Pseudodoppelverhaeltnis (P_1P_2, $P_\lambda P_{\lambda'}$) gleich $\lambda:\lambda'$. Also stimmen die beiden Doppelverhaeltnisse ueberein.

42. Satz: *Sind* P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ *irgend vier Pseudopunkte entweder auf einer eigentlichen oder uneigentlichen Pseudogeraden, so ist das Pseudodoppelverhaeltnis* (P_1P_2, $P_\lambda P_{\lambda'}$) *gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis* (P_1P_2, $P_\lambda P_{\lambda'}$), *wenn die Pseudogebilde als gewoehnliche angesehen sind.*

Beweis. Ist die Pseudogerade entweder eine eigentliche Pseudogerade erster oder zweiter, oder eine uneigentliche Pseudogerade erster Art, so folgt unser Satz unmittelbar aus 41.

Ist die Pseudogerade eine uneigentliche Pseudogerade dritter Art (z.B. [A_1A_4]), so schneidet eine durch die gegenseitige Kante ([A_2A_3]) hindurchgehende Ebene eine Bueschel von Linienelementen aus, und gilt in dieser Ebene die Nishiuchi'sche Pseudogeometrie, in welcher das Bueschel die Rolle einer uneigentlichen Pseudogeraden zweiter Art spielt.

In diesem und in andern Faellen, folgt unsre Behauptung aus dem folgenden Lemma : *Das Pseudodoppelverhaeltnis* (P_1P_2, $P_\lambda P_{\lambda'}$) *ist gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis der vier Ebenen* $\{A_iA_jP_1\}$, $\{A_iA_jP_2\}$, $\{A_iA_jP_\lambda\}$, $\{A_iA_jP_{\lambda'}\}$, wo die Gerade $[A_iA_j]$ keine der Pseudopunkte P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ enthaelt.

In der Tat sind die vier projizierenden Ebenen durch die Gleichungen

$$\varphi_1 \equiv \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ X_2' & X_3' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\varphi_2 \equiv \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \equiv \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ X_2'\lambda + X_2'' & X_3' + \lambda X_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\varphi_1 + \lambda'\varphi_2 \equiv \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ X_2' + \lambda' X_2'' & X_3' + \lambda' X_3'' \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.

Das Doppelverhaeltnis dieser Ebenen ist $\lambda : \lambda'$, welches mit dem Pseudodoppelverhaeltnis (P_1P_2, $P_\lambda P_{\lambda'}$) $= \lambda : \lambda'$ uebereinstimmt.

43. Satz : *Ein Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier eigentlichen Pseudogeraden dritter Art in einer eigentlichen Pseudoebene dritter Art, ist gleich dem entsprechenden gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn die Pseudogeraden als gewoehnliche Geraden angesehen sind.*

Beweis Die genannte Pseudoebene kann als eine Nishiuchi'sche Pseudoebene angesehen werden, so dass wir die Nishiuchi'schen Pseudokoordinaten (X_i) einfuehren koennen.

Es seien die vier Pseudogeraden durch

$$\psi_1 \equiv s_2 X_3 + s_3 X_2 = 0,$$
$$\psi_2 \equiv s_2' X_3 + s_3' X_2 = 0,$$
$$\psi_1 + \lambda\psi_2 = 0,$$
$$\psi_1 + \lambda'\psi_2 = 0$$

gegeben, welche durch den Pseudopunkt $(\infty : a_2 : -a_3)$ (ein Punkt auf $[A_2A_3]$) hindurchgehen. Dies werden :

$$\varphi_1 \equiv s_2 a_3 x_2 + s_3 a_2 x_3 = 0,$$
$$\varphi_2 \equiv s_2' a_3 x_2 + s_3' a_2 x_3 = 0,$$

$$\varphi_1+\lambda\,\varphi_2=0,$$
$$\varphi_1+\lambda'\varphi_2=0.$$

Das Pseudodoppelverhaeltnis der vier Pseudoebenen

$$\psi_1=0,$$
$$\psi_2=0,$$
$$\psi_1+\lambda\,\psi_2=0,$$
$$\psi_1+\lambda'\psi_2=0$$

ist $\lambda:\lambda'$. Das Doppelverhaeltnis der vier Ebenen

$$\varphi_1=0,$$
$$\varphi_2=0,$$
$$\varphi_1+\lambda\,\varphi_2=0,$$
$$\varphi_1+\lambda'\varphi_2=0$$

ist ebenfalls $\lambda:\lambda'$. Also folgt unsre Behauptung.

44. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier eigentlichen Pseudoebenen dritter Art ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn die Pseudoebenen als gewoehnliche Ebenen angesehen sind.*

Beweis. Es seien die vier Psendoebenen durch

$$\psi_1\equiv s_2X_3+s_3X_2=0,$$
$$\psi_2\equiv s_2'X_3+s_3'X_2=0,$$
$$\psi_1+\lambda\,\psi_2=0,$$
$$\psi_1+\lambda'\psi_2=0$$

gegeben, dann erhalten wir das Resultat auf ganz analoge Weise wie in 43.

45. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudopunkten auf einem Pseudokegelschnitt, welcher den Durchschnittskegelschnitt eines Kegels z.B.* $A_1(A_2A_3A_4PQ)$ *mit einer durch* $A_i(i=2, 3, 4)$ *hindurchgehenden Ebene ist, ist gleich dem entsprechenden gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn der Pseudokegelschnitt als ein gewoehnlicher Kegelschnitt angesehen ist.*

Beweis. Es seien P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ die vier Pseudopunkte auf dem genannten Pseudokegelschnitt, welcher z.B. durch A_4 hindurchgeht. Man fasse die vier Pseudoebenen $\{[A_1A_2], P_1\}$, $\{[A_1A_2], P_2\}$, $\{[A_1A_2], P_\lambda\}$, $\{[A_1A_2], P_{\lambda'}\}$, welche gleichzeitig auch gewoehnliche Ebenen sind ins Auge. Diese vier Pseudoebenen bestimmen ein Doppelverhaeltnis; und sie schneiden vier uneigentliche Pseudopunkte (Linienelemente) von der Kegelflaeche aus, welche auch ein gewoehnliches Doppelverhaeltnis von Linienelementen bestimmen. Betrachtet man nun die genannte Konfiguration vom Gesichtspunkte der gewoehnlichen Geometrie aus, so ist der Punktquadrupel P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ zum Quadrupel der genannten Linienelemente perspektiv. Die letzten bestimmen aber ein Doppelverhaeltnis im gewoehnlichen Sinne. Also ist das Pseudodoppelverhaeltnis $(P_1P_2, P_\lambda P_{\lambda'})$ gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis $(P_1P_2, P_\lambda P_{\lambda'})$.

46. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudopunkten auf einem Pseudokegelschnitt, welcher entweder* (i) *eine die Kante* $[A_kA_l]$ *betreffende und keine anderen Kanten schneidende gewoehnliche Gerade, oder* (ii) *ein durch* A_i, A_j *hindurchgehender und keine anderen Kanten schneidender Kegelschnitt, oder* (iii) *ein durch* A_{ij} *hindurchgehender und durch* A_l *nicht hindurchgehender Kegelschnitt ist, ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn der Pseudokegelschnitt als ein gewoehnliches Gebilde angesehen ist.*

Beweis. (i) Der Beweis ist wesentlich in 41 enthalten.

(ii) In der Pseudoebene des Pseudokegelschnittes gilt die Nishiuchi'sche ebene Pseudogeometrie, und die Gleichung des genannten Kegelschnittes ist etwa von der Gestalt

$$K_2 \equiv d_0x_1^2 + d_1x_2x_3 + d_2x_3x_1 + d_3x_1x_2 = 0.$$

Es seien die vier Punkte durch die folgenden Gleichungen gegeben.

$$\begin{aligned}
P_1 &: K_2=0, & \varphi_1 &\equiv b_1x_1+b_3x_3=0,\\
P_2 &: K_2=0, & \varphi_2 &\equiv c_1x_1+c_3x_3=0,\\
P_\lambda &: K_2=0, & \varphi_1 &+\lambda\,\varphi_2=0,\\
P_{\lambda'} &: K_2=0, & \varphi_1 &+\lambda'\varphi_2=0.
\end{aligned}$$

Dies werden

$$\begin{aligned}
P_1 &: K_2'=0, & \psi_1 &\equiv b_1a_1X_3+b_3a_3X_1=0,\\
P_2 &: K_2'=0, & \psi_2 &\equiv c_1a_1X_3+c_3a_3X_1=0,\\
P_\lambda &: K_2'=0, & \psi_1 &+\lambda\,\psi_2=0,\\
P_{\lambda'} &: K_2'=0, & \psi_1 &+\lambda'\psi_2=0,
\end{aligned}$$

wobei

$$K_2' \equiv d_0a_1^2X_2X_3 + d_1a_2a_3X_1^2 + d_2a_3a_1X_1X_2 + d_3a_1a_2X_1X_3$$

gesetzt ist. Hiermit haben wir

das Doppelverhaeltnis $(P_1P_2, P_\lambda P_{\lambda'}) = \lambda : \lambda'$

$=$ *das Pseudodoppelverhaeltnis* $(P_1P_2, P_\lambda P_{\lambda'})$.

47. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudopunk-*

ten auf dem Pseudokegelschnitt, welcher ein $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$, $[A_jA_k]$, $[A_jA_l]$ *schneidender Kegelschnitt ist, ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn der Pseudokegelschnitt als ein gewoehnlicher angesehen ist.*

Beweis. Sind die vier Punkte mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnet, so sind $\{A_iA_jP_1\}$, $\{A_iA_jP_2\}$, $\{A_iA_jP_3\}$, $\{A_iA_jP_4\}$ Pseudoebenen eines Pseudoebenenbueschels sowie Ebenen eines Ebenenbueschels. Also folgt unser Satz aus 44.

48. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudopunkten auf dem Pseudokegelschnitt, welcher eine durch* A_k, A_l *hindurchgehende und* $[A_iA_j]$, $[A_iA_k]$, $[A_jA_l]$ *betreffende kubische Raumkurve ist, ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn der Pseudokegelschnitt als eine gewoehnliche kubische Kurve angesehen ist.*

Beweis. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 die vier Pseudopunkte, dann sind $\{A_kA_lP_1\}$, $\{A_kA_lP_2\}$, $\{A_kA_lP_3\}$, $\{A_kA_lP_4\}$ Pseudoebenen eines Pseudoebenenbueschels sowie Ebenen eines Ebenenbueschels. Also folgt unser Satz aus 44.

49. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudopunkten auf der pseudokubischen Kurve, welche entweder* (i) *eine keine von den sechs Kanten* $[A_iA_j]$ *betreffende gewoehnliche Gerade, oder* (ii) *ein* $[A_iA_j]$, $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ *schneidender und durch* $A_n (n=1, 2, 3, 4)$ *nicht hindurchgehender Kegelschnitt, oder* (iii) *ein* $[A_iA_j]$ *schneidender und mit* $[A_kA_l]$ *koplanaerer und* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ *nicht betreffender Kegelschnitt, oder* (iv) *ein* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$, $[A_jA_k]$ *betreffender Kegelschnitt, oder* (v) *eine die sechs Kanten* $[A_iA_j]$ $(i, j=1, 2, 3, 4, i \neq j)$ *betreffende kubische Kurve ist, ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn die pseudokubische Kurve als eine gewoehnliche angesehen ist.*

Beweis. (i) Der Beweis ist wesentlich in 41 enthalten.

(ii), (iii), (iv). Der Beweis ist wesentlich in 48 enthalten.

(v). Wenn die genannte kubische Kurve durch parametrische Gleichungen gegeben ist, so muessen die Gleichungen die Gestalten annehmen:

$$x_1 = a_1(t-\alpha_2)(t-\alpha_3)(t-\alpha_4) \equiv a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1,$$
$$x_2 = a_2(t-\alpha_4)(t-\alpha_5)(t-\alpha_6) \equiv a_2t^3 + b_2t^2 + c_2t + d_2,$$
$$x_3 = a_3(t-\alpha_6)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) \equiv a_3t^3 + b_3t^2 + c_3t + d_3,$$
$$x_4 = a_4(t-\alpha_1)(t-\alpha_3)(t-\alpha_5) \equiv a_3t^3 + b_4t^2 + c_4t + d_4,$$

welche in

$$X_1 = \rho a_1^{-1}(t-\alpha_1)(t-\alpha_5)(t-\alpha_6) \equiv a_1't^3 + b_1't^2 + c_1't + d_1',$$

$$X_2=\rho a_2^{-1}(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\equiv a_2't^3+b_2't^2+c_2't+d_2',$$
$$X_3=\rho a_3^{-1}(t-a_3)(t-a_4)(t-a_5)\equiv a_3't^3+b_3't^2+c_3't+d_3',$$
$$X_4=\rho a_4^{-1}(t-a_2)(t-a_4)(t-a_6)\equiv a_4't^3+b_4't^2+c_4't+d_4'$$

uebergehen.

Es seinen irgend sechs Punkte auf der Kurve durch

$$(x')\equiv t_1,\ (x'')\equiv t_2,\ (x''')\equiv t_3,\ (x^{IV})\equiv t_4,\ (x^{V})\equiv t_5,\ (x^{VI})\equiv t_6,$$

gegeben. Dann erhalten wir —

$$\{123\}:\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}$$

$$\equiv\begin{vmatrix} a_1t^3+b_1t^2+c_1t+d_1 & a_2t^3+b_2t^2+c_2t+d_2 & a_3t^3+b_3t^2+c_3t+d_3 & a_4t^3+b_4t^2+c_4t+d_4 \\ a_1t_1^3+b_1t_1^2+c_1t_1+d_1 & a_2t_1^3+b_2t_1^2+c_2t_1+d_2 & a_3t_1^3+b_3t_1^2+c_3t_1+d_3 & a_4t_1^3+b_4t_1^2+c_4t_1+d_4 \\ a_1t_2^3+b_1t_2^2+c_1t_2+d_1 & a_2t_2^3+b_2t_2^2+c_2t_2+d_2 & a_3t_2^3+b_3t_2^2+c_3t_2+d_3 & a_4t_2^3+b_4t_2^2+c_4t_2+d_4 \\ a_1t_3^3+b_1t_3^2+c_1t_3+d_1 & a_2t_3^3+b_2t_3^2+c_2t_3+d_2 & a_3t_3^3+b_3t_3^2+c_3t_3+d_3 & a_4t_3^3+b_4t_3^2+c_4t_3+d_4 \end{vmatrix},$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Ebenso erhalten wir —

$$\{124\}:\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_2' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Es seien die Gleichungen von $\{125\}$ und $\{126\}$ durch

$$\{12s\}:\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}-\lambda_s\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix}=0,\ s=5,\ 6,$$

gegeben. Dann sind λ_s durch

$$\begin{vmatrix} t_s^3 & t_s^2 & t_s & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} - \lambda_s \begin{vmatrix} t_s^3 & t_s^2 & t_s & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

definiert, so dass wir haben:

$$(\{123\}\{124\}, \{125\}\{126\}) = \lambda_5/\lambda_6,$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} t_5^3 & t_5^2 & t_5 & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_6^3 & t_6^2 & t_6 & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_5^3 & t_5^2 & t_5 & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_6^3 & t_6^2 & t_6 & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Ebenso erhalten wir fuer die Pseudoebenen—

$$\{1'2'r'\}: \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_1' & X_2' & X_3' & X_4' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' & X_4'' \\ X_1^{(r)} & X_2^{(r)} & X_3^{(r)} & X_4^{(r)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3' \\ a_4' & b_4' & c_4' & d_4' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_{r'}^3 & t_{r'}^2 & t_{r'} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad r' = 3, 4,$$

$$\{1'2's'\}: \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_1' & X_2' & X_3' & X_4' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' & X_4'' \\ X_1''' & X_2''' & X_3''' & X_4''' \end{vmatrix} - \lambda_s' \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_1' & X_2' & X_3' & X_4' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' & X_4'' \\ X_1^{IV} & X_2^{IV} & X_3^{IV} & X_4^{IV} \end{vmatrix} = 0, \quad s = 5, 6,$$

so dass

$$\begin{vmatrix} t_s^2 & t_s^2 & t_s & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} - \lambda_s' \begin{vmatrix} t_s^3 & t_s^2 & t_s & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 5, 6.$$

Also erkennen wir, dass

$$(\{123\}\{124\}, \{125\}\{126\}) = \lambda_5/\lambda_6 = \lambda_5'/\lambda_6',$$
$$= (\{1'2'3'\}\{1'2'4'\}\{1'2'5'\}\{1'2'6'\})$$

ist.

50. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudoele-*

menten eines Pseudogebildes erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn das Pseudogebilde als ein gewoehnliches Gebilde erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung angesehen werden kann.

51. Zusatz: *Das pseudoharmonische Doppelverhaeltnis von Pseudoelementen eines Pseudogebildes erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung ist auch ein gewoehnliches harmonisches Doppelverhaeltnis, wenn das Pseudogebilde als ein gewoehnliches Gebilde erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung angesehen werden kann.*

52. Zusatz: *Die Pseudoinvolution von Pseudoelementen eines Pseudogebildes erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung ist auch eine gewoehnliche Involution, wenn das Pseudogebilde als ein gewoehnliches Gebilde erster Stufe erster oder zweiter oder dritter Ordnung angesehen werden kann.*

VIII.

Pseudoprojektive Erzeugnisse und Analogien.

(A) In der Pseudoebene:

53. Satz: *Zwei Pseudoprojektive (nicht pseudoperspektive) Pseudopunktreihen bestimmen eine Pseudopunktreihe zweiter Ordnung.*

Satz: *Zwei pseudoprojektive (nicht pseudoperspektive) Pseudogeradenbueschel bestimmen ein Pseudogeradenbueschel zweiter Ordnung.*

Satz: *Die Pseudopunktreihe zweiter Ordung und das Pseudogeradenbueschel zweiter Ordnung stimmen miteinander ueberein.*

Es giebt einige merkwuerdige specielle Faelle:

(1°) *Die folgenden zwei Erzeugungsweisen stimmen in den beiden Geometrien ueberein —*

Eine Ebene $s_1x_1+s_2x_2=0$ *schneide die sechs Kanten in den Punkten* A_{12}, A_3, A_4. *Es seien in dieser Ebene zwei projektiven Geradenbueschel* $A_3(g_i)$, $A(g_i')$ *gegeben, in welchen* $[A_3A_{12}]$, $[A_4A_{12}]$ *sich nicht entsprechen. Dann ist das projektive Erzeugnis ein durch* A_3, A_4 *hindurchgehender Kegelschnitt.*

Es seien in der Pseudoebene $\{A_3A_4A_{12}\}$ *zwei pseudoprojektive Pseudogeradenbueschel* $A_3(\mathfrak{g}_i)$, $A_4(\mathfrak{g}_i')$ *gegeben, in welchen* $[A_3A_{12}]$, $[A_4A_{12}]$ *sich nicht entsprechen, und die Kerne die Pseudopunkte* $[A_3A_{12}]$, $[A_4A_{12}]$ *sind. Dann ist das pseudoprojektive Erzeugnis ein durch je einen Pseudopunkt (im Punkte* A_3 *od.* A_4*) hindurchgehender Kegelschnitt.*

(2°) *Ein und derselbe Kegelschnitt kann auf zwei Weisen erzeugt werden:*

Es seien $[PA_2]$, $[PA_3]$ *zwei projektive (sowie pseudoprojektive) Punktreihen* (P_i) *und* (P_i') *derart, dass* $P(\sqrt{4a^2-1}/2, a, a) \sim A_3(0, 0, 1)$, $A_2(0, 1, 0) \sim P(\,,,\,)$. *Dann wird der Inbegriff der Geraden* (P_iP_i') *(Pseudokegelschnitt) einen dnrch* A_2, A_3 *hindurchgehenden Kegelschnitt (einen Pseudokegelschnitt) umhuellen.*

Es seien $[PA_2]$, $[PA_3]$ *zwei pseudoprojektive (sowie projektive) Pseudopunktreihen* (P_i) *und* (P_i') *derart, dass* $P(\sqrt{4a^2-1}/2, a, a) \sim [A_1A_2](0, 0, 1)$, $[A_2A_3](0, 1, 0) \sim P(\,,,\,)$. *Dann wird der Inbegriff der Pseudogeraden* $(A_1A_2A_3P_iP_i')$ *(Kegelschnitt) einen durch* A_2, A_3 *hindurchgehenden Pseudokegelschnitt (Kegelschnitt) umhuellen.*

(3°) *Die folgenden zwei Erzeugungsweisen stimmen in den beiden Geometrien ueberein—*

Eine pseudokubische Kurve (ein Kegelschnitt) ergiebt sich aus dem Pseudogeradensystem

$$c_1X_2X_3 + c_2X_3X_1 + c_3X_1X_2 = 0,$$
$$b_2X_2 + \lambda b_3X_3 = 0.$$

und dem Pseudokegelschnittensystem

$$c_1X_2X_3 + c_2X_3X_1 + c_3X_1X_2 = 0,$$
$$d_1X_1 + \lambda d_4X_4 = 0.$$

Ein Kegelschnitt (eine pseudokubische Kurve) ergiebt sich aus dem Geradensystem

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0,$$
$$b_2x_3 + \lambda b_3x_2 = 0.$$

und dem Geradensystem

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0,$$
$$d_1x_1 + \lambda d_4x_4 = 0.$$

54. Satz: *In der Nishiuchi'schen Pseudoebene ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafuer, dass das pseudoprojektive Erzeugnis der beiden pseudoprojektiven Pseudogeradenbueschel* $P(g_i)$ *und* $P'(g_i')$ *eine gewoehnliche Gerade sei, besteht darin, dass die beiden Kerne* P *und* P′ *ihre Koordinaten in der Beziehung*

$$P: (X_1 : X_2 : X_3), \qquad P': (X_1r_1 : X_2r_2 : X_3r_3)$$

haben, wo r_i *Konstante sind.*

55. Satz: *Das pseudoprojektive Erzeugnis von dem Pseudokegelschnittsbueschel*

$$K_2 + \lambda K_2' = 0$$

und dem dazu pseudoprojektiven Pseudogeradenbueschel

$$P + \lambda P' = 0$$

Satz: *Das pseudoprojektive Ergeugnis von der Pseudokegelschnittsschar*

$$B_2 + \lambda B_2' = 0$$

und der dazu pseudoprojektiven Pseudopunktreihe

$$G + \lambda G' = 0$$

ist eine Pseudokurve dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} K_2 & K_2' \\ P & P' \end{vmatrix} = 0,$$

wo K_2, K_2' je einen quadratischen Ausdruck und P, P' je einen linearen Ausdruck in (X) darstellen.

ist eine Pseudokurve dritter Klasse

$$\begin{vmatrix} B_2 & B_2' \\ G & G' \end{vmatrix} = 0,$$

wo B_2, B_2' je einen quadratischen Ausdruck und G, G' je einen linearen Ausdruck in (s) darstellen.

Einige specielle Faelle derselben sind interessant:

(1°) *Die folgende Erzeugung stimmt in den beiden Geometrien ueberein —*

Das Erzeugnis von

$$b_1X_2X_3 + b_2X_3X_1 + b_3X_1X_2 + \lambda(c_1X_2X_3 + c_2X_3X_1 + c_3X_1X_2) = 0$$

und

$$d_1X_1 + d_2X_2 + d_2X_3 + \lambda(e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3) = 0$$

ist eine Pseudokurve dritter Ordnung.

Das Erzeugnis von

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \lambda(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) = 0$$

und

$$d_1x_2x_3 + d_2x_3x_1 + d_3x_1x_2 + \lambda(e_1x_2x_3 + e_2x_3x_1 + e_3x_1x_2) = 0$$

ist eine Kurve dritter Ordnung.

(2°) *Die folgende Erzeugung ist interessant —*

Das Erzeugnis von

$$b_1X_2X_3 + b_2X_3X_1 + b_3X_1X_2 + \lambda(c_1X_2X_3 + c_2X_3X_1 + c_3X_1X_2) = 0$$

und

$$d_1X_1 + d_2X_2 + \lambda(e_1X_1 + e_2X_2) = 0$$

ist eine Pseudokurve dritter Ordnung.

Das Erzeugnis von

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \lambda(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) = 0$$

und

$$d_1x_2 + d_1x_1 + \lambda(e_1x_2 + e_2x_1) = 0$$

ist ein durch A_3 *hindurchgehender Kegelschnitt.*

(B) Im Pseudobuendel:

56. Satz: *Es seien zwei von einander verschiedene nicht pseudoperspektive Pseudoebenenbueschel gegeben: der Inbegriff der Pseudogeraden, welche die Durchschnittspseudolinien zweier zu einander entsprechender Pseudoebenen sind, ist das Pseudokegel zweiter Ordnung.*

Satz: *Es seien zwei von einander verschiedene nicht pseudoperspektive Pseudogeradenbueschel gegeben: der Inbegriff der Pseudoebenen, welche die Verbindungspseudoebenen zweier zu einander entsprechender Pseudogeraden sind, ist das Pseudoebenenbueschel zweiter Ordnung.*

N.B. Der Scheitel des Pseudokegels

$$b_1X_2X_3+b_2X_3X_1+b_3X_1X_2=0$$

oder

$$cX_1X_3+c_1X_2X_1+c_2X_2^2+c_3X_2X_3=0$$

ist der uneigentliche Pseudopunkt zweiter Art.

Einige specielle Faelle sind interessant —

(1°) *Die folgende Erzeugung stimmt in den beiden Geometrien ueberein:*

Das Erzeugnis von

$$b_2X_2+b_3X_3+\lambda(b_2'X_2+b_3'X_3)=0$$

und

$$c_2X_2+c_4X_4+\lambda(c_2'X_2+c_4'X_4)=0$$

ist ein Pseudokegel zweiter Ordnung.

Das Erzeugnis von

$$b_2x_3+b_3x_2+\lambda(b_2'x_3+b_3'x_2)=0$$

und

$$c_2x_4+c_4x_2+\lambda(c_2'x_4+c_4'x_2)=0$$

ist ein Kegel zweiter Ordnung.

(2°) *Die folgenden Tatsachen stimmen in den beiden Geometrien ueberein —*

Schneidet eine Pseudoebene

$$b_2X_2+b_3X_3=0$$

das Pseudokegel

$$k_0X_2^2+k_1X_2X_3+k_2X_3X_1+k_3X_1X_2=0,$$

so ist die Durchschnittskurve ein Pseudokegelschnitt.

Schneidet eine Ebene

$$b_2x_3+b_3x_2=0$$

das Kegel

$$k_0x_1x_3+k_1x_2x_1+k_2x_2^2+k_3x_2x_3=0,$$

so ist die Durchschnittskurve ein Kegelschnitt.

(C) Im Raume:

57. Satz: *Zwei nicht koplanaere pseudoprojektive Pseudopunktreihen bestimmen eine Pseudoregelflaeche zweiter Ordnung.*

Satz: *Zwei nicht schneidende pseudoprojektive Pseudoebenenbueschel bestimmen eine Pseudoregelflaeche zweiter Ordnung.*

Einige specielle Faelle sind interessant —

(1°) *Die folgenden Erzeugungen stimmen in den beiden Geometrien miteinander ueberein:*

Sind die Pseudoebenenbueschel [A_1A_2] *und* [A_3A_4] *pseudoprojektiv, dann ist das Erzeugnis eine Pseudoregelflaeche zweiter Ordnung.*

Sind die Ebenenbueschel [A_1A_2] *und* [A_3A_4] *projektiv, dann ist das Erzeugnis eine Regelflaeche zweiter Ordnung.*

(2°) *Die folgenden Erzeugungen stimmen in den beiden Geometrien miteinander ueberein, wenn wir den speciellen Fall des linkseitigen Satzes betrachten, in welchem die genannten Erzeugenden eigentliche Pseudogerade vierter Art sind:*

Sind $[P_{13}P_{24}]$, $[Q_{13}Q_{24}]$ *irgend zwei pseudoprojektive Pseudopunktreihen (auf zwei eigentlichen Pseudogeraden vierter Art), dann ist das Erzeugnis eine Pseudoregelflaeche zweiter Ordnung.*

58. Satz: *Sind irgend zwei Pseudobuendel* S *und* S' *pseudokollineaer so bilden die Pseudokreuzungslinien je zweier einander entsprechender Pseudoebenen eine Pseudolinienkongruenz erster Ordnung und dritter Klasse und bildet der Inbegriff der Pseudokreuzungspunkte je zweier einander entsprechender und kreuzender Pseudostrahlen eine Pseudoraumkurve dritter Ordnung.*

59. Satz: *Sind irgend zwei Pseudobuendel* S *und* S' *pseudokorrelativ, so bilden die Pseudokreuzungspunkte jeder einander entsprechenden Pseudostrahlen und Pseudoebenen eine Flaeche zweiter Ordnung.*

Sind $[P_{13}P_{24}]$, $[Q_{13}Q_{24}]$ *irgend zwei die Kanten* $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$ *schneidende projektive Punktreihen, so ist das Erzeugnis eine Regelflaeche zweiter Ordnung.*

Satz: *Sind irgend zwei Pseudofelde s und s' pseudokollineaer, so bilden die Pseudoverbindungslinien je zweier einander entsprechender Pseudopunkte eine Pseudolinienkongruenz dritter Ordnung und erster Klasse und bildet der Inbegriff der Pseudoverbindungsebenen je zweier einander entsprechender und pseudokoplanaerer Pseudostrahlen ein Pseudoebenenbueschel dritter Ordnung.*

Satz: *Sind irgend zwei Pseudofelder s und s' pseudokorrelative, so bilden die Pseudoverbindungsebenen jeder einander entsprechenden Pseudostrahlien und Pseudopunkte ein Pseudoebenenbueschel zweiter Ordnung (od. eine Pseudoflaeche zweiter Klasse).*

60. Eine und dieselbe Flaeche zweiter Ordnung, welche durch A_1, A_2, A_3, A_4 hindurchgeht, kann auf zwei Weisen erzeugt werden; also z.B.

Ein durch A_1 hindurchgehender Strahl sei durch

$$\frac{x_2}{\lambda}=\frac{x_3}{\mu}=\frac{x_4}{\nu}$$

Ein durch A_1 hindurchgehender Pseudostrahl sei durch

$$\frac{X_2}{l}=\frac{X_3}{m}=\frac{X_4}{n}$$

gegeben; und eine durch A_4 hindurchgehende Ebene sei druch

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

gegeben. Sie seien durch

$$su_1=a_{11}\lambda+a_{12}\mu+a_{13}\nu,$$
$$su_2=\quad a_{22}\mu+a_{23}\nu,$$
$$su_3=\quad a_{33}\nu$$

korrelativ aufeinander bezogen. Dann ist das Erzeugnis:

$$a_{11}x_1x_2+a_{12}x_1x_3+a_{13}x_1x_4$$
$$+a_{22}x_2x_3+a_{23}x_2x_4+a_{33}x_3x_4=0.$$

gegeben; und eine durch A_4 hindurchgehende Pseudoebene sei durch

$$v_1X_1+v_2X_2+v_3X_3=0$$

gegeben. Sie seien durch

$$rv_1=a_{33}l+a_{23}m+a_{22}n,$$
$$rv_2=\quad a_{13}m+a_{12}n,$$
$$rv_3=\quad a_{11}n$$

pseudokorrelative aufeinander bezogen. Dann ist das Erzeugnis:

$$a_{11}X_3X_4+a_{12}X_2X_4+a_{13}X_2X_3$$
$$+a_{22}X_1X_4+a_{23}X_1X_3+a_{33}X_1X_2=0.$$

Die Erzeugnisse stellen eine und dieselbe Flaeche zweiter Ordnung dar.

IX.

Pseudopol und Pseudopolare.

61. Definition. Jeder Pseudostrahl g_i eines Pseudostrahlenbueschels $P(g_i)$ schneidet eine Quadriflaeche in zwei Pseudopunkten Q, Q′. Auf g_i nehmen wir einen Pseudopunkt P′ derart, dass (QQ′, PP′) eine pseudoharmonische Gruppe ist. Dann ist der Ort π von P′ eine Pseudoebene und heisst die *Pseudopolare von* P *in Bezug auf die Pseudoquadriflaeche* uud P heisst der *Pseudopol von* π *in Bezug auf dieselbe Pseudoquadriflaeche.*

62. Ist insbesondere die Pseudoquadriflaeche eine durch A_1, A_2, A_3, A_4 hindurchgehende gewoehnliche Quadriflaeche, so erhalten wir den folgenden

Satz: *Jede durch* A_1, A_2, A_3, A_4, P *geschriebene kubische Raumkurve schneidet eine* A_1, A_2, A_3, A_4 *enthaltende Quadriflaeche in zwei noch andern Punkten* Q, Q′. *Es sei* P′ *ein Punkt auf der kubischen Raumkurve derart, dass* Q, Q′, P, P′ *eine harmonische Gruppe bilden. Dann ist der Ort von* P′ *eine* $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_1A_4]$, $[A_2A_3]$, $[A_2A_4]$, $[A_3A_4]$ *enthaltende kubische Flaeche mit vier Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3, A_4.

63. Ist dagegen die Pseudoquadriflaeche eine A_i in sich enthaltende gewoehnliche Ebene, etwa

$$a_1X_2X_3+a_2X_3X_1+a_3X_1X_2=0,$$

dann ist die Pseudopolare vom Punkte $P(Y)$

$$(2) \qquad (a_2 Y_3 + a_3 Y_2)X_1 + (a_3 Y_1 + a_1 Y_3)X_2 + (a_1 Y_2 + a_2 Y_1)X_3 = 0,$$

welche ein gewoehnlicher Kegel mit dem Scheitel A_4 ist. Also erhalten wir den

Satz: *Jede durch* A_1, A_2, A_3, A_4, P *geschriebene kubische Raumkurve schneidet eine durch* A_i *hindurchgehende Ebene in zwei Punkten* Q, Q'. *Es sei* P' *ein Punkt auf der kubischen Baumkurve derart, dass die vier Punkte* Q, Q', P, P' *eine harmonische Gruppe bilden. Dann ist der Ort von* P' *ein Kegel mit dem Scheitel* A_i.

96. Man betrachte einen Pseudokegel

$$(1) \qquad a_1X_2X_3 + a_2X_3X_1 + a_3X_1X_2 = 0.$$

Dann ist die Pseudoplare von $P(Y)$,

$$(2) \qquad (a_2 Y_3 + a_3 Y_2)X_1 + (a_3 Y_1 + a_1 Y_3)X_2 + (a_1 Y_2 + a_2 Y_1)X_3 = 0,$$

welche ein gewoehnlicher Kegel vom Scheitel A_4 ist. Dies wird

$$(3) \qquad \left(\frac{a_2}{y_3} + \frac{a_3}{y_2}\right)x_2x_3 + \left(\frac{a_3}{y_1} + \frac{a_1}{y_3}\right)x_3x_1 + \left(\frac{a_1}{y_2} + \frac{a_2}{y_1}\right)x_1x_2 = 0,$$

wenn man $y_i = 1/Y_i$ setzt.

Die gewoehnliche Polare von P in Bezug auf (3) ist

$$(4) \qquad \Sigma a_i x_i + (\Sigma a_i y_i)(\Sigma x_i/y_i) = 0.$$

Damit (1) und (4) uebereinstimmen, ist es notwendig und hinreichend, dass

$$y_1 : y_2 : y_3 = 1/a_1 : 1/a_2 : 1/a_3$$

ist. Also muss P die Pseudokoordinaten $(a_1 : a_2 : a_3 : Y_4)$ haben, wo Y_4 beliebig ist.

Man betrachte einen Kegel

$$(1) \qquad \beta_1x_2x_3 + \beta_2x_3x_1 + \beta_3x_1x_2 = 0.$$

Dann ist die Polare von $P(y)$

$$(2) \qquad (\beta_2 y_3 + \beta_3 y_2)x_1 + (\beta_3 y_1 + \beta_1 y_3)x_2 + (\beta_1 y_2 + \beta_2 y_1)x_3 = 0,$$

welche ein Pseudokegel vom Scheitel $(A_1A_2A_3)$ ist. Dies wird

$$(3) \qquad \left(\frac{\beta_2}{Y_3} + \frac{\beta_3}{Y_2}\right)x_2x_3 + \left(\frac{\beta_3}{Y_1} + \frac{\beta_1}{Y_3}\right)X_3X_1 + \left(\frac{\beta_1}{Y_2} + \frac{\beta_2}{Y_1}\right)X_1X_2 = 0,$$

wenn man $Y_i = 1/y_i$ setzt.

Die Pseudopolare von P in Bezug auf (3) ist

$$(4) \qquad \Sigma\beta_i X_i + (\Sigma\beta_i Y_i)(\Sigma X_i/Y_i) = 0.$$

Damit (1) und (4) uebereinstimmen, ist es notwendig und hinreichend, dass

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 = 1/\beta_1 : 1/\beta_2 : 1/\beta_3$$

ist. Also muss P die Koordinaten $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : y_4)$ haben, wo y_4 beliebig ist.

Betrachtet man das Kegelbueschel

$$\beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \lambda(\beta_1'X_1 + \beta'_2X_2 + \beta_3'X_3) = 0,$$

Betrachet man das Pseudokegelbueschel

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \\ +\lambda(a_1'x_1+a_2'x_2+a_3'x_3)=0,$$

wo die Pseudoachse $[(A_1A_2A_3), Q]$ die Koordinaten (q) besitzt, so ist

$$q_1 : q_1 : q_3 \\ =\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_3' & a_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}.$$

Ist $P(y)$ ein Punkt derart, dass

$$y_1 : y_2 : y_3 \\ =\frac{1}{a_1+\lambda a_1'} : \frac{1}{a_2+\lambda a_2'} : \frac{1}{a_3+\lambda a_3'},$$

so erhalten wir, indem wir λ eliminieren,

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{vmatrix} y_2y_3 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_3' & a_1' \end{vmatrix} y_3y_1 \\ + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix} y_1y_2 = 0,$$

d.h.

$$q_1y_2y_3+q_2y_3y_1+q_3y_1y_2=0,$$

welche den Ort von P darstellt.

wo die Achse $[A_4Q]$ die Pseudokoordinaten (q) besitzt, so ist

$$\mathrm{q}_1 : \mathrm{q}_2 : \mathrm{q}_3 \\ =\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_2' & \beta_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_1 \\ \beta_3' & \beta_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{vmatrix}.$$

Ist $P(Y)$ ein Pseudopunkt derart, dass

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 \\ =\frac{1}{\beta_1+\lambda\beta_1'} : \frac{1}{\beta_2+\lambda\beta_2'} : \frac{1}{\beta_3+\lambda\beta_3'},$$

so erhalten wir, indem wir λ eliminieren,

$$\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_2' & \beta_3' \end{vmatrix} Y_2Y_3 + \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_1 \\ \beta_3' & \beta_1' \end{vmatrix} Y_3Y_1 \\ + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{vmatrix} Y_1Y_2 = 0,$$

d.h.

$$\mathrm{q}_1Y_2Y_3+\mathrm{q}_2Y_3Y_1+\mathrm{q}_3Y_1Y_2=0,$$

welche den Ort von P darstellt.

65. In der Nishiuchi'schen Pseudoebene, haben wir wie er gezeigt hat, den

Satz: *Schneidet eine Gerade* [QQ′] *jeden Kegelschnitt eines Kegelschnittbueschels* $(A_1A_2A_3P)$ *in zwei Punkten etwa* Q, Q′, *und ist* (QQ′, PP′) *eine auf dem Kegelschnitt genommene harmonische Gruppe, so ist der Ort von* P′ *ein Kegelschnitt, welcher durch* A_1, A_2, A_3 *hindurchgeht.*

66. Satz: *In der Ebene schneide jeder Kegelschnitt eines Kegelschnittbueschels* $(A_1A_2A_3P)$ *einen festen durch* A_1, A_2, *und nicht durch* A_3 *hindurchgehenden Kegelschnitt in zwei Punkten etwa* Q, Q′. *Ist* (QQ′, PP′) *eine auf dem ersten Kegelschnitt genommene harmonische Gruppe, so ist der Ort von* P′ *ein durch* A_1, A_2, A_3 *geschriebener Kegelschnitt.*

67. Betrachtet man eine durch A_1, A_2, A_3, A_4 geschriebene Quadriflaeche und ein Ebenenbueschel etwa $[A_3A_4]$, so erhalten wir den folgenden

Satz: *Sind auf einer Quadriflaeche vier Punkte* A_1, A_2, A_3, A_4 *gegeben, so schneidet jede durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende kubische*

Raumkurve jene Quadriflaeche in zwei Punkten Q, Q′ *und eine Ebene des Ebenenbueschels* [A_3A_4] *in einem Punkte* P. *Ist* P′ *ein Punkt auf der kubischen Kurve derart, dass die vier Punkte* Q, Q′, P, P′ *eine harmonische Gruppe bilden, so ist der Ort von* P′ *eine durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende kubische Raumkurve*

68. Betrachtet man einen [A_1A_2], [A_1A_3] aber nicht [A_1A_4] enthaltenden Kegel, so erhaelt man den

Satz: *Sind* [A_1A_2] *und* [A_1A_3] *irgend zwei Erzeugende eines Kegels und* [A_1A_4] *eine beliebige nicht in dem Kegel enthaltene Gerade, dann schneidet jede durch* A_1, A_2, A_3, A_4, P *hindurchgehende kubische Raumkurve den Kegel in zwei Punkten etwa* Q, Q′. *Ist* P′ *ein Punkt darauf derart, dass die vier Punkte* Q, Q′, P, P′ *eine harmonisehe Gruppe bilden, so ist der Ort von* P′ *ein* [A_1A_2], [A_1A_3], [A_1A_4] *enthaltender Kegel.*

KAP. IV.

Aufbau einer raeumlichen pseudoprojektiven Geometrie mittels der allgemeinen quadratischen birationalen Transformation.

X.

Pseudopunkte, Pseudoebenen und Pseudogerade.

69. Wir haben in Kap. III eine Erweiterung der Nishiuchi'schen pseudoebenen Geometrie zum Raume mittels der kubischen Transformation gemacht. Wir koennen jetzt eine andere Erweiterung derselben ebenen Geometrie zum Raume machen, indem wir die biquadratische Transformation ins Auge fassen.

70. Zwei Raeume R und R′ seien reciprok aufeinander bezogen; es sei zwischen einem Buendel S im R und einem Buendel S′ im R′ eine Kollinearitaet hergestellt. Irgend ein Punkt von R bestimmt, mit S verbunden, eine Gerade g, welcher in S′ eine Gerade g' entspricht. Dem Punkte P ist reciprok eine Ebene π' zugeordnet. Den Schnittpunkt P′ von g' und π' weisen wir dem Punkte P zu. Wir setzen im folgenden voraus, die beiden Buendel S und S′ seien kongruent und konzentrisch so, dass jede Gerade sich mit seinem entsprechenden deckt, waehrend die Korrelation der Raeume eine allgemeine bleiben soll.

71. Die analytische Darstellung dieser Transformation, wenn wir ein zu R und R′ gemeinsames Tetraëder $A_1A_2A_3A_4$, wo $A_4 \equiv S \equiv S'$ sind, waehlen, sind durch

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1x_4 : x_2x_4 : x_3x_4 : \frac{\varphi(x_1x_2x_3)}{k}$$

und

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = X_1X_4 : X_2X_4 : X_3X_4 : \frac{\varphi(X_1X_2X_3)}{k}$$

gegeben, wobei φ je ein allgemeiner Ausdruck zweiten Grades in x resp. X ist.

72. Fundamentalsystem. *Der Punkt* A_4, *die Ebene* $\{A_1A_2A_3\}$, *der Kegelschnitt* $k^2 : \varphi(x_1x_2x_3) = 0$ *und der* k^2 *aus* A_4 *projizierende Kegel zweiter Ordnung* (A_4, k^2) *bilden das Fundamentalsystem. Der Punkt* A_4 *sind die aemtlichen Punkte von* $\{A_1A_2A_3\}$ *zugeordnet. Schneidet eine Erzeugende* l *von dem Kegel den Kegelschnitt* k^2 *in* L, *so entsprechen dem Punkte* L *alle Punkte von* l[1].

73. Wir koennten im folgenden annehmen, dass der Kegel $\varphi(x_1x_2x_3) = 0$ ganz allgemein sei; nun wollen wir aber der Einfachheit wegen annehmen, dass der Kegel $\varphi(x_1x_2x_3) = 0$ die drei Kanten $[A_1A_4]$, $[A_2A_4]$, $[A_3A_4]$ enthaelt, so dass $\varphi(x_1x_2x_3)$ etwa von der Form

$$c_1x_2x_3 + c_2x_3x_1 + c_3x_1x_2 = 0$$

ist, wo c_i Konstante sind.

74. Es giebt vier Arten von eigentlichen Pseudoebenen—

(i) Eine *eigentliche Pseudoebene erster Art* heisst jede nicht geradlinige Flaeche zweiter Ordnung, welche den Punkt A_4 und den festen Kegelschnitt

$$\varphi(x_1x_2x_3) = 0, \qquad x_4 = 0$$

in sich enthaelt und die Ebene

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 0$$

im Punkte A_4 beruehrt, wenn sie durch eine Gleichung von der Form

$$s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0,\ s_4 \neq 0,$$
$$c_1^2s_1^2 + c_2^2s_2^2 + c_3^2s_3^2 - 2c_1c_2s_1s_2 - 2c_2c_3s_2s_3 - 2c_3c_1s_3s_1 < 0)$$

gegeben ist, wo die Ebene

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 0$$

den Kegel

$$\varphi(x_1x_2x_3) = 0$$

nicht in reellen Geraden schneidet.

---

1 Transformationen II.

(ii) Eine *eigentliche Pseudoebene zweiter Art* heisst jeder Kegel zweiter Ordnung, welcher den Punkt A_4 und den festen Kegelschnitt

$$\varphi(x_1 x_2 x_3)=0, \qquad x_4=0$$

in sich enthaelt und dessen Spitze auf der Beruehrungserzeugenden entweder

$$s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0,$$
$$\varphi(x_1x_2x_3)=0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0,\ s_4=0,$$
$$c_1^2s_1^2+c_2^2s_2^2+c_3^2s_3^2-2c_1c_2s_1s_2-2c_2c_3s_2s_3-2c_3c_1s_3s_1=0)$$

oder

$$c_jx_i+c_ix_j=0,\ \varphi(x_1x_2x_3)=0,\ (i,\ j:\ \textit{zwei von}\ 1,\ 2,\ 3)$$

liegt, je nachdem das durch eine Gleichung entweder von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0,\ s_4 \neq 0,$$
$$c_1^2s_1^2+c_2^2s_2^2+c_3^2s_3^2-2c_1c_2s_1s_2-2c_2c_3s_2s_3-2c_3c_1s_3s_1=0)$$

oder von der Form

$$c_jX_i+c_iX_j+s_4X_4=0,\ (s_4 \neq 0)$$

gegeben ist.

(iii) Eine *eigentliche Pseudoebene dritter Art* heisst jede Regelflaeche zweiter Ordnung, welche den Punkt A_4 und den Kegelschnitt

$$\varphi(x_1x_2x_3)=0, \quad x_4=0$$

in sich enthaelt, und ist durch eine Gleichung entweder von der Form

$$s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0,\ s_4 \neq 0,$$
$$c_1^2s_1^2+c_2^2s_2^2+c_3^2s_3^2-2c_1c_2s_1s_2-2c_2c_3s_2s_3-2c_3c_1s_3s_1>0),$$

wobei die Regelflaeche die Ebene

$$s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0$$

im Punkte A_4 beruehrt, oder von der Form

$$s_iX_i+s_jX_j+s_4X_4=0,\quad (i,\ j:\ \textit{zwei von}\ 1,\ 2,\ 3),$$
$$(s_i \neq 0,\ s_j \neq 0,\ s_4 \neq 0)$$

wobei die Regelflaeche die Ebene

$$s_ix_i+s_jx_j=0$$

im Punkte A_4 beruehrt, oder von der Form

$$s_lX_l+s_4X_4=0,\quad (l:\ \textit{eine von}\ 1,\ 2,\ 3),$$

wobei die Regelflaeche die Ebene

$$x_l = o$$

im Punkte A_4 beruehrt, gegeben.

(iv) Eine *eigentliche Pseudoebene vierter Art* heisst jede den Punkt A_4 in sich enthaltende Ebene und ist durch eine Gleichung entweder von der Form

$$s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 = 0,$$
$$(s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ s_3 \neq 0)$$

oder von der Form

$$s_iX_i + s_jX_j = 0,$$
$$(s_i \neq 0,\ s_j \neq 0 : i, j : \textit{zwei von } 1,\ 2,\ 3)$$

oder von der Form

$$s_lX_l = 0,\ (l : \textit{eine von } 1,\ 2,\ 3)$$

gegeben.

Die Gesamtheit der Punkte in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ soll als ein zu dieser Pseudoebene gehoeriger Pseudopunkt angeshen werden.

Diese Pseudoebene ist nichts anderes als die erweiterte Nishiuchi'sche Pseudoebene. In der Tat ist z.B. $X_1 = o$, dann erhalten wir

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 0 : x_2x_4 : x_3x_4 : c_1x_2x_3,$$
$$= 0 : \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_2} : \frac{c_1}{x_4},$$

was *in der Form*

$$X_2 : X_3\, X_4 = \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} : \frac{c_1}{x_1}$$

geschrieben werden kann.

75. Es giebt nur eine *uneigentliche Pseudoebene,* und sie besteht aus dem festen Kegel

$$\varphi(x_1x_2x_3) = 0$$

und dem Inbegriff der Linienelemente im Punkte A_4 und ist durch $X_4 = 0$ gegeben.

76. Es giebt eine Art von *eigentlichen Pseudopunkten,* und sie sind je durch eine Gleichung entweder von der Form

$$b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 = 0,$$

$$(X_1 = b_1 \neq 0,\ X_2 = b_2 \neq 0,\ X_3 = b_3 \neq 0,\ X_4 = b_4 \neq 0,\ \varphi(b_1b_2b_3) \neq 0)$$

oder von der Form

$$b_is_i + b_js_j + b_4s_4 = 0$$
$$(X_i = b_i \neq 0,\ X_j = b_j \neq 0,\ X_k = b_k = 0,\ X_4 = b_4 \neq 0,$$

i, k, j : eine Permutation von 1, 2, 3)

gegeben. Sie sind die in dem Fundamentalsysteme nicht gelegenen gewoehnlichen Punkte.

77. Es giebt vier Arten von uneigentlichen Pseudopunkten —

(i) Ein *uneigentlicher Pseudopunkt zweiter Art* heisst jedes Linienelement im Punkte A_4 und ist durch eine Gleichung entweder von der Form

$$b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0,$$

$$(X_1 = b_1 \neq 0,\ X_2 = b_2 \neq 0,\ X_3 = b_3 \neq 0,\ X_4 = b_4 = 0)$$

oder von der Form

$$b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0,$$

$$(X_1 = b_1 = 0,\ X_2 = b_2 \neq 0,\ X_3 = b_3 \neq 0,\ X_4 = b_4 = 0)$$

gegeben.

(ii) Ein *uneigentlicher Pseudopunkt zweiter Art* heisst jedes Tangentialebenenelement in einem Punkte des Kegelschnittes

$$\varphi(x_1 x_2 x_2) = 0,$$

$$x_4 = 0$$

und ist durch eine Gleichung entweder von der Form

$$b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 + b_4 s_4 = 0,$$

$$(X_1 = b_1 \neq 0,\ X_2 = b_2 \neq 0,\ X_3 = b_3 \neq 0,\ X_4 = b_4 \neq 0,\ \varphi(b_1 b_2 b_3) = 0)$$

oder von der Form

$$b_3 s_3 + b_4 s_4 = 0,$$

$$(X_1 = b_1 = 0,\ X_2 = b_2 = 0,\ X_3 = b_3 \neq 0,\ X_4 = b_4 \neq 0)$$

gegeben.

In der Tat, der Pseudopunkt

$$(X_1 : X_2 : X_3 : X_4) = \left(b_1 : b_2 : \frac{-c_3 b_1 b_2}{c_1 b_2 + b_2 b_1} : b_4\right)$$

$$= (b_1(c_1 b_2 + c_2 b_1)\ :\ b_2(c_1 b_2 + c_2 b_1)\ :\ -c_3 b_1 b_2\ :\ b_4(c_1 b_2 + c_2 b_1))$$

ist ein auf einer der Erzeugenden des Kegels

$$\varphi(X_1 X_2 X_3) = 0$$

gelegener Punkt P′ im Rame R′. Es sei Q′ $(Y_1(c_1 Y_2 + c_2 Y_1)\ :\ Y_2(c_1 Y_2 + c_2 Y_1)\ :\ -c_3 Y_1 Y_2\ :\ 0)$ ein auf dem Kegelschnitt

$$\varphi(X_1 X_2 X_3) = 0, \quad X_4 = 0$$

gelegener Punkt. Dann ist die Verbindungslinie [P′Q′] als die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$\{P'Q'A_4\} : c_1c_3b_2Y_2X_1 + c_2c_3b_1Y_1X_2 + (c_1b_2 + c_2b_1)(c_1Y_2 + c_2Y_1)x_3 = 0,$$

$$\{P'Q'A_1\} : c_3Y_1b_4(c_1b_2 + c_2b_1)X_2 + b_4(c_1Y_2 + c_2Y_1)(c_1b_2 + c_2b_1)X_3 + c_1c_3b_2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}X_4 = 0$$

gegeben. Eliminiert man $Y_1 : Y_2$, so erhaelt man als den Ort von [P'Q'] die Gleichung

$$(1°) \quad b_4(c_1b_2 + c_2b_1)\varphi(X_1X_2X_3) - c_1c_3b_2^2X_1X_4 - c_2c_3b_1^2X_2X_4 - (c_1b_2 + c_2b_1)^2X_3X_4 = 0,$$

welche im Raume R die Form

$$(2°) \qquad b_4(c_1b_2 + c_2b_1)x_4 - c_1c_3b_2^2x_1 - c_2c_3b_1^2x_2 - (c_1b_2 + c_2b_1)^2x_3 = 0$$

annimmt.

Setzt man $x_4 = 0$ und $\varphi(x_1x_2x_3) = 0$ in (2°), so erhaelt man

$$c_1c_2(b_2x_1 - b_1x_2)^2 = 0,$$

welches zeight, dass die Ebene (2°) den Kegelschnitt

$$\varphi(x_1x_2x_3) = 0, \quad x_4 = 0$$

im Punkte $(b_1 : b_2 : b_3 : 0)$ beruehrt. Also stellt die Gleichung

$$b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 = 0,$$
$$(\varphi(b_1b_2b_3) = 0)$$

das Tangentialebenenelement von (2°) im Punkte $(b_1 : b_2 : b_3 : 0)$ dar. Aehnliches gilt auch fuer den Punkt

$$b_3s_3 + b_4s_4 = 0.$$

(iii) Ein *uneigentlicher Pseudopunkt dritter Art* heisst jeder Punkt auf einer Erzeugenden (die ganze Erzeugende) des Kegels $\varphi(x_1x_2x_3) = 0$ und ist durch eine Gleichung entweder von der Form

$$b_3s_3 = 0,$$
$$(X_1 = b_1 = 0, \ X_2 = b_2 = 0, \ X_3 = b_3 \neq 0, \ X_4 = b_4 = 0)$$

oder von der Form

$$b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 = 0,$$
$$(X_1 = b_1 \neq 0, \ X_2 = b_2 \neq 0, \ X_3 = b_3 \neq 0, \ X_4 = b_4 = 0, \ \varphi(b_1b_2b_3) = 0)$$

gegeben. Jede zwei solchen Punkte auf derselben Erzeugenden muessen als ein und derselbe angesehen werden.

(iv) Ein *uneigentlicher Pseudopunkt vierter Art* heisst jeder Punkt in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ (die ganze Ebene) und ist durch die Gleichung

$$b_4s_4 = 0,$$
$$(X_1 = b_1 = 0, \ X_2 = b_2 = 0, \ X_3 = b_3 = 0, \ X_4 = b_4 \neq 0)$$

gegeben. Jede zwei solchen Punkte muessen als ein und derselbe angesehen werden.

78. Es giebt drei Arten von eigentlichen Pseudogeraden —

(i) Eine *eigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jeder gewoehnliche Kegelschnitt, welcher den Punkt A_4 und irgend zwei Punkte (reell oder imaginaer) des Kegelschnittes k^2 in sich enthaelt.

Diese Pseudogerade ist nichts anderes als eine Art der Nishiuchi'schen eigentlichen Pseudogeraden in der Ebene des Kegelschnittes.

(ii) Eine *eigentliche Pseudogerade zweiter Art* heisst jede durch A_4 hindurchgehende gewoehnliche Gerade und ist nichts anderes als eine Art der Nishiuchi'schen eigentlichen Pseudogeraden.

(iii) Eine *eigentliche Pseudogerade dritter Art* heisst jede den Kegelschnitt k^2 schneidende gewoehnliche Gerade und ist nichts anderes als eine Art der Nishiuchi'schen Pseudogeraden.

79. Es giebt zwei Arten von uneigentlichen Pseudogeraden —

(i) Eine *uneigentliche Pseudogerade erster Art* besteht aus dem Inbegriff der Linienelemente im Punkte A_4, welche in irgend einer A_4 in sich enthaltenden Ebene liegen, und dem Geradenpaar (reellen oder imaginaeren), welche die Durchschnittslinien des Fundamentalkegels (A_4, k^2) mit der genannten Ebene sind.

(ii) Eine *uneigentliche Pseudogerade zweiter Art* besteht aus dem Inbegriff der uneigentlichen Pseudopunkte zweiter Art in irgend einem gewoehnlichen Punkte Q des Kegelschnittes k^2, der Geraden $[A_4Q]$ und der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$.

80. Dass unsre raeumliche Pseudogeometrie eine projektive Geometrie ist, folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatz (Kap. I, 1).

XI.

Die entsprechenden Gebilde.[1]

81. Man betrachte jetzt eine Flaeche m-ter Ordnung F_m im Raume R gegeben, die ν-mal durch den Kegelschnitt k^2 hindurchgeht und im Punkte A_4 einen μ-fachen Knotenpunkt besitzt. Um ihr Bild F_m' in R' zu untersuchen, fassen wir irgend eine Gerade g' in R' ins Auge. Der Ebene $\{A_4, g'\}$ entspricht dann eine gewisse Ebene durch A_4, und in dieser liegt der Kegelschnitt, in welchen g' uebergeht; dieser Kegelschnitt enthaelt A_4 und begegnet k^2 in den Punkten P und Q, welche

1 Transformationen II.

den Schnittgeraden der Ebene $\{A_4, g'\}$ mit dem Kegel (A_4, k^2) entsprechen. In der Ebene dieses Kegelschnittes liegt von der Flaeche F_m eine Kurve m-ter Ordnung K^m, welche durch A_4 μ-mal, durch die Punkte P, Q je ν-mal hindurchgeht. Die Anzahl der Schnittpunkte, welche der Kegelschnitt mit der K^m gemein hat, ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von g' mit $F_{m'}$. Die Anzahl dieser Punkte ist aber $2m-\mu-2\nu$ und diese ist die Ordnung m' von $F_{m'}$ so dass $m'=2m-\mu-2\nu$. Es enthaelt $F_{m'}$ den Kegelschnitt k^2 als ν'-fache Kurve, und es habe $F_{m'}$ in A_4 einen μ'-fachen Knotenpunkt. Der Strahl $\mathfrak{SL}$ schneidet nun F_m in $m-\mu-\nu$ Punkten, welche nicht dem Fundamentalsysteme angehoeren, und denen stets ein bestimmter Punkt P′ von k'^2 entspricht: es ist also $\nu'=m-\mu-\nu$. Weiter trifft die Gerade [P′ Q′] die K^m in $m-2\nu$ Punkten, die aeusserhalb P und Q liegen, also hat die der Kurve K^m in R′ entsprechende Kurve in A_4 einen $(m-2\nu)$-fachen Punkt, d.h. $\mu'=m-2\nu$.

82. Es sei nun eine beliebige Raumkurve von der p-ten Ordnung R^p in R gegeben, welche $\varkappa$-mal durch A_4 geht und mit k^2 λ Schnittpunkte gemein hat, und es sei die ihr entsprechende Raumkurve $R^{p'}$ in R′ von der Ordnung p', die $\varkappa'$-mal durch A_4 geht und k'^2 λ'-mal trifft. Da einer Ebene in R′ eine A_4 und k^2 in sich enthaltende Quadriflaeche in R entspricht, so besitzt diese Ebene offenbar $2p-\varkappa-\lambda$ Punkte mit R′ gemein, d.h. man erhaelt $p'=2p-\varkappa-\lambda$. Ferner trifft R^p den Kegel (A_4, k^2) in $2p-2\varkappa-\lambda$ Punkten, welche nicht zum Fundamentalsysteme gehoeren, also ist

$$\varkappa'=2p-2\varkappa-\lambda.$$

Da R^p die Ebene von k^2 in $p-\lambda$ nicht in k^2 enthaltenen Punkten trifft, so ist

$$\lambda'=p-\lambda.$$

XII.

Merkwuerdige Tatsachen in dieser Pseudogeometrie.

83. Satz: i) *Jede den Punkt* A_4 *in sich enthaltende Ebene und* ii) *jede den Kegelschnitt* k^2 *und den Punkt* A_4 *in sich enthaltende Quadriflaeche sind je eine Pseudoebene.*

84. Satz: i) *Jede den Punkt* A_4 *in sich und den Kegelschnitt* k^2 *nicht in sich enthaltende Ebene,* iii) *jede den Kegelschnitt* k^2 *in sich und den Punkt* A_4 *nicht in sich enthaltende Quadriflaeche, und* iii) *jeder*

Kegel zweiter Ordnung, welcher vom Scheitel A_4 *ist und* k^2 *nicht in sich enthaelt, sind je eine Pseudoquadriflaeche.*

Beweis.	i) $m=1$,	ii) $m=2$,	iii) $m=2$,
	$\mu=0$,	$\mu=0$,	$\mu=2$,
	$\nu=0$,	$\nu=1$,	$\nu=0$,
	$\therefore\ m'=2$.	$\therefore\ m'=2$.	$\therefore\ m'=2$.

85. Satz: i) *Jede durch* A_4 *hindurchgehende und den Kegelschnitt* k^2 *nicht in sich enthaltende Quadriflaeche und* ii) *jede* A_4 *und* k^2 *in sich enthaltende kubische Flaeche sind je eine pseudokubische Flaeche.*

Beweis.	i) $m=2$,	ii) $m=3$,
	$\mu=1$,	$\mu=1$,
	$\nu=0$,	$\nu=1$,
	$\therefore\ m'=3$.	$\therefore\ m'=3$.

86. Satz: i) *Jede durch den Punkt* A_4 *hindurchgehende Gerade und* ii) *jeder den Punkt* A_4 *in sich enthaltende und den Kegelschnitt* k^2 *schneidende Kegelschnitt sind je eine Pseudogerade.*

87. Satz: i) *Jede durch* A_4 *nicht hindurchgehende und* k^2 *nicht betreffende gewoehnliche Gerade,* ii) *jeder den Kegelschnitt* k^2 *zweimal schneidende und durch* A_4 *nich hindurchgehende Kegelschnitt,* iii) *jeder* k^2 *und* A_4 *je einmal betreffende Kegelschnitt, und* iv) *jede durch* A_4 *einmal hindurchgehende und* k^2 *dreimal betreffende Kubik, sind je ein Pseudokegelschnitt.*

Beweis.	i) $p=1$,	ii) $p=2$,	iii) $p=2$,	iv) $p=3$,
	$\varkappa=0$,	$\varkappa=0$,	$\varkappa=1$,	$\varkappa=1$,
	$\lambda=0$,	$\lambda=2$,	$\lambda=1$,	$\lambda=3$,
	$\therefore\ p'=2$.	$\therefore\ p'=2$.	$\therefore\ p'=2$.	$\therefore\ p'=2$.

88. Satz: i) *Jeder durch* A_4 *hindurchgehende und* k^2 *nicht betreffende Kegelschnitt,* ii) *jeder* k^2 *einmal betreffende und durch* A_4 *nicht hindurchgehende Kegelschnitt,* iii) *jede durch* A_4 *hindurchgehende* k^2 *zweimal betreffende kubische Kurve und* iv) *jede durch* A_4 *nicht hindurchgehende und* k^2 *dreimal betreffende kubische Kurve sind je eine pseudokubische Kurve.*

Beweis.	i) $p=2$,	ii) $y=2$,	iii) $p=3$,	iv) $p=3$,
	$\varkappa=1$,	$\varkappa=0$,	$\varkappa=1$,	$\varkappa=0$,

$$\lambda=0, \quad \lambda=1, \quad \lambda=2, \quad \lambda=3,$$
$$\therefore\ p'=3. \quad \therefore\ p'=3. \quad \therefore\ p'=3. \quad \therefore\ p'=3.$$

89. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudopunkten auf einer Pseudogeraden ist gleich dem entsprechenden gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn die Pseudogerade als ein gewoehnliches Gebilde angesehen ist.*

Beweis. Wir koennen in jede pseudoebene Geometrie, ausgenommen die der eigentlichen Pseudoebene vierter Art ein ebenes Pseudokoordinatensystem $(X_1' : X_2' : X_3')$ durch

$$rX_1'=X_1,$$
$$rX_2'=X_2,$$
$$rX_3'=X_3,$$
$$rX_4'=s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3+s_4X_4=0$$

einfuehren, wo s_i auch (aber nicht zugleich) Null sein koennen, so dass $X_1' : X_2' : X_3'=x_1 : x_2 : x_3$ ist. Sind nun $(X')\equiv(x)$, $(Y')\equiv(y)$, $(\lambda X'+\mu Y')\equiv(\lambda x+\mu y)$, $(\lambda' X'+\mu' Y')\equiv(\lambda' x+\mu' y)$ irgend vier pseudokollineare sowie gewoehnliche kollineare Punkte, dann ist das Doppelverhaeltnis durch $\mu/\lambda : \mu'/\lambda'$ gegeben, welches von den Arten der Koordinaten unabhaengig ist.

Es bleiben noch die eigentlichen Pseudogeraden erster und zweiter Art und die uneigentlichen Pseudogeraden erster Art zu betrachten. Da diese Pseudogeraden je in einer eigentlichen Pseudoebene vierter Art liegen und in dieser Pseudoebene die Nishiuchi'sche pseudoebene Geometrie gilt, so folgt unsre Behauptung aus 50.

90. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier eigentlichen Pseudoebenen vierter Art eines Pseudoebenenbueschels ist gleich dem entsprechende gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn das Pseudoebenenbueschel als ein gewoehnliches angesehen ist.*

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus

$$X_1' : X_2' : X_3'=x_1 : x_2 : x_3.$$

91. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier eigentlichen Pseudogeraden zweiter Art eines Pseudogeradenbueschels ist gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn das Pseudobueschel als ein gewoehnliches angesehen ist.*

92. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von Pseudopunkten auf einem Pseudokegelschnitt, welcher entweder* i) *eine* A_4, k^2 *nicht betreffende*

gewoehnliche Gerade, oder ii) *ein k^2 zweimal schneidender und* A_4 *nicht enthaltender Kegelschnitt, oder* iii) *ein k^2 und* A_4 *je einmal betreffender Kegelschnitt oder* iv) *eine durch* A_4 *einmal hindurchgehende und k^2 dreimal betreffende Kubik ist, ist gleich dem entsprechenden gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn das Pseudogebilde als ein gewöhnliches angesehen ist.*

Beweis. i) Der Beweis ist wesentlich in 89 enthalten.

ii) Sind P_1, P_2, P_3, P_4, P irgend fuenf auf dem Kegelschnitt (und nicht auf k^2) liegende Punkte, dann ist das Pseudodoppelverhaeltnis von den vier Pseudoebenen $\{A_4PP_1\}$, $\{A_4PP_2\}$, $\{A_4PP_3\}$, $\{A_4PP_4\}$ nach 90 gleich dem entsprechenden gewoehnlichen Doppelverhaeltnis, wenn die Ebenen als gewoehnliche angesehen sind. Also folgt unsere Behauptung.

iii) In der Pseudoebene des genannten Pseudokegelschnittes gilt die Nishiuchi'sche ebene Pseudogeometrie und also folgt unser Satz aus 50.

iv) Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 irgend vier Punkte auf der Kubik, und P einer der Punkte, in welchen die Kubik k^2 schneidet. Dann ist das Pseudodoppelverhaeltnis von $\{A_4PP_1\}$, $\{A_4PP_2\}$, $\{A_4PP_3\}$, $\{A_4PP_4\}$ nach 90 auch ein gewoehnliches Doppelverhaeltnis.

93. Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis* (P_1P_2, P_3P_4) *von irgend vier Pseudopunkten* P_1, P_2, P_3, P_4 *auf einer Pseudokubik, welche entweder* i) *ein durch* A_4 *hindurchgehender und k^2 nicht betreffender Kegelschnitt, oder* ii) *ein k^2 einmal und* A_4 *nicht betreffender Kegelschnitt, oder* iii) *eine durch* A_4 *hindurchgehende und k^2 zweimal betreffende Kubik, oder* iv) *eine k^2 dreimal betreffende Kubik ist, ist gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis* (P_1P_2, P_3P_4), *wenn die Pseudokubik als ein gewoehnliches Gebilde angesehen ist.*

Beweis. i) Die genannte Pseudokubik besitzt den uneigentlichen Pseudopunkt $\{A_1A_2A_3\}$, so dass das Geradenbueschel $[A_4P_1]$, $[A_4P_2]$, $[A_4P_3]$, $[A_4P_4]$ mit den Pseudogeradenbuescheln $[\{A_1A_2A_3\}, P_1]$, $[\{A_1A_2A_3\}, P_2]$, $[\{A_1A_2A_3\}, P_3]$, $[\{A_1A_2A_3\}, P_4]$ aequivalent ist. Also folgt unser Satz aus 91.

ii) Es sei P ein andrer Punkt auf der genannten Pseudokubik; dann sind $\{A_4PP_1\}$, $\{A_4PP_2\}$, $\{A_4PP_3\}$, $\{A_4PP_4\}$ Pseudoebenen eines Pseudobueschels sowie gewoehnliche Ebenen eines Bueschels. Also folgt unser Satz aus 90.

iii), iv) Da die Kubik k^3 durch sechs Punkte bestimmt ist, so ist eine k^3, k^2, A_4 enthaltende Quadriflaeche (Pseudoebene) eindeutig bestimmt. Es schneide eine der durch A_4 hindurchgehenden Erzeugenden der Quadriflaeche k^3 im Punkte P. Dann sind $[A_4P]$, $\{A_1A_2A_3\}$ zwei zur Kubik angehoerige Pseudopunkte und das Pseudodoppelverhaeltnis von $\{[[A_4P], \{A_1A_2A_3\}], P_i\}(i=1, 2, 3, 4)$ ist gleich dem gewoehnlichen Doppelverhaeltnis von $\{A_4PP_i\}$, $(i=1, 2, 3, 4)$. Also folgt unser Satz aus 90.

94. Indem wir die vorhergehenden Saetze zusammenfassen, erhalten wir den

Satz: *Das Pseudodoppelverhaeltnis von irgend vier Pseudoelementen eines Pseudogebildes erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung ist gleich dem entsprechenden Doppelverhaeltnis, wenn das Pseudogebilde als ein gewoehnliches Gebilde erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung angeshen werden kann.*

95. Zusatz: *Das in* 94 *besagte Doppelverhaeltnis kann auch* -1 *sein.*

96. Zusatz: *Eine Involution auf einem Pseudogebilde erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung ist auch eine gewoehnliche Involution, wenn das Pseudogebilde als ein gewoehnliches Gebilde erster Stufe, erster oder zweiter oder dritter Ordnung angesehen werden kann.*

97. Die Beziehung zwischen der pseudoebenen Geometrie in einer eigentlichen Pseudoebenen erster oder zweiter oder dritter Art und der gewoehnlichen ebenen Geometrie kann als eine *allgemeine stereographische Projektion der Quadriflaeche* auf einer zur Tangentialebene in A_4 parallelen Ebene angesehen werden.

98. Ist die Rede von einer eigentlichen Pseudoebene zweiter Art, so sind die saemtlichen Erzeugenden eigentlichc Pseudogerade.

Ist die Quadriflaeche eine Regelflaeche im Euklidischen Raume, so koennen wir, nach Pluecker[1] ein sogenanntes *hyperbolisches Koordinatensystem* einfuehren. Wir haben nur noetig, etwa die durch A_4 gehenden Erzeugenden a und b als ein Koordinatensystem einzufuehren und jeden Punkt P auf der Quadriflaeche durch die Abschnitte

$$A_4X=\xi, \quad A_4Y=\eta$$

uns gegeben zu denken, welche die durch P gehenden Erzeugenden b_1 und a_1 auf den Geraden a und b liefert. Eine Gleichung zwischen ξ und η stellt dann eine auf der Quadriflaeche gelegte Raumkurve dar.

99. Eine eigentliche Pseudoebene vierter Art ist eine A_4 in sich enthaltende gewoehnliche Ebene. Also ist die Pseudogeometrie in dieser nichts anderes als die Nishiuchi'sche pseudoebene Geometrie (als Bild der allgemeinen ebenen Inversionen).

---

1 Pluecker, Die analytische Geometrie der Kurven auf den Flaechen zweiter Ordnung und Klasse. J. fuer Math. Bd. 34, (1847), S. 341–356.

XIII.

Pseudopol und Pseudopolare.

100. Wir definieren Pseudopole und Pseudopolaren ganz wie in 61.

101. Ist insbesondere die Pseudoquadriflaeche eine durch A_1, A_2, A_3 hindurchgehende und durch A_4 nicht hindurchgehende gewoehnliche Quadriflache, so erhalten wir den folgenden

Satz: *Jeder durch irgend zwei feste Punkte* A_4, P *hindurchgehender und einen festen Kegelschnitt* k^2 *zweimal betreffender Kegelschnitt schneidet eine* k^2 *und nicht* A_4 *in sich enthaltende Quadriflaeche in zwei noch andern Punkten* Q, Q′. *Es sei* P′ *ein Punkt auf dem Kegelschnitt derart, dass* (QQ′, PP′) *eine harmonische Gruppe auf dem Kegelschnitt ist. Dann ist der Ort von* P′ *eine* A_4 *und* k^2 *in sich enthaltende Quadriflaeche.*

102. Ist dagegen die Pseudoquadriflaeche eine A_4 und nicht k^2 in sich enthaltende gewoehnliche Ebene, so erhalten wir den

Satz: *Jeder durch irgend zwei feste Punkte* A_4, P *hindurchgehender und einen festen Kegelschnitt* k^2 *zweimal betreffender Kegelschnitt schneidet eine* A_4 *und nicht* k^2 *in sich enthaltende Ebene in zwei Punkten* Q, Q′. *Es seien* P′ *ein Punkt auf dem Kegelschnitt derart, dass* (QQ′, PP′) *eine harmonische Gruppe auf dem Kegelschnitt ist; dann ist der Ort von* P′ *eine* A_4 *und* k^2 *in sich enthaltende Quadriflaeche.*

103. Ist insbesondere der Pseudopunkt P der uneigentliche Pseudopunkt ($X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 0 : 0 : 0 : 1$), so sind alle durch P hindurchgehenden Pseudogeraden die durch A_4 hindurchgehenden gewoehnlichen Geraden, und also erhalten wir die Uebereinstimmung:

Die Pseudopolare von P(0 : 0 : 0 : 1) *in Bezug auf eine* k^2 *und nicht* A_4 *in sich enthaltende Quadriflaeche ist die Pseudoebene* $X_4 = 0$. *Umgekehrt ist der Pseudopol von* $X_4 = 0$ *in Bezug auf dieselbe Pseudoquadriflaeche der Pseudopunkt* (0 : 0 : 0 : 1).	*Der Pol von* $\{A_1A_2A_3\}$ *in Bezug auf eine* k^2 *und nicht* A_4 *in sich enthaltende Quadriflaeche ist der Punkt* A_4. *Umgekehrt ist die Polare von* A_4 *in Bezug auf dieselbe Quadriflaeche die Pseudoebene* $X_4 = 0$.

104. Man betrachte die Pseudoquadriflaeche

$$(1) \qquad a_1X_1X_4 + a_2X_2X_4 + a_3X_3X_4 + a_4\varphi(X_1X_2X_3) = 0.$$

Dann ist die Pseudopolare von $P(Y)$

$$(2)\qquad (a_1Y_4+a_4c_2Y_3+a_4c_3Y_2)X_1+(a_2Y_4+a_4c_1Y_3+a_4c_3Y_1)X_2$$
$$+(a_3Y_4+a_4c_1Y_2+a_4c_2Y_1)X_3+(a_1Y_1+a_2Y_2+a_3Y_3)X_4=0,$$

welche eine durch A_4, k^2 hindurchgehende gewoehnliche Quadriflaeche ist. Die gewoehnliche Polare von $P(y)$ in Bezug auf (2) ist

$$y_4\{(c_2y_3+c_3y_2)(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3)+(a_1\varphi(y_1y_2y_3)+a_4y_4(c_2y_3+c_3y_2)\}x_1$$
$$+y_4\{(c_1y_3+c_3y_1)(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3)+(a_2\varphi(y_1y_2y_3)+a_4y_4(c_1y_3+c_3y_1)\}x_2$$
$$+y_4\{(c_1y_2+c_2y_1)(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3)+(a_3\varphi(y_1y_2y_3)+a_4y_4(c_1y_2+c_2y_1)\}x_3$$
$$+\varphi(y_1y_2y_3)(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+2a_4y_4)x_4=0,$$

d.h.

$$(3)\quad y_4\varphi(y_1y_2y_3)(\Sigma a_ix_i)+(\Sigma a_iy_i)\{y_4(c_2y_3+c_3y_2)x_1+y_4(c_1y_3+c_3y_1)x_2$$
$$+y_4(c_1y_2+c_2y_1)x_3+\varphi(y_1y_2y_3)x_4\}=0.$$

Damit (3) mit (1) uebereinstimme, muss entweder

$$(\Sigma a_iy_i)=0$$

oder

$$\frac{y_4(c_2y_3+c_3y_2)}{a_1}=\frac{y_4(c_1y_3+c_3y_1)}{a_2}=\frac{y_4(c_1y_2+c_2y_1)}{a_3}=\frac{\varphi(y_1y_2y_3)}{a_4}$$

sein. Aus den letzteren ergiebt sich

$$\frac{y_1}{c_1(\Sigma c_ia_i-2c_1a_1)}=\frac{y_2}{c_2(\Sigma c_ia_i-2c_2a_2)}=\frac{y_3}{c_3(\Sigma c_ia_i-2c_3a_3)}$$
$$=\frac{2a_4y_4}{2\Sigma c_2c_3a_2a_3-\Sigma c_i^2a_i^2}.$$

Also muss der Punkt $P(y)$ entweder in der Ebene $\Sigma a_ix_i=0$ liegen oder die Koordinaten besitzen:

$$\frac{y_1}{c_1(\Sigma c_ia_i-2c_1a_1)}=\frac{y_2}{c_2(\Sigma c_ia_i-2c_2a_2)}=\frac{y_3}{c_3(\Sigma c_ia_i-2c_3a_3)}$$
$$=\frac{2a_4y_4}{2\Sigma c_2c_3a_2a_3-\Sigma c_i^2a_i^2}.$$

Indem wir noch (Y) und (y) miteinander vertauschen, koennen wir einen andern Satz hierzu korrelativ schliessen.

XIV.

Auffassung der betreffenden Geometrie als die allgemeine quadratische Inversion.

105. Die sogenannte allgemeine quadratische Inversion erhaelt man mittels der folgenden Erzeugung:

Eine Flaeche zweiter Ordnung f^2 sei gegeben und ein Punkt S; jedem Punkte P ordnen wir denjenigen Punkt P' des Strahles SP zu, der von P durch f^2 harmonisch getrennt wird, oder also den Schnittpunkt von SP mit der Polarebene von P in Bezug auf f^2. Jedem Punkte der Beruehrungskurve des von S aus an f^2 gehenden Tangentialkegels entspricht der durch ihn gehende Strahl des Buendels. Jedem Punkte der Ebene der Beruehrungskurve entspricht der Punkt S. Alle Punkte von f^2 entsprechen sich selbst.

Die Formeln fuer diese Verwandtschaft sind ganz die gleichen wie frueher. Die Flaeche f^2 behaelt fuer sich die Gleichung[1]

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) - k x_4^2 = o.$$

Also ersehen wir, dass wir die vorher betrachtete Pseudogeometrie als die *allgemeine quadratische Inversion* auffassen koennen.

Da ferner die *drei Arten von Inversion durch reciproke Radien* je ein specieller Fall der allgemeinen quadratischen Inversion sind, so koennen wir sie als eine *pseudoebene projecktive Geometrie* auffassen.

106. Verbindet man die Betrachtung in 97 mit dem Begriff des unendlich fernen imaginaeren Kreises, so gelangt man zur Lehre von den *gewoehnlichen stereographischen Projektionen.*

XV.

Pseudoprojektive Erzeugnisse und Analogien.

107. Es gelten auch in dieser Pseudogeometrie die Saetze in 53 und 55. Einige specielle Faelle derselben sind auch hier merkwuerdig.

In den eigentlichen Pseudoebenen vierter Art gelten die Behauptungen (1°), (2°), (3°) in 53 and (2°) in 55; und in den eigentlichen Pseudoebenen zweiter Art gilt die Behauptung in 54.

108. Im Pseudobuendel gelten auch die Saetze in 56. Einige specielle Falle sind interessant.

(1°) *Die folgenden Erzeugungen stimmen in den beiden Geometrien ueberein:*

Sind die beiden Pseudoebenenbueschel in irgend zwei durch A_4 hindurchgehenden eigentlichen Pseudogeraden zweiter Art gegeben, so ist das pseudoprojektive Erzeugnis	*Sind die beiden Ebenenbueschel durch irgend zwei durch A_4 hindurchgehende Gerade gegeben, so ist das projektive Erzeugnis ein Kegel zweiter Ordnung.*

[1] Transformationen II.

ein Pseudokegel zweiter Ordnung.

Sind die beiden Pseudogeradenbueschel in irgend zwei durch A_4 *hindurchgehenden eigentlichen Pseudoebenen zweiter Art gegeben, so ist das pseudoprojektive Erzeugnis ein Pseudokegel zweiter Ordnung.*

Sind die beiden Geradenbueschel durch irgend zwei durch A_4 *hindurchgehende Ebenen bestimmt, so ist das projektive Erzeugnis ein Kegel zweiter Ordnung.*

(2°) *Ein und derselbe Kegel kann auf zweierlei Weisen erzeugt werden:*

Ist P *irgend ein eigentlicher Pseudopunkt und* [PQ], [PR] *irgend zwei eigentliche Pseudogeraden dritter Art, welche zwei pseudoprojektive Ebenenbueschel bestimmen, so ist das pseudoprojektive Erzeugnis ein Pseudokegel zweiter Ordnung. Enthaelt insbesondere der Pseudokegel* k^2 *in sich, so ist er der gewoehnliches Kegel zweiter Ordnung* (P, k^2).

Ist P *irgend ein Pseudopunkt und* [PQ], [PQ′], [PR], [PR′] *irgend vier eigentliche Pseudogeraden dritter Art, welche zwei pseudoprojektive Geradenbueschel* ([PQ], [PR]), ([PQ′], [PR′]) *bestimmen, so ist das pseudoprojektive Erzeugnis ein Pseudokegel zweiter Ordnung. Enthaelt der Kegel insbesondere* k^2 *in sich, so ist er der gewoehnliche Kegel zweiter Ordnung* (P, k^2).

Ist P *ein Punkt und* [PQ], [PR] *irgend zwei Geraden, welche* k^2 *betreffen und zwei projektive Ebenenbueschel bestimmen, so ist das projektive Erzeugnis ein Kegel zweiter Ordnung. Enthaelt insbesondere der Kegel* k^2 *in sich, so ist er der Pseudokegel zweiter Ordnung* (P, k^2).

Ist P *irgend ein Punkt und* [PQ], [PQ′], [PR], [PR′] *irgend vier Geraden, welche zwei projektive Geradenbueschel* ([PQ], [PR]), ([PQ′], [PR′]) *bestimmen, so ist das projektive Erzeugnis ein Kegel zweiter Ordnung. Enthaelt er insbesondere* k^2 *in sich, so ist er der Kegel zweiter Ordnung* (P, k^2).

(3°) *Die folgenden Tatsachen stimmen in den beiden Geometrien ueberein:*

Ist P *irgend ein eigentlicher Pseudopunkt, so ist die Durchschnittslinie vom Pseudokegel* (P, k^2) *mit einer eigentlichen Pseudoebene vierter Art ein Pseudokegelschnitt.*

Ist P *irgend ein Punkt, so ist die Durchschnittslinie vom Kegel* (P, k^2) *mit einer Ebene ein Kegelschnitt.*

109. Im Pseudoraume gelten die Saetze in 57, 58, 59. Einige specielle Faelle derselben sind interessant.

Die folgenden Erzeugungen z.B. stimmen in den beiden Geometrien miteinander ueberein, wenn wir den speciellen Fall des linkseitigen Satzes in 57 betrachten, in welchem die gesammten Erzeugenden eigentliche Pseudogerade dritter Art sind.

Sind e_1, e_2 irgend zwei pseudoprojektive Pseudopunktreihen (auf zwei eigentlichen Pseudogeraden dritter Art), dann ist das pseudoprojektive Erzeugnis eine Pseudoregelflaeche zweiter Ordnung.

Sind e_1, e_2 irgend zwei den Kegelschnitt k^2 schneidende projektive Punktreihen, dann ist das projektive Erzeugnis eine Regelflaeche zweiter Ordnung.

KAP. V.

Aufbau eines andern Systems von raeumlichen pseudoprojektiven Geometrien.

XVI.

Uebersicht.

110. Der Fundamentalsatz in 1 ermoeglicht uns des Dualitaetsprinzips wegen ein anderes System vom raeumlichen pseudoprojektiven Geometrien zu begruenden. Den allgemeinen Prozess moechten wir im folgenden zeigen.

Es seien (u_i) die projektiven Ebenenkoordinaten im Raume R, so dass (u_i) zum nicht singulaeren Zahlensyetem gehoeren, in welchem das associative Gesetz sowie das kommutative Gesetz der Multiplikation gelten; es seien (U_i) die Ebenenkoordinaten im Raume R', welche mit (u_i) eineindeutig, d.h. birational, verbunden sind:—

$$u_i = \varphi_i(U_i),$$
$$U_i = \psi_i(u_i),$$
$$(i = 1, 2, 3, 4);$$

so dass die Punkte, die Ebenen und die Geraden in R' auf die folgende Weise definiert sind:—

(i) *Es werden ein Zahlenquadrupel (U_i) wo U_i notwendig nicht alle null sind, als Ebene, zwei Ebenen (U_i), (λU_i), wo λ eine beliebige von Null verschiedene Zahl bezeichnet, als identisch, sonst als verschieden bezeichnet.*

(ii) *Ebenso werde ein Zahlenquadrupel derselben Art $(t_i) = (\lambda t_i)$ als Punkt bezeichnet, und das Zusammenfallen (die vereinigte Lage) einer*

Ebene (U_i) *mit einem Punkt* (t_i) *durch die Gleichung*

$$U_1t_1+U_2t_2+U_3t_3+U_4t_4=0$$

definiert, welche bei Variabeln (U_i) *Gleichung des Punktes, bei Variabeln* (t_i) *Gleichung der Ebene* (t_i) *heisst.*

(iii) *Sind* (U_i) *und* (U_i') *irgend zwei Ebenen, dann heisst der Inbegriff der Punkte, die zu* (U_i) *und* (U_i') *gemeinsam sind, die Gerade.*

Dann gilt im Raume R' *auch eine projektive Geometrie.*

XVII.

Aufbau einer raeumlichen pseudoprojektiven Geometrie mittels der kubischen birationalen Transformation der Ebenenkoordinaten.

111. Die Transformationsformeln fuer die betreffende pseudoprojektive Geometrie koennen ganz wie in 15 eingefuehrt werden.

112. Das *Fundamentalsystem* dieses Raumes besteht aus einer Kurve sechster Klasse und einer Regelflaeche achter Klasse, welche aus allen dreifachen Schnittlinien der rektifizierenden Ebenen dieser Raumkurve besteht und die Kurve sechster Klasse als eine dreifache Kurve enthaelt. Den rektifizierenden Ebenen der Fundamentalkurve in einem Raume entsprechen je die Erzeugenden der Regelflaeche des andern Raumes.

113. Wir koennen wie in Kap. II den allgemeinen Fall der betreffenden Pseudogeometrie begruenden. Wir wollen aber jetzt beispielsweise nur den folgenden speciellen Fall betrachten.

Es bestehe jede der beiden Fundamentalkurven aus sechs Geraden, welche ein Tetraëder bilden. Waehlen wir diese als Fundamentaltetraëder, so laesst sich die Transformation in der Gestalt schreiben

$$U_1:U_2:U_3:U_4=a_1u_2u_3u_4:a_2u_1u_3u_4:a_3u_1u_2u_4:a_4u_1u_2u_3,$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 Zahlenkoëfficienten sind. Umgekehrt folgt daraus

$$u_1:u_2:u_3:u_4\equiv a_1U_2U_3U_4:a_2U_1U_3U_4:a_3U_1U_2U_4:a_4U_1U_2U_3.$$

Speciell koennen wir die Einheitsebenen eines jeden der beiden Koordinatensysteme einander zuweisen und erhielten dann die Formeln

$$U_1:U_2:U_3:U_4=u_2u_3u_4:u_1u_3u_4:u_1u_2u_4:u_1u_2u_3.$$

Beschreibt nun die Ebene (U_i) einen Punkt

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$

so beschreibt die Ebene (u_i) eine Flaeche dritter Klasse

$$t_1 a_1 u_2 u_3 u_4 + t_2 a_2 u_3 u_4 u_1 + t_3 a_3 u_4 u_1 u_2 + t_4 a_4 u_1 u_2 u_3 = 0,$$

welche die sechs Kanten des Fundamentaltetraëders beruehrt; und umgekehrt, jede der sechs Kanten beruehrenden Flaeche dritter Klasse kann als ein Pseudopunkt betrachtet werden.

114. Es giebt drei Arten von eigentlichen Pseudopunkten :—

(i) Ein *eigentlicher Pseudopunkt erster Art* heisst jede die sechs Kanten des Fundamentaltetraëders beruehrende Flaeche dritter Klasse und ist durch eine Gleichung von der Form

$$t_1 U_1 + t_2 U_2 + t_3 U_3 + U_4 U_4 = 0,$$
$$(t_1 \neq 0,\ t_2 \neq 0,\ t_3 \neq 0,\ t_4 \neq 0)$$

gegeben.

(ii) Ein *eigentlicher Pseudopunkt zweiter Art* heisst jede drei Ebenen $\{A_i A_j A_k\}$, $\{A_i A_k A_l\}$, $\{A_i A_l A_j\}$ beruehrende Kegelflaeche zweiter Klasse und ist durch eine Gleichung etwa von der Form

$$t_j U_j + t_k U_k + t_l U_l = 0,$$
$$(t_j \neq 0,\ t_k \neq 0,\ t_l \neq 0,\ t_i = 0)$$

gegeben.

(iii) Ein *eigentlicher Pseudopunkt dritter Art* heisst jeder auf einer Kante $[A_i A_j]$ liegende Punkt und ist durch eine Gleichung von der Form

$$t_i U_i + t_j U_j = 0,$$
$$(t_i \neq 0,\ t_j \neq 0,\ t_k = 0,\ t_l = 0)$$

gegeben.

115. Es giebt eine Art von uneigentlichen Pseudopunkten; ein *uneigentlicher Pseudopunkt* heisst der Inbegriff der Punkte in der Ebene $\{A_i A_j A_k\}$ und ist durch eine Gleichung von der Form

$$U_l = 0$$

gegeben.

116. Es giebt eine Art von eigentlichen Pseudoebenen. Eine *eigentliche Pseudoebene* heisst jede durch A_i nicht hindurchgehende gewoehnliche Ebene und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_4 t_4 = 0,$$
$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0,\ b_4 \neq 0)$$

gegeben.

117. Es giebt drei Arten von uneigentlichen Pseudoebenen :

(i) Eine *uneigentliche Pseudoebene erster Art* heisst jeder Punkt (die *Lage* des Punktes) in einer Ebene $\{A_iA_jA_k\}$ und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_it_i+b_jt_j+b_kt_k=0,$$
$$(b_i\neq 0,\ b_j\neq 0,\ b_k\neq 0,\ b_l=0)$$

gegeben.

(ii) Eine *uneigentliche Pseudoebene zweiter Art* heisst jeder Punkt (oder die *Lage* des Punktes) auf einer Kante $[A_iA_j]$ und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_it_i+b_jt_j=0,$$
$$(b_i\neq 0,\ b_j\neq 0,\ b_k=0,\ b_l=0)$$

gegeben.

(iii) Eine *uneigentliche Pseudoebene dritter Art* heisst jede durch A_i hindurchgehende Ebene und ist durch eine Gleichung von der Form

$$b_it_i=0,$$
$$(b_i\neq 0,\ b_j=0,\ b_k=0,\ b_l=0)$$

gegeben. Jede zwei solche Ebenen sollen als eine und dieselbe Pseudoebene angesehen werden.

118. Es giebt vier Arten von eigentlichen Pseudogeraden:

(i) Eine *eigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jede Raumkurve dritter Klasse, welche die vier Ebenen $\{A_1A_2A_3\}$, $\{A_1A_2A_4\}$, $\{A_1A_3A_4\}$, $\{A_2A_3A_4\}$ als rektifizierende Ebenen besitzt, und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2+t_3'U_3+t_4'U_4=0,$$
$$(t_i\neq 0,\ t_j'\neq 0,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

oder

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2+t_3'U_2=0,$$
$$(t_i\neq 0,\ t_j'\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

oder

$$t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$t_1'U_1+t_3'U_3+t_4'U_4=0,$$
$$(t_i\neq 0,\ t_j'\neq 0,\ i=2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 3,\ 4)$$

gegeben. In der Tat, die ersten zwei koennen immer zur dritten Gestalt reduciert werden.

(ii) Eine *eigentliche Pseudogerade zweiter Art* heist jeder Kegel zweiter Ordnung, welcher zwei Ebenen (z.B. $\{A_1A_2A_3\}$ und $\{A_1A_2A_4\}$)

des Fundamentaltetraëders beruehrt und einen Punkt auf der entsprechenden Kante ($[A_1A_2]$) als Scheitel besitzt und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ t_j' \neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2)$$

oder

$$t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ t_j' \neq 0,\ i=2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2)$$

gegeben. In der Tat, die erste ist zur letzten Gestalt reducierbar.

(iii) Eine *eigentliche Pseudogerade dritter Art* heisst jede Gerade, die in einer Ebene (etwa $\{A_1A_2A_3\}$) des Fundamentaltetraëders liegt und keine der Ecken in sich enthaelt, und ist durch Gleichungen entweder von der Form

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2+t_3'U_3=0,$$
$$(t_i=0,\ t_j'=0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

oder von der Form

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ t_j' \neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2)$$

oder von der Form

$$t_2U_2+t_3U_3=0,$$
$$t_1'U_1+t_2'U_2=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ t_j' \neq 0,\ i=2,\ 3,\ j=1,\ 2)$$

gegeben. In der Tat sind die ersten zwei zur letzten Form reduzierbar.

(iv) Eine *eigentliche Pseudogerade vierter Art* heisst jede Gerade, die einen Punkt in einer Kante (z.B. $[A_1A_2]$) mit einem Punkte in der gegenueberliegenden Kante ($[A_3A_4]$) verbindet und mit keiner der sechs Kanten zusammenfaellt, und ist durch Gleichungen von der Fmor

$$t_1U_1+t_2U_2=0,$$
$$t_3'U_3+t_4'U_4=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ t_j' \neq 0,\ i=1,\ 2,\ j=3,\ 4)$$

gegeben.

119. Es giebt drei Arten von uneigentlichen Pseudogeraden.

(i) Eine *uneigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jeder im

Dreieck $A_jA_kA_l$ eingeschriebene Kegelschnitt zusammen mit den drei Geraden (Ebenenbueschel) $[A_jA_k]$, $[A_kA_l]$, $[A_lA_j]$ und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$t_iU_i+t_jU_j+t_kU_k+t_lU_l=0,$$
$$t_i'U_i=0,$$
$$(t_i'\neq 0,\ t_m\neq 0,\ m=i,\ j,\ k,\ l)$$

oder

$$t_jU_j+t_kU_k+t_lU_l=0,$$
$$t_i'U_i=0,$$
$$(t_i'\neq 0,\ t_m\neq 0,\ m=j,\ k,\ l)$$

gegeben. In der Tat ist die erste zur letzten reducierbar.

(ii) Eine *uneigentliche Pseudogerade zweiter Art* heisst jeder auf einer Kante (z.B. $[A_jA_k]$) der Ebene $(\{A_jA_kA_l\})$ liegende Punkt und ist durch Gleichungen entweder von der Form

$$t_iU_i+t_jU_j+t_kU_k=0,$$
$$t_i'U_i=0,$$
$$(t_i'\neq 0,\ t_m\neq 0,\ m=i,\ j,\ k)$$

oder von der Form

$$t_jU_j+t_kU_k=0,$$
$$t_i'U_i=0,$$
$$(t_i'\neq 0,\ t_m\neq 0,\ m=j,\ k)$$

gegeben. In der Tat ist die erste zur letzten reducierbar.

(iii) Eine *uneigentliche Pseudogerade dritter Art* heisst das Ebenenbueschel $[A_jA_l]$ und ist durch Gleichungen von der Form entweder

$$t_iU_i+t_jU_j=0,$$
$$t_i'U_i+t_j'U_j=0,$$
$$(t_m\neq 0,\ t_m'\neq 0,\ m=i,\ j)$$

oder

$$t_iU_i+t_jU_j=0,$$
$$t_i'U_i=0,$$
$$(t_i'\neq 0,\ t_m\neq 0,\ m=i,\ j)$$

order

$$t_iU_i=0,$$
$$t_j'U_j=0,$$
$$(t_i\neq 0,\ t_j'\neq 0)$$

gebeben. In der Tat sind die ersten beiden zur letzten reducierbar.

120. Satz: *Jedes Gebilde in dieser Geometrie ergiebt sich mittels des Dualitaetsprinzips aus der in Kap. III besagten Geometrie.*

121. Satz: *Alle (z.B. den in VIII, IX, X besagten Erzeugnissen entsprechenden) Ergebnisse ergeben sich aus den vorhergehenden mittels des Dualitaetzprinzips.*

XVIII.

Eine merkwuerdige pseudoebene Geometrie.

122. Es giebt offenbar in der eigentlichen Pseudoebene in 116 eine pseudoebene Geometrie; sie ist aber nicht zur Nishiuchi'schen pseudoebenen Geometrie dualistisch. In der Tat koennen wir von der Nishiuchi'schen pseudoebenen Geometrie mittels des Dualitaetsprinzips eine andere merkwuerdige pseudoebene Geometrie ableiten.

123. Die Linienkoordinaten (U_i) dieser ebenen Pseudogeomotrie sind durch

$$U_1 : U_2 : U_3 = u_2u_3 : u_3u_1 : u_1u_2$$

gegeben. Dann ist jeder Pseudopunkt durch eine Gleichung von der Form

$$t_1U_1 + t_2U_2 + t_3U_3 = 0$$

gegeben. Wir nennen $U_1 : U_2 : U_3$ die Pseudopunktkoordinaten in dieser pseudoebenen Geometrie.

124. Es giebt eine Art von eigentlichen Pseudogeraden. Eine *eigentliche Pseudogerade* heisst jede A_i(i = 1, 2, 3) nicht enthaltende gewoehnliche Gerade und ist durch eine Gleichung von der Form

$$U_1t_1 + U_2t_2 + U_3t_3 = 0,$$
$$(U_i \neq 0, \ i = 1, \ 2, \ 3)$$

gegeben.

125. Es giebt zwei Arten von uneigentlichen Pseudogeraden.

(i) Eine *uneigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jeder Punkt (die *Lage* des Punktes) auf einer Seite $[A_jA_k]$ und ist durch eine Gleichung von der Form

$$U_jt_j + U_kt_k = 0,$$
$$(U_j \neq 0, \ U_k \neq 0, \ U_i = 0)$$

gegeben.

(ii) Eine *uneigentliche Pseudogerade zweiter Art* heisst jede durch A_i (i = *eine von 1, 2, 3*) hindurchgehende gewoehnliche Gerade und ist durch eine Gleichung von der Form

$$U_i t_i = 0,$$

$$(U_j = 0,\ U_k = 0,\ U_i \neq 0,\ i, j, k = 1, 2, 3)$$

gegeben. Jede zwei solche Geraden sollen als eine und dieselbe angesehen werden.

126. Es giebt zwei Arten von eigentlichen Pseudopunkten.

(i) Ein *eigentlicher Pseudopunkt erster Art* heisst jeder im Fundamentaldreieck eingeschriebener Kegelschnitt und ist durch eine Gleichung von der Form

$$t_1 U_1 + t_2 U_1 + t_3 U_3 = 0$$

$$(t_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3)$$

gegeben.

(ii) Ein *eigentlicher Pseudopunkt zweiter Art* heisst jeder Punkt (ein Geradenbueschel) auf $[A_j A_k]$ und ist durch eine Gleichung von der Form

$$t_j U_j + t_k U_k = 0,$$

$$(t_j \neq 0,\ t_k \neq 0,\ t_i = 0,\ i, j, k = 1, 2, 3)$$

gegeben.

127. Es giebt eine Art von uneigentlichen Pseudopunkten. Ein *uneigentlicher Pseudopunkt* besteht aus dem Inbegriff der Punkte (die *Lagen* der Punkte) auf $[A_j A_k]$ und dem Inberiff der durch A_j, A_k hindurchgehenden Geraden und ist durch eine Gleichung von der Form

$$t_i U_i = 0,$$

$$(t_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3)$$

gegeben.

128. Satz: *Jedes Gebilde in dieser Geometrie ergiebt sich mittels des Dualitaetsprinzips aus dem in der Nishiuchi'schen Geometrie.* Z.B. ein gewoehnlicher Punkt ausserhalb der Seiten des Fundamentaldreiecks ist ein Pseudokegelschnitt.

129. Satz: *Alle Anwendungsergebnisse in dieser Geometrie sind mittels des Dualitaetsprinzips aus den in der Nishiuchi'schen Geometrie ableitbar.*

Beispiel 1°.

Ausgangssatz: Jeder Strahl eines Strahlenbueschels schneidet einen Kegelschnitt in zwei Punkten, die zwei konjungierte Punkte in der Involution des Kegelschnittes (der Punktreihe zweiter Ordnung) sind.	Ausgangssatz: Jeder Punkt einer Punktreihe liegt auf zwei Tangenten eines Kegelschnittes, die zwei konjugierte Tangenten in der Involution des Kegelschnittes (des Strahlenbueschels zweiter Ordnung) sind.

Satz i: *der Desargues'sche Satz bezueglich des Kegelschnittsbueschels.*

Satz i: *der Satz dualistisch zum Desargues'schen bezueglisch des Kegelschnittsbueschels.*

Wir koennten auch aus den resultierenden Saetzen zu den Ausgangssaetzen zurueckkehren.

Satz ii: *Es bestimmen irgend vier Punkte* P, A_1, A_2, A_3 *ein Kegelschnittsbueschel; es schneide ein beliebiger durch* A_1, A_2 *hindurchgehender Kegelschnitt* k^2 *einen Kegelschnit* k_i^2 *des Kegelschnitsbueschels in* M_i, M_i'. *Dann bilden* (M_i) *und* (M_i') *eine Involution auf dem Kegelschnit* k^2.

Satz ii: *Es bestimmen irgend vier Geraden* p, a_1, a_2, a_3 *ein Kegelschnittsgebuesch; es habe ein beliebiger* a_1, a_2 *beruehrender Kegelschnitt* k^2 *mit einem Kegelschnitt* k_i^2 *des Gebuesches die Tangenten* m_i, m_i' *gemein. Dann bilden* (m_i) *und* (m_i') *eine Involution auf dem Kegelschnitt* k^2.

Beispiel 2°

Ausgangssatz: Sinn P, Q in Bezug auf irgend zwei bestimmte Punkte A, B auf einem Kegelschnitt harmonisch konjugiert, so geht die Gerade PQ durch einen festen Punkt hindurch.

Satz: *Sind* P, Q *irgend zwei feste Punkte auf einer festen Geraden* g, *und schneidet ein durch die drei festen Punkte* A_1, A_2, A_3 *hindurchgehender Kegelschnitt* k^2 *die Gerade* g *in zwei Punkten, die in Bezug auf* P, Q *harmonisch konjugiert sind, dann geht der Kegelschnitt* k^2 *durch einen festen Punkt hindurch.*

Ausagangssatz: Sind p, q in Bezug auf irgend zwei bestimmte Tangenten a, b eines Kegelschnittes harmonisch konjugiert, so liegt der Punkt pq auf einer festen Geraden.

Satz: *Sind* p, q *irgend zwei feste Geraden durch einen festen Punkt* P, *und besitzt ein die drei festen Geraden* a_1, a_2, a_3 *beruehrender Kegelschnitt* k^2 *irgend zwei Geraden des Geradenbueschels* P *als Tangenten, die in Bezug auf* p, q *harmonisch konjugiert sind, dann beruehrt der Kegelschnitt* k^2 *eine vierte feste Gerade.*

130. Satz: *Die Grundgebilde erster Stufe, erster oder zweiter Ordnung in einer Ebene sind im gewissen Sinn miteinander vertauschbar.*

In der Tat erhalten wir das folgende Schema von entsprechenden Gebilden:

In der Nishiuchi'schen Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Eine Pseudogerade	Ein durch A_1, A_2, A_3 hindurchgehender Kegelschnitt.

Ein Pseudokegelschnitt ....Eine durch $A_i (i=1, 2, 3)$ nicht hindurchgehende gewoehnliche Gerade.

In dieser Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Ein Pseudopunkt......................	Ein im Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebener Kegelschnitt.
Ein Pseudokegelschnitt	Ein auf $[A_iA_j]$ nicht liegender gewoehnlicher Punkt.

XIX.

Aufbau einer raeumlichen pseudoprojektiven Geometrie mittels der quadratischen birationalen Transformation der Ebenenkoordinaten.

131. Sind $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ gewoehnliche Ebenenkoordinaten, so ergeben sich die Pseudoebenenkoordinaten $U_1 : U_2 : U_3 : U_4$ in dieser pseudoprojektiven Geometrie aus

$$U_1 : U_2 : U_3 : U_4 = u_1u_4 : u_2u_4 : u_3u_4 : \frac{\varphi(u_1u_2u_3)}{k},$$

wobei $\varphi(u_1u_2u_3) \equiv c_1u_2u_3 + c_2u_3u_1 + c_3u_1u_2$ ist.

Ebeneso erhalten wir

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = U_1U_4 : U_2U_4 : U_3U_4 : \frac{\varphi(U_1U_2U_3)}{k}.$$

Beschreibt die Pseudoebene (U_i) einen Punkt

$$t_1U_1 + t_2U_2 + t_3U_3 + t_4U_4 = 0,$$

so nehmen wir (t_i) als die Punktkoordinaten dieses Punktes.

132. Die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$, der Punkt A_4, der Kegel zweiter Ordnung (A_4, k_1^2) und der Kegelschnitt $k_1^2 : \varphi(u_1u_2u_3) = 0$ bilden das *Fundamentalsystem*. Der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ sind die saemtlichen Ebenen von A_4 zugeordnet. Projiziert man eine Tangente l von dem Kegelschnitt k_1^2 mit einer Ebene, so entsprechen der Ebene alle Ebenen durch l.

133. Es giebt vier Arten von eigentlichen Pseudopunkten.

(i) Ein *eigentlicher Pseudopunkt erster Art* heisst jede nicht geradlinige Flaeche zweiter Klasse, welche die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ und den festen Kegel

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0,\ u_2=0$$

beruehrt, und zwar die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ im Punkte

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3=0,$$

wenn er durch eine Gleichung von der Form

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$c_1^2t_1^2+c_2^2t_2^2+c_3^2t_3^2-2c_1c_2t_1t_2-2c_2c_3t_2t_3-2c_3c_1t_3t_1<0)$$

gegeben ist, wobei der Punkt

$$t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3=0$$

nicht in reellen Tangenten am Kegelschnitt

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0$$

enthalten ist.

(ii) Ein *eigentlicher Pseudopunkt zweiter Art* heisst jeder Kegel zweiter Klasse, welcher die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ und den festen Kegel

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0,\ u_4=0$$

beruehrt und dessen Spitze auf der zusammenfallenden Tangente entweder

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3=0,$$
$$\varphi(u_1u_2u_3)=0,$$
$$(t_i \neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,$$
$$c_1^2t_1^2+c_2^2t_2^2+c_3^2t_3^2-2c_1c_2t_1t_2-2c_2c_3t_2t_3-2c_3c_1t_3t_1=0)$$

oder

$$c_ju_i+c_iu_j=0,\ \varphi(u_1u_2u_3)=0$$
$$i,\ j: \textit{zwei von}\ 1,\ 2,\ 3)$$

liegt , je nachdem das durch eine Gleichung von der Form entweder

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0,$$
$$(t_1 \neq 0,\ t_2 \neq 0,\ t_3 \neq 0,\ t_4 \neq 0,$$
$$c_1^2t_1^2+c_2^2t_2^2+c_3^2t_3^2-2c_1c_2t_1t_2-2c_2c_3t_2t_3-2c_3c_1t_3t_1=0)$$

oder

$$c_jU_i+c\ U_j+t_4U_4=0,\ (t_4 \neq 0)$$

gegeben ist.

(iii) Ein *eigentlicher Pseudopunkt dritter Art* heisst jede Regelflaeche zweiter Klasse, welche die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ und den Kegel

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0,\ u_4=0$$

beruehrt, und ist durch eine Gleichung von der Form entweder

$$t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4=0$$

$$(t_1 \neq 0,\ t_2 \neq 0,\ t_3 \neq 0,\ t_4 \neq 0,$$
$$c_1^2 t_1^2 + c_2^2 t_2^2 + c_3^2 t_3^2 - 2c_1c_2t_1t_2 - 2c_2c_3t_2t_3 - 2c_3c_1t_3t_1 > 0),$$

wobei die Regelflaeche die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ im Punkte

$$t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 = 0$$

beruehrt, oder

$$t_iu_i + t_ju_j + t_4u_4 = 0$$
$$(i,\ j: \textit{zwei von } 1,\ 2,\ 3,\ t_i \neq 0,\ t_j \neq 0,\ t_4 \neq 0),$$

wobei die Regelflaeche die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ im Punkte

$$t_iu_i + t_ju_j = 0$$

beruehrt, oder

$$t_lU_l + t_4U_4 = 0,$$
$$(l: \textit{eine von } 1,\ 2,\ 3),$$

wobei die Regelflaeche die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ im Punkte

$$u_l = 0$$

beruehrt, gegeben.

(iv) Ein *eigentlicher Pseudopunkt vierter Art* heisst jeder in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ enthaltene Punkt und ist durch eine Gleichung von der Form entweder

$$t_1U_1 + t_2U_2 + t_3U_3 = 0,$$
$$(t_1 \neq 0,\ t_2 \neq 0,\ t_3 \neq 0)$$

oder

$$t_iU_i + t_jU_j = 0,$$
$$t_i \neq 0,\ t_j \neq 0,\ i,\ j: \textit{zwei von } 1,\ 2,\ 3)$$

oder

$$U_l = 0,\ (l: \textit{eine von } 1,\ 2,\ 3)$$

gegeben.

Die Gesamtheit der Ebenenelemente durch den Punkt A_4 soll als eine zu diesem Pseudopunkte angehoerige Pseudoebene angesehen werden.

134. Es giebt nur einen *uneigentlichen Pseudopunkt,* und er besteht aus dem festen Kegelschnitt

$$\varphi(u_1u_2u_3) = 0$$

und dem Inbegriff der Punkte (der *Lagen*) in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ und ist durch

$$U_4 = 0$$

gegeben.

135. Es giebt eine Art von *eigentlichen Pseudoebenen;* eine eigentliche Pseudoebene heisst jede nicht dem Fundamentalsysteme angehoerige

gewoehnliche Ebene, und ist durch eine Gleichung von der Form entweder

$$U_1t_1+U_2t_2+U_3t_3+U_4t_4=0,$$

$$(U_i \neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \varphi(U_1U_2U_3)\neq 0)$$

oder

$$U_it_i+U_jU_j+U_4t_4=0,$$

$$(U_i\neq 0,\ U_j\neq 0,\ U_k=0,\ U_4\neq 0,$$

$$i,\ j,\ k: \textit{eine Permutation von } 1,\ 2,\ 3)$$

gegeben.

Die pseudoebene Geometrie in dieser Pseudoebene ist tatsaechlich *raeumlich.*

136. Es giebt vier Arten von uneigentlichen Pseudoebenen.

(i) Eine *uneigentliche Pseudoebene erster Art* heisst jede Gerade in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ und ist durch eine Gleichung von der Form entweder

$$U_1t_1+U_2t_2+U_3t_3=0,$$

$$(U_i\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ U_4=0)$$

oder

$$U_2t_2+U_3t_3=0,$$

$$(U_i\neq 0,\ i=2,\ 3,\ U_1=U_4=0)$$

gegeben.

(iii) Eine *uneigentliche Pseudoebene dritter Art* heisst jede durch eine Tangente zum Kegelschnitt

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0$$

hindurchgehende Ebene und ist durch eine Gleichung von der Form entweder

$$U_it_i=0,$$

$$(U_j=U_k=U_l=0,\ U_i\neq 0,$$

$$i,\ j,\ k,\ l: \textit{eine Permutation von } 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

oder

$$U_1t_1+U_2t_2+U_3t_3=0,$$

$$(U_i\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ U_4=0,\ \varphi(U_1U_2U_3)=0)$$

gegeben.

Jede zwei solche Ebenen durch dieselbe Tangente muessen als eine und dieselbe Pseudoebene angesehen werden.

(iv) Eine *uneigentliche Pseudoebene vierter Art* heisst jede durch A_4 hindurchgehende Ebene und ist durch die Gleichung

$$U_4t_4=0,$$

$$(U_4\neq 0,\ U_i=0,\ i=1,\ 2,\ 3)$$

gegeben. Jede zwei solche Ebenen muessen als eine und dieselbe Pseudoebene angesehen werden.

137. Es giebt drei Arten von eigentlichen Pseudogeraden.

(i) Eine *eigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jeder gewoehnliche Kegel, welcher die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ beruehrt, und mit dem festen Kegel

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0, \ u_4=0$$

zwei Tangentialebenen gemein hat.

(ii) Eine *eigentliche Pseudogerade zweiter Art* heisst jede gewoehnliche Gerade in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$.

(iii) Eine *eigentliche Pseudogerade dritter Art* heisst jede den festen Kegel

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0, \ u_4=0$$

beruehrende gewoehnliche Gerade.

138. Es giebt zwei Arten von uneigentlichen Pseudogeraden.

(i) Eine *uneigentliche Pseudogerade erster Art* heisst jedes durch irgend zwei Tangenten des Kegelschnittes k^2 bestimmte Geradenbueschel zusammen mit dem durch die Tangenten bestimmten Ebenenbueschel.

(ii) Eine *uneigentliche Pseudogerade zweiter Art* besteht aus dem Inbegriff der Punkte in einer Tangentialebene τ zum Kegel

$$\varphi(u_1u_2u_3)=0, \ u_4=0,$$

dem Punkte A_4 und der Tangente $[\tau, \{A_1A_2A_3\}]$ zum Kegelschnitt k_1^2.

139. Betrachtet man irgend eine durch A_4 hindurchgehende Ebene, so gilt die ebene Pseudogeometrie in XVIII in diesser Ebene.

140. Satz: *Jedes Gebilde in dieser Geometrie ergiebt sich mittels des Dualitaetsprinzips aus der in Kap. IV besagten Geometrie.*

141. Satz: *Alle den in Kap. IV besagten Ergebnissen entsprechenden ergeben sich mittels des Dualitaetsprinzips aus Kap. IV.*

142. Satz: *Die Grundgebilde zweiter Stufe der ersten Ordnung und die der zweiten Ordnung sind im gewissen Sinne miteinander vertauschbar.*

In der Tat erhalten wir das folgende Schema von entsprechenden Gebilden:

In der Kap. IV besagten Pseudogeometrie:	In der gewoehnlichen Geometrie:
Eine Pseudoebene.	Eine A_4, k^2 in sich enthaltende Quadriflaeche.

Eine Pseudoquadriflaeche. ....Eine den Punkt A_4 und den Kegelschnitt k^2 in sich nicht enthaltende Ebene.

In dieser Pseudogeometrie:	In der gewoehnlichen Geometrie:
Ein Pseudopunkt.....................	Eine den Kegel (k_1^2, A_4) und die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ beruehrende Quadriflaeche.
Eine Pseudoquadriflaeche.	Ein zum Fundamentalsysteme nicht gehoeriger Punkt.

KAP. VI.

Aufbau einiger specieller pseudoprojektiver Geometrien im Euklidischen Raume.

XX.

Specielle Faelle der in Kap. IV betrachteten Pseudogeometrie.

143. Indem wir die Ebene ven k^2 in der in Kap. IV betrachteten Pseudogeometrie auf der uneigentlichen Ebene im Euklidischen Raume annehmen, koennen wir fuenf Arten von speciellen raeumlichen pseudoprojektiven Geometrien begruenden, unter welchen es die wohl bekannte *Euklidische Pseudogeometrie von Nullpotenzkugeln* giebt. In jeder von diesen pseudoprojektiven Geometrien koennen wir ganz wie frueher zahlreiche Euklidische Saetze schliessen; also z.B.

In der gewoehnlichen Geometrie:	In der Pseudogeomentrie (xi).
Satz: *Ein Kegelschnitt schneidet die Strahlen eines Strahlenbueschels in involutorischen Punkten auf sich selbst.*	Satz: *Ist eine Parabel, deren Tangente t_i sind und deren Brennpunkt F ist, gegeben, dann bilden die Tangenten an den Parabeln(P, t_i, F) im festen Punkte P ein involutorisches Geradenbueschel P.*

(i)

144. Ist k^2 die unendlich ferne Ellipse (oder Hyperbel)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

und $A_4 \equiv O(0, 0, 0)$, so wird das Konikoid

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}$$

eine eigentliche Pseudoebene entweder erster oder zweiter oder dritter Art sein, je nachdem es ein zweischaliges Hyperboloid oder ein Kegel oder ein einschaliges Hyperboloid ist, d.h. je nachdem

$$\alpha^2/a^2+\beta^2/b^2-\gamma^2/c^2<0, \text{ od.}=0, \text{ od.}>0 \text{ ist.}$$

145. Die Transformationsformeln sind dann

$$X'=\frac{2x}{a^2}\Big/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$Y'=\frac{2y}{b^2}\Big/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$Z'=\frac{-2z}{c^2}\Big/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

(ii)

146. Ist k^2 die unendlich ferne imaginaere Ellipse

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$$

und $A_4 \equiv O(0, 0, 0)$, so wird das Konikoid

$$(x-\alpha)^2/a^2+(y-\beta)^2/b^2+(z-\gamma)^2/c^2=\alpha^2/a^2+\beta^2/b^2+\gamma^2/c^2,$$

welches entweder ein Ellipsoid oder ein imaginaerer Kegel ist, je nachdem

$$\alpha^2/a^2+\beta^2/b^2+\gamma^2/c^2>0, \text{ od. }=0$$

ist, eine eigentliche Pseudoebene sein.

147. Die Transformationsformeln sind dann

$$X'=\frac{2x}{a^2}\Big/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$Y'=\frac{2y}{b^2}\Big/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$Z'=\frac{2z}{c^2}\Big/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$

(iii)

148. Ist k^2 der unendlich ferne Kugelkreis $x^2+y^2+z^2=0$, so wird das Konikoid

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

welches entweder eine Kugel oder ein imaginaerer Kegel ist, je nachdem

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0, \text{ od.}=0$$

ist, eine eigentliche Pseudoebene sein.

149. Also ist diese pseudoprojektive Geometrie nichts anderes als die wohlbekannte Euklidische Geometrie von Nullpotenzkugeln.

(iv)

150. Ist k^2 das uneigentliche imaginaere Geradenpaar

$$x^2/a^2+y^2/b^2=0$$

und $A_4\equiv O(0, 0, 0)$, so wird das elliptische Paraboloid

$$(x-\alpha)^2/a^2+(y-\beta)^2/b^2=cz+\alpha^2/a^2+\beta^2/b^2$$

eine eigentliche Pseudoebene sein.

151. Die Transformationsformeln sind

$$X'=\frac{2x}{a^2}\bigg/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$Y'=\frac{2y}{b^2}\bigg/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$Z'=z\bigg/\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

(v)

152. Ist k^2 das uneigentliche reelle Geradenpaar

$$x^2/a^2-y^2/b^2=0$$

und $A_4=O(0, 0, 0)$, so wird das hyperbolische Paraboloid

$$(x-\alpha)^2/a^2-(y-\beta)^2/b^2=cz+\alpha^2/a^2+\beta^2/b^2$$

eine eigentliche Pseudoebene sein.

153. Die Transformationsformeln sind

$$X'=\frac{2x}{a^2}\bigg/\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$Y'=\frac{-2y}{b^2}\bigg/\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$Z'=z\bigg/\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

XXI.

(vi)

Specielle Faelle der in XIX betrachteten Pseudogeometrie.

154. Wenn wir in der in XIX betrachteten pseudoprojektiven Geometrie als einen Teil des Fundamentalsystems uneigentliche Elemente einfuehren, so koennen wir noch andere Systeme von speciellen raeumlichen pseudoprojektiven Geometrien aufbauen. Die eigentlichen Pseudopunkte in dieser Geometrie sind alle zu einander *homolog.*

155. Ist der Kegel (A_4, k_1^2) durch

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$$

gegeben und die Ebene von k_1^2 durch $l'x+m'y+n'z-p'=0$, so ist das Konikoid

$$\{\Sigma a^2(l'p-lp')^2\}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-p'^2(lx+my+nz-p)^2=0$$

d.h.

$$p\Sigma a^2(s^2l'^2-p'^2u^2)-2p's\Sigma a^2l(sl+p'u)=0$$

ein eigentlicher Pseudopunkt. Dieses Konikoid kann weder immer zentral noch immer nichtzentral sein, da

$$\Delta'''\equiv\begin{vmatrix} l-\lambda/la^2 & m & n \\ l & m-\lambda/mb^2 & n \\ l & m & n-\lambda/nc^2 \end{vmatrix}\equiv\lambda^2(\Sigma l^2a^2-\lambda)/(l\,m\,n\,a^2b^2c^2)$$

ist, worin $\lambda\equiv\Sigma a^2(l'p-lp')^2$ ist. Die Diskriminante ist

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} l-\lambda/la^2 & m & n & -p \\ l & m-\lambda/mb^2 & n & -p \\ l & m & n-\lambda/nc^2 & -p \\ l & m & n & -p \end{vmatrix}\equiv\lambda^3p/(l\,m\,n\,a^2b^2c^2)$$

und

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} l-\lambda/la^2 & m \\ l & m-\lambda/mb^2 \end{vmatrix}\equiv\lambda(\lambda-l^2a^2-m^2b^2)/(l^2m^2a^2b^2)$$

und

$$\Delta'\equiv l-\lambda/la^2.$$

Ist $l\,m\,n\,p(l-\lambda/la^2)<0$, welches mit $\Delta.\Delta'$ dasselbe Vorzeichen besitzt, so ist die Flaeche ein einschaliges Hyperboloid. Ist $l\,m\,n\,p(l-\lambda/la^2)>0$, so ist die Flaeche entweder ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem $\lambda(\lambda-l^2a^2-m^2b^2)>0$, oder <0 ist. Ist $\lambda p=0$, so ist die Flaeche ein Kegel.

156. Die Transformationsformeln sind

$$U'=2p'a^2(l'+p'u)/(\Sigma a^2l'^2-p'^2\Sigma a^2u^2),$$
$$V'=2p'b^2(m'+p'v)/(\Sigma a^2l'^2-p'^2\Sigma a^2u^2),$$
$$W'=2p'c^2(n'+p'w)/(\Sigma a^2l'^2-p'^2\Sigma a^2u^2);$$

und die Gleichung des genannten Pseudopunktes wird dann

$$lU+mV+nW-p=0.$$

(vii)

157. Ist der Kegel (A_4, k_1^2) durch $x^2+y^2+z^2=0$ gegeben, dann koennen wir, indem wir b^2, c^2 in 155, 156 durch a^2 ersetzen, die entsprechende Schliessung machen. Der Punkt $A_4(0,0,0)$, welcher das Homologiezentrum ist, ist in diesem Falle einer der Brennpunkte des Konikoides.

158. Die Transformationsformeln werden dann

$$U'=2p'(l'+p'u)/(\Sigma l'^2-p'^2\Sigma u^2),$$
$$V'=2p'(m'+p'v)/(\Sigma l'^2-p'^2\Sigma v^2),$$
$$W'=2p'(n'+p'w)/(\Sigma l'^2-p'^2\Sigma w^2).$$

(viii)

159. Ist der Kegel durch

$$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$$

gegeben, dann koennen wir, indem wir c^2 in 155, 156 durch $-c^2$ ersetzen, die entsprechende Schliessung machen.

160. Die Transformationsformeln werden dann

$$U'=2p'a^2(l'+p'u')/\{(a^2l'^2+b^2m'^2-c^2n'^2)-p'^2(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2)\},$$
$$V'=2p'b^2(m'+p'v')/\{(a^2l'^2+b^2m'^2-c^2n'^2)-p'^2(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2)\},$$
$$W'=2p'c^2(n'+p'w')/\{(a^2l'^2+b^2m'^2-c^2n'^2)-p'^2(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2)\}.$$

(ix)

161. Ist der Kegel (A_4, k_1^2) durch

$$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$$

gegeben und die Ebene von k_1^2 uneigentlich, so wird das Konikoid

$$(a^2l^2+b^2m^2-c^2n^2)(x^2/a^2+y_2/b^2-z^2/c^2)-(lx+my+nz-p)^2=0,$$

d.h.

$$p(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2)+2(a^2lu+b^2mv-c^2nw)=0$$

ein eigentlicher Pseudopunkt sein. Dieses Konikoid ist entweder ein elliptisches Paraboloid oder ein Kegel oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem $lmnp>0$, oder $=0$, oder <0 ist. In der Tat ist die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} l-\lambda/la^2 & m & n & -p \\ l & m-\lambda/mb^2 & n & -p \\ l & m & n+\lambda/nc^2 & -p \\ l & m & n & -p \end{vmatrix} = -\lambda^3 p/(lmn\, a^2b^2c^2),$$

worin $\lambda\equiv l^2a^2+m^2b^2-n^2c^2$ ist, und ist

$$\begin{vmatrix} l-\lambda/la^2 & m & n \\ l & m-\lambda/mb^2 & n \\ l & m & n+\lambda/nc^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

162. Die Transformationsformeln sind

$$U'=-2a^2u/(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2),$$
$$V'=-2b^2v/(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2),$$
$$W'=2c^2w/(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2);$$

und die Gleichung des genannten Pseudopunktes ist dann

$$lU+mV+nW-p=0.$$

(x)

163. Ist der Kegel (A_4, k_1^2) durch

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$$

gegeben, so dass er ein imaginaerer ist, und die Ebene von k_1^2 uneigentlich, dann wird das Konikoid

$$(a^2l+b^2m^2+c^2n^2)(x^2/a^2+y^2/b^2+x^2/c^2)-(lx+my+nz-p)^2=0,$$

d.h.

$$p(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)+2(a^2lu+b^2mv+c^2nw)=0,$$

ein eigentlicher Pseudopunkt sein. Dieses Konikoid ist entweder ein elliptisches Paraboloid oder ein Kegel oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem $lmnp<0$, oder $=0$, oder >0 ist, wie ganz frueher.

164. Die Transformationsformeln sind

$$U'=-2a^2u/(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2),$$

$$V' = -2b^2 v/(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2),$$
$$W' = -2c^2w/(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2);$$

und die Gleichung des genannten Pseudopunktes ist dann

$$lU + mV + nW - p = 0.$$

(xi)

165. Ist der Kegel (A_4, k_1^2) durch $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ gegeben, was den uneigentlichen Kugelkreis darstellt, und die Ebene von k_1^2 uneigentlich, so ist das Konikoid

$$x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz - p)^2 = 0$$

d.h.

$$p(u^2 + v^2 + w^2) + 2(lu + mv + nw) = 0$$

ein eigentlicher Pseudopunkt, vorausgesetzt, dass $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist. Das Homologiezentrum A_4 ist in diesem Falle offenbar einer der Brennpunkte. Die Flaeche ist entweder ein elliptisches Paraboloid oder ein Kegel oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem $l\,m\,n\,p < 0$, oder $= 0$, oder > 0 ist.

166. Die Transformationsformeln werden dann

$$U' = -2u/(u^2 + v^2 + w^2),$$
$$V' = -2v/(u^2 + v^2 + w^2),$$
$$W' = -2w/(u^2 + v^2 + w^2),$$

so dass die Gleichung des genannten Pseudopunktes

$$lU + mV + nW - p = 0$$

wird. Also ist diese Geometrie zu (iii) korrelativ.

(xii)

167. Ist der Kegel (A_4, k_1^2) durch $y^2 - 4dzx = 0$ gegeben, was eine unendlich ferne Parabel darstellt, so wird das Konikoid

$$(m^2d - ln)(y^2 - 4dxz) - d(lx + my + nz - p)^2 = 0$$

d.h.

$$p(dv^2 - uw) + nu - 2mv + lw = 0$$

ein eigentlicher Pseudopunkt sein. Dieses Konikoid ist entweder ein elliptisches Paraboloid oder ein Kegel oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem $(m^2d - lu)^3/d < 0$, oder $= 0$, oder > 0 ist. In der

Tat wird die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} l^2 & lm & ln+2(m^2d-ln) & -lp \\ lm & m^2-(m^2d-ln)/d & mn & -mp \\ lm+2(m^2d-ln) & mn & n^2 & -np \\ -lp & -pm & -np & p^2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv 4p^2(m^2d-ln)^3/d,$$

und ist

$$\begin{vmatrix} l^2 & lm & ln+2(m^2d-ln) \\ lm & m^2-(m^2d-ln)/d & mn \\ lm+2(m^2d-ln) & mn & n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

168. Die Transformationsformeln sind

$$U' = u/(dv^2-uw),$$
$$V' = -2v/(dv^2-uw),$$
$$W' = w/(dv^2-uw);$$

und die Gleichung des genannten Pseudopunktes wird

$$lU+mV+nW-p=0.$$

KAP VII.

Anwendungen.

XXII.

Allgemeine Anwendungsmethode.

169. Wir haben in den vorigen Paragraphen zahlreiche Anwendungen der Pseudogeometrien gamacht. Wir wollen nun die allgemeine Anwendungsmethode betrachten.

170. Es besteht dann zwischen jeden zwei projektiven Geometrien eine eineindeutige Beziehung, und in jeder projektiven Geometrie gilt das Dualitaetsprinzip. Sind daher irgend n pseudoprojektive Geometrien gegeben, und haben wir fuer eine Figur in einer der $(n+1)$ Geometrie einen Satz aus dem Gebiete der *projektiven Geometrie* bewiesen, so koennen wir hieraus ohne weiteres $2(n+1)$ neue Saetze formulieren.

Verfaehrt man weiter auf folgende Weisen, so koennte man aus einem *projektiven Satze* unendlich viele neue Saetz ableiten, die freilich immer komplizierter werden und sich auf immer hoeher Figuren beziehen:

1°. Ein Satz sei in einer Geometrie gegeben.	1°. Ein Satz sei in einer Geometrie gegeben.
2°. Wir interpretieren diesen Satz durch eine andere Geometrie und erhalten einen neuen Satz.	2°. Wir uebersetzen diesen Satz in einen anderen; und
3°. Wir uebersetzen diesen neuen Satz in die urspruengliche Geometrie zurueck, und	3°. Wir interpretieren diesen Satz urspruenglich-geometrisch, so erhalten wir einen neuen Satz; und
4°. mit diesem Satze fahren wir ganz wie in 1° fort.	4°. mit diesem neuen Satze fahren wir ganz wie in 1° fort.

Im allgemeinen kommen glaenzendere Ergebnisse dann hervor, wenn die Gebilde in den beiden Geometrien dieselbe Namen haben.

XXIII.

Einige projektive Saetze ueber Kegelschnitte.

Einige Saezte ueber harmonische Eigenschaften.

171. Ausgangssatz (von Townsend): Beruehren sich irgend zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 in den Punkten A_1 und A_2 und schneiden die Tangenten [AA′], [BB′], [CC′] und [DD′] an den Punkten A″, B″, C″ bez. D″ des Kegelschnittes K_2 den Kegelschnitt K_1 in den Punkten A, A′; B, B′; C, C′; bez. D, D′; dann sind

$$(AB, CD)=(A''B'', C''D'')=(A'B', C'D').$$

Ist A_2 irgend ein auf den Kegelschnitten nicht liegender Punkt, so ergiebt sich der

Satz: *Beruehren sich irgend zwei Kegelschnitte* K_1 *und* K_2 *in den Punkten* A_1 *und* A_2, *und schneiden die Kegelschnitte* $(A_1A_2A_3A''A'')$, $(A_1A_2A_3B''B'')$, $(A_1A_2A_3C''C'')$, $(A_1A_2A_3D''D'')$, *welche den Kegelschnitt* K_2 *in den Punkten* A″, B″, C″ *bez.* D″ *beruehren, den Kegelschnitt* K_1 *in den Punkten* A, A; B, B′; C, C′; *bez.* D, D′; *dann sind*

$$(AB, CD)=(A''B'', C''D'')=(A'B', C'D').$$

172. Ausgangssatz: Die Umkehrung des obigen Ausgangssatzes.

Schliessungssatz: *Sind* A_1, A_2, A, B, C, D *etc. und* A_1, A_2, A′, B′, C′, D′ *etc. zwei Systeme von Punkten auf einem Kegelschnitt* K_1 *derart, dass* $(A_1A_2ABCD......) \barwedge (A_1A_2A'B'C'D'......)$ *ist, und* A_3 *irgend ein auf* K_1 *nicht liegender Punkt, dann umhuellen die Kegelschnitte* $(A_1A_2A_3AA')$, $(A_1A_2A_3BB')$, $(A_1A_2A_3CC')$,......*einen Kegelschnitt* (*etwa* K_2).

173. Ausgangssatz: Beruehren sich irgend zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 in den Punkten A_1 und A_2 und beruehrt eine Gerade [BB′] den Kegelschnitt K_1 im Punkte B und schneidet sie die Sehne $[A_1A_2]$ im Punkte B′ und den Kegelschnitt K_2 in C, C′; dann bilden die vier Punkte C′, B, C, B′ eine harmonische Gruppe.

Schliessungssatz: *Beruehren sich irgend drei Kegelschnitte* K_1, K_2 *und* K_3 *in den Punkten* A_1, A_2, *und ist* A_3 *irgend ein Punkt auf* K_3: *beruehrt ein vierte Kegelschnitt* K_4, *welcher durch* A_1, A_2, A_3 *hindurchgeht, den Kegelschnitt* K_1 *im Punkte* B *und schneidet* K_4, K_2 *in den Punkten* C *bez.* C′ *und* K_3 *im Punkte* B′; *dann bilben die vier Punkte* (CB′C′B) *eine harmonische Gruppe.*

174. Ausgangssatz: Jede durch einen Doppelpunkt einer Kurve vierter Ordnung hindurchgehende Gerade ist durch die Kurve und ihre kubische Polare harmonisch geschnitten.

Ist insbesondere die Kurve eine rationale Kurve vierter Ordnung, welche drei Doppelpunkte besitzt, so ergiebt sich der

Satz: *Sind* K_1(PBDEC), K_2(A_1BDEC) *irgend zwei Kegelschnitte, derart, dass der Punkt* A_1 *der Pol der Durchschnittsehne* [BC] *ist, so ist jede durch* A_1 *hindurchgehende Gerade durch die beiden Kegelschnitte und die Durchschnittsehne* [DE] *harmonisch getrennt.*

Beweis. Es seien A_2 und A_3 irgend zwei von D, E verschiedene Punkte auf [DE]; man nehme A_1, A_2, A_3 fuer die Fundamentalpunkte. Dann ist die Gleichung von K_1 von der Form

$$f(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_2x_3 + ex_3x_1 + fx_1x_2 = 0.$$

Die Gleichung von [BC] ist daher

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \equiv 2ax_1 + ex_3 + fx_2 = 0.$$

Es sei nun

$$\varphi(x) \equiv b'x_2^2 + c'x_3^2 + d'x_2x_3 + e'x_3x_1 + f'x_1x_2 = 0$$

die Gleichung von K_2. Dann

$$f(x) - \varphi(x) \equiv ax_1^2 + (b-b')x_2^2 + (c-c')x_3^2 + (d-d')x_2x_3 + (e-e')x_3x_1 + (f-f')x_1x_2 = 0.$$

Es soll jetzt $\varphi(x)$ so bestimmt werden, dass $f(x)-\varphi(x)$ die Form

$$kx_1(2ax_1+ex_3+fx_2)$$

annimmt. Hierfuer muss erstens

$$(b-b')x_2^2+(c-c')x_3^2+(d-d')x_2x_3=0$$

sein, so dass

$$b=b', \quad c=c', \quad d=d'.$$

$$\therefore \quad ax_1^2+(e-e')x_3x_1+(f-f')x_1x_2=kx_1(2ax_1+ex_3+fx_2)$$

oder

$$ax_1+(e-e')x_3+(f-f')x_2=k(2ax_1+ex_3+fx_2).$$

ist.

$$\therefore \quad a=2ak, \quad e-e'=ke, \quad f-f'=kf,$$

$$\therefore \quad k=1/2.$$

$$e'=e/2, \quad f'=f/2.$$

$$\therefore \quad \varphi(x)=bx_2^2+cx_3^2+dx_2x_3+e/2.x_3x_1+f/2.x_1x_2=0.$$

Nun wird $f(x)=0$

$$F(X)\equiv aX_2^2X_3^2\times bX_3^2X_1^2+cX_1^2X_2^2+dX_2X_3X_1^2+eX_3X_1X_2^2 +fX_1X_2X_3^2=0,$$

waehrend $\varphi(x)=0$ wird:

$$2bX_3^2X_1+2cX_2^2X_1+2dX_2X_3X_1+eX_2^2X_3+fX_2X_3^2=0,$$

welche die pseudokubische Polare vom Pseudopunkte $[A_2A_3]$ ist. Hieraus folgt unsre Behauptung.

Einige die Umkehrungen in sich enthaltenden Saetze.

175. *Der Pascal'sche Satz und die drei speciellen Faelle desselben enthalten ihre Umkehrungen in sich.*

In der Tat, nimmt man irgend drei der sechs Kurvenpunkte fuer das Fundamentaldreieck an, so wird der Kegelschnitt die Pseudo-Pascal'sche Gerade, und die Pascal'sche Gerade der Pseudokegelschnitt.

Der Brianchon'sche Satz und die drei speciellen Faelle desselben enthalten ihre Umkehrungen in sich.

In der Tat, nimmt man irgend drei der sechs Tangenten fuer das Fundamentaldreieck an, so wird der Kegelschnitt der Pseudo-Brianchon'sche Punkt, und der Brianchon'sche Punkt der Pseudokegelschnitt.

Die nachstehenden Figuren (S. Fig. 1.—Fig. 4'.) zeigen die Brianchon'schen Konfigurationen. Die rechts stehenden sind die Pseudokonfigurationen, und die links stehenden die gewoehnlichen. Die Buchstaben K bez. P stellen in den links stehenden Figuren die gewoehnlichen Kegelschnitte bez. die gewoehnlichen Punkte und in den rechts stehenden die Pseudokegelschnitte bez. die Pseudopunkte dar.

176. *Der Existenzsatz der Polare (oder des Pols) eines Punktes (oder einer Geraden) in Bezug auf ein Dreieck enthaelt die Umkehrung in sich.*

In der Tat sind er und der dritte specielle Fall des Pascal'schen Satzes (sowie des Brianchon'schen Satzes), welcher die Umkehrung in sich enthaelt, auseinander ableitbar.

In den nachstehenden Figuren (S. Fig. 5.–Fig. 6′.) zeigen die rechts stehenden die Pseudokonfigurationen, und die links stehenden die gewoehnlichen. Die Buchstaben l bez. L stellen in den links stehenden Figuren die gewoehnliche Polare bez. den gewoehnlichen Pol und in den rechts stehenden die Pseudopolare bez. den Pseudopol dar.

Einige Saetze ueber Kegelschnittsysteme.

177. Ausgangssatz: Wenn ingend zwei Kegelschnitte mit einem dritten je eine Doppelberuehrung haben, dann gehen die Beruehrungssehnen und ein Paar von den sechs Durchschnittsehnen der letzteren Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt hindurch und bilden eine harmonische Gruppe.

Nimmt man irgend zwei (A, B) der vier Beruehrungspunkte A, A′, B, B′ und irgend einen (C) der vier Basispunkte C, C′, D, D′ des Kegelschnittsbueschels fuer das Fundamentaldreieck an, so ergiebt sich der

Satz: *Sind* (CC′DD′A) *uud* (CBC′DD′) *irgend zwei Kegelschnitte eines Kegelschnittsbueschels, beruehrt ein Kegelschnitt sie in A, A′ bez. B, B′; dann gehen die drei Kegelschnitte* (ABCC′D′), (AABCA′), (ABBCB′) *und die Geraden* [CD] *durch einen bestimmten Punkt* P *hindurch und bilden die vier durch* P *hindurchgehenden Tangenten eine harmonische Gruppe, wobei* AA *und* BB *die an* A *bez.* B *gelegenen Tangentenelement bedeuten.*

178. Nimmt man fuer das Pseudokegelschnittsbueschel ein gewoehnliches Geradenbueschel und fuer den dritten Pseudokegelschnitt ein Pseudogeradenpaar an, so ergiebt sich der

Satz: *Es seien* [DAA′] *und* [DBB′] *die gemeinsamen Tangenten an den Kegelschnitten* ($A_1A_2A_3BA$) *und* ($A_1A_2A_3B'A'$)*; dann haben die Kegelschnitte* ($A_1A_2A_3BB'$) *und* ($A_1A_2A_3AA'$) *die Tangente* [DA_2] *im Punkte* A_2 *gemein. Die Durchschnittspunkte von* ($A_1A_2A_3BB'$), ($A_1A_2A_3$ AA'), [DA_2] *und* [A_1A_2] (*od.* [A_3A_2]) *mit einer durch* A_3 (*od.* A_1) *hindurchgehenden Geraden bilden eine harmonische Gruppe.*

179. Ausgangassatz: Wenn irgend drei Kegelschnitte mit einem vierten je eine Doppelberuehrung haben dann gehen von den sechs Verbindungssehnen der Durchschnittspunkte je drei durch denselben Punkt hindurch.

Figuren fuer Art. 175.

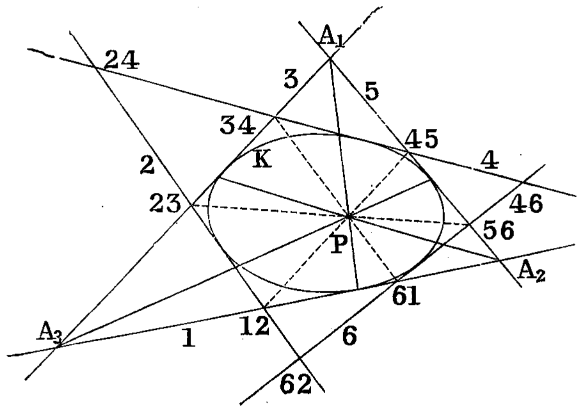


Fig. 1.

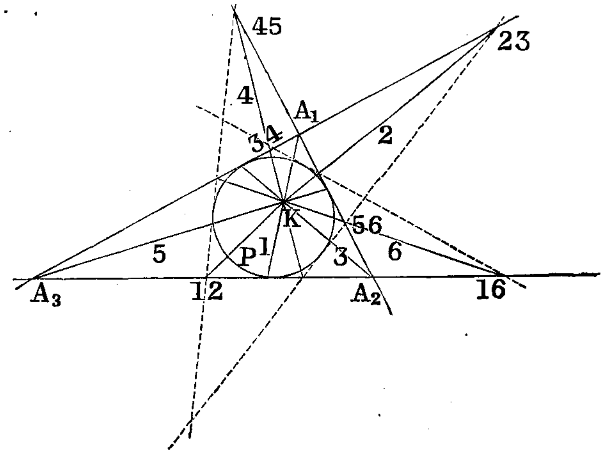


Fig. 1'.

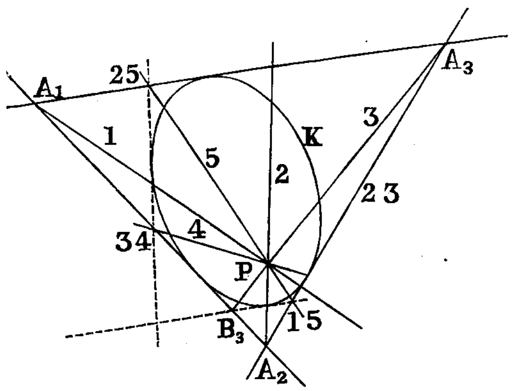


Fig. 2.

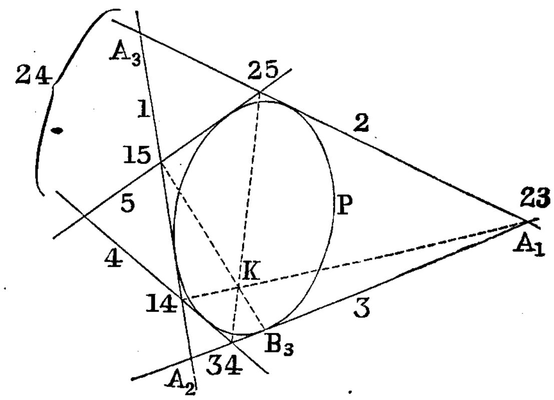


Fig. 2'.

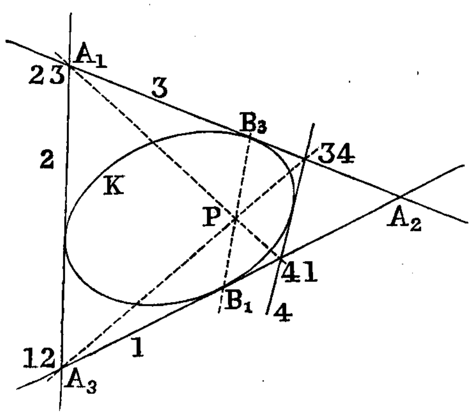


Fig. 3.

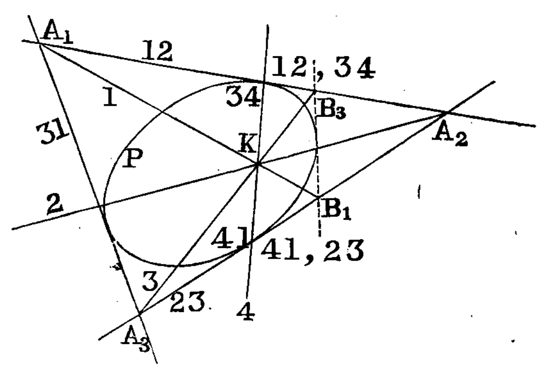


Fig. 3'.

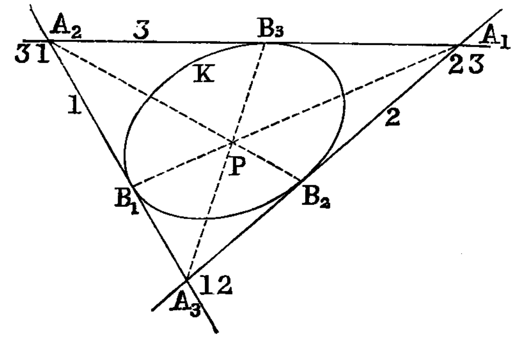


Fig. 4.

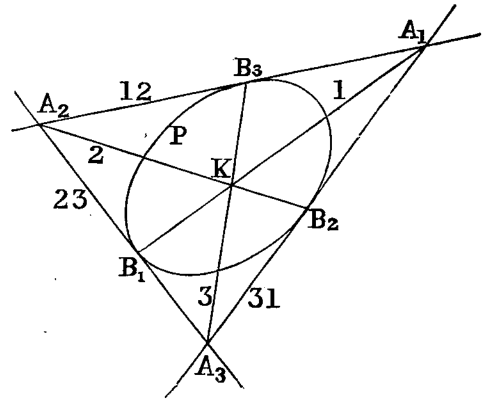


Fig. 4′.

Figuren fuer Art. 176.

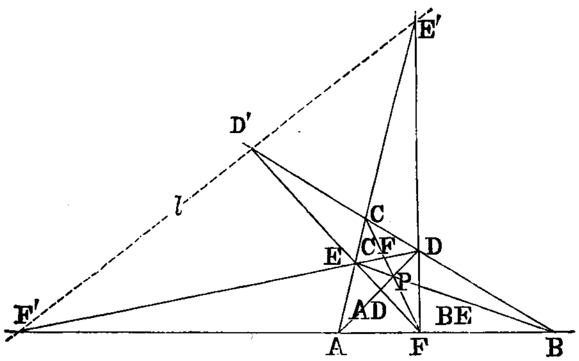


Fig. 5.

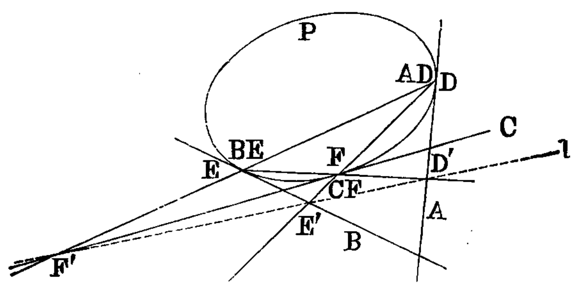


Fig. 5′.

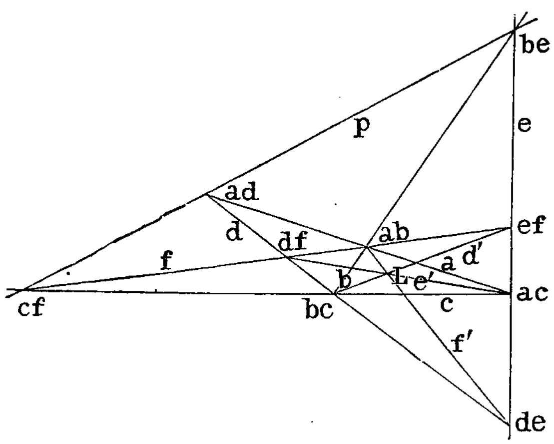


Fig. 6.

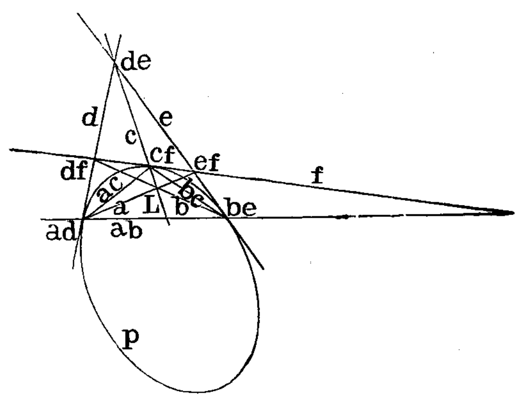


Fig. 6′.

Bestehen die dritten und vierten Kegelschnitte je aus einem Geradenpaar $[B_3B_1]$, $[B_3B_1']$; $[B_3A_2']$, $[B_3A_2]$, und sind B_3, A_3, A_3' fuer das Fundamentaldreieck angenommen, wo A_3, A_3' irgend zwei der vier Durchschnittspunkte $A_3, A_3' C_3, C_3'$ der ersten und zweiten Kegelschnitte sind, dann ergiebt sich der

Satz: *Beruehren irgend zwei Kegelschnitte* $(A_2C_3A_3'B_1A_2'C_3'A_3B_1')$ *und* $(A_3C_1'C_3A_1B_2A_3'C_1C_3'A_1'B_2')$ *die Geraden* $[B_3B_1B_2]$, $[B_3B_2'B_1']$ *in den Punkten* B_1, B_1' *bez.* B_2, B_2', *und schneiden irgend zwei Geraden* $[B_3A_2'C_1C_2A_1]$, $[B_3A_1'C_2'C_1'A_2]$ *den Kegelschnitt* (B_1B_1') *in* A_2', C_2 *bez.* C_2', A_2 *und den Kegelschnitt* (B_2B_2') *in* C_1, A_1 *bez.* C_1', A_1'; *dann gehen die drei Kegelschnitte* $(B_3A_3A_3'A_2A_2')$, $(B_3A_3A_3'C_1C_1')$ *und* $(B_3A_3A_3'C_3C_3')$ *durch einen und denselben Punkt hindurch.*

180. Nimmt man die Punkte A_3, B_3, C_3' fuer die Fundamentalpunkte an, so ergiebt sich der

Satz: *Beruehren irgend zwei Kegelschnitte* $(A_2A_2'B_1B_1'C_3C_3'A_3A_3'C_2C_2')$ *und* $(A_1A_1'B_2B_2'C_3C_3'A_3A_3'C_1C_1')$ *das Geradenpaar* $[B_3B_1B_2]$, $[B_3B_2'B_1']$ *in den Punkten* B_1, B_1' *bez.* B_2, B_2', *und schneiden die Geraden* $[B_3A_2'C_1C_2A_1]$, $[B_3A_1'C_2'C_1'A_2]$ *den Kegelschnitt* (B_1B_1') *in* A_2', C_2 *bez.* C_2', A_2 *und den Kegelschnitt* (B_2B_2') *in* C_1, A_1 *bez.* C_1', A_1'; *dann gehen die zwei Kegelschnitte* $(A_3B_3C_3'A_2A_2')$, $(A_3B_3C_3'C_1C_1')$ *und die Gerade* $[C_3C_3']$ *durch einen und denselben Punkt hindurch.*

181. Aus diesem Satze ergiebt sich auch der

Satz: *Es beruehren irgend zwei Geraden* $[C_2A_3B_1A_2'C_2'B_1'A_2]$ *und* $[A_1A_3B_2C_1A_1'B_2'C_1']$ *die Kegelschnitte* $(B_1BAC_1B_3B_2)$ *und* $(B_1'ACB_2'B_3B)$ *in den Punkten* B_1, B_2 *bez.* B_1', B_2'. *Es seien* $(C_2'BB_3A_1'C_1'CAA_2)$ *und* $(C_2C_1B_3CA_1A_2'BA)$ *irgend zwei Kegelschnitte. Dann beruehren die Kegelschnitte* (C_1BACC_1') *und* (A_2ACBA_2') *sich im Punkte* A.

182. Ausgangssatz: Es haben irgend drei Kegelschnitte 1, 2, 3 zwei Punkte P, Q gemein; es seien S_{ij}, S_{ij}' die Durchschnittspunkte der beiden Kegelschnitte i und j. Dann gehen die drei Sehnen $[S_{12}\ S_{12}']$, $[S_{23}\ S_{23}']$, $[S_{31}\ S_{31}']$ durch einen und denselben Punkt R hindurch.

Nimmt man P, Q, $([S_{12}S_{12}'], [S_{13}S_{13}'])$ fuer die Fundamentalpunkte an, *so stimmen diese Saetze in den gewoehnlichen und pseudo- Geometrien uebereín.*

183. Nimmt man P, Q und irgend einen auf $[S_{ij}S_{ij}']$ gelegenen und nicht auf den Kegelschnitten gelegenen und von R verschiedenen Punkt T fuer die Fundamentalpunkte an, so ergiebt sich der

Satz: *Es seien irgend drei Kegelschnitte* $(PQS_{12}S_{12}'S_{13}S_{13}')$, $(PQS_{21}S_{21}'S_{23}S_{23}')$ *und* $(PQS_{31}S_{31}'S_{32}S_{32}')$ *gegeben, welche alle die Pnnkte* P, Q *gemein haben, dann schneiden sich die zwei Kegelschnitte* ($PQTS_{ki}S_{ki}'$), ($PQTS_{kj}S_{kj}'$) *auf der Geraden* [$S_{ij}S_{ij}'$], *wenn der Punkt* T *auf* [$S_{ij}S_{ij}'$] *genommen ist.*

184. Nimmt man P, Q, und irgend einen auf keinem der Kegelschnitte und auf keiner der Durchschnittsehnen gelegenen Punkt T fuer die Fuudamentalpunkte an, so ergiebt sich der

Satz: *Es seien irgend drei Kegelschnitte* ($PQS_{12}S_{12}'S_{13}S_{13}'$), ($PQS_{21}S_{21}'S_{23}S_{23}'$) *und* ($PQS_{31}S_{31}'S_{32}S_{32}'$) *gegeben, welche alle die Punkte* P, Q *gemein haben, dann schneiden sich die drei Kegelschnitte* ($PQTS_{12}S_{12}'$), ($PQTS_{23}S_{23}'$) *und* ($PQTS_{31}S_{31}'$) *in irgend einem von* P, Q, T *verschiedenen Punkte.*

185. Artet der Kegelschnitt 3 in dem Ausgangssatz in ein Geradenpaar aus, so ergiebt sich der

Satz: *Es seien irgend zwei Kegelschnitte* ($PQS_{12}S_{13}S_{12}'S_{13}'$), ($PQS_{12}S_{23}S_{12}'S_{23}'$) *gegeben; es seien* [$PS_{13}S_{23}'$], [$QS_{23}S_{13}'$] *irgend zwei durch* P *bez.* Q *hindurchgehende Gerade; dann schneiden sich die drei Kegelschnitte* ($PQTS_{12}S_{12}'$), ($PQTS_{13}S_{13}'$) *und* ($PQTS_{23}S_{23}'$) *in einem Punkte, wenn* T *auf keinem der Kegelschnitte und auf keiner der Geraden angenommen ist.*

XXIV.

Einige projektive Saetze ueber Kurven dritter Ordnung.

Harmonische Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung.

186. Ausgangssatz: Jede durch einen Wendepunkt einer Kurve dritter Ordnung hindurchgehende Gerade ist durch die Kurve und die harmonische Polare harmonisch getrennt.

Dieser Satz stimmt in den gewoehnlichen und pseudo- Geometrien wesentlich ueberein.

In der Tat,

$$f \equiv (mx_2+nx_3)x_1^2+x_2x_3(\mu x_2+\nu x_3)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv 2(mx_2+nx_3)x_1;$$

$$F \equiv (mX_3+nX_2)X_2X_3+(\mu X_3+\nu X_2)X_1^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} \equiv 2(\mu X_3+\nu X_2)X_1.$$

$$x_1=0:[A_2A_3]:X_2=0,\ X_3=0,$$

$$X_1=0:A_1:x_2=0,\ x_3=0.$$

187. Satz: *Die pseudokonische Polare von dem Pseudopunkte (welcher eine Beruehrungssehne der von einem Kurvenpunkte* A *aus an der Pseudokurve dritter Ordnung gezogenen Tangente ist) in Bezug auf die Pseudokurve dritter Ordnung, ist die Beruehrungssehne des andern Paares der vier vom* A *aus gezogenen Tangenten; und die beiden Beruehrungssehnen schneiden sich auf der Kurve.*

Beweis. Es sei A ein beliebiger Punkt auf der Kurve dritter Ordnung, und [AB], [AC] seien die Tangenten. Nimmt man A, B, C fuer die Fundamentalpunkte, so wird die Gleichung der Kurve dritter Ordnung:

$$f(x)\equiv ax_1^2x_2+bx_1^2x_3+dx_2^2x_3+fx_3^2x_2+gx_1x_2x_3=0$$

oder

$$F(X)\equiv aX_3^2X_2+bX_2^2X_3+dX_1^2X_3+fX_1^2X_2+gX_1X_2K_3=0.$$

Die pseudokonische Polare des Pseudowendepunktes (BC) ist

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}=2dX_1X_3+2fX_1X_2+gX_2X_3=0,$$

welche eine gewoehnliche Gerade

$$2dx_2+2fx_3+gx_1=0$$

ist.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2ax_1x_2+2bx_1x_3+gx_2x_3=0,$$

$$2f-x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2x_3(2dx_2+2fx_3+gx_1)=0.$$

Hiermit ist unsre Behauptung bewiesen.

188. Uebersetzt man den Ausgangssatz 187 in die Pseudogeometrie und betrachtet man die Gestalt der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}\equiv 2dX_1X_2+2fX_1X_2+gX_2X_3=0,$$

so ergiebt sich der

Satz: *Es seien* [AB], [AC], [AB′], [AC′] *von einem Kurvenpunkte* A *einer Kurve dritter Ordnung gezogene Tangenten, welche in den Punkten* B, C, B′ *bez.* C′ *die Kurve beruehren; es schneide eine beliebige durch* A *hindurchgehende Gerade die Kurve dritter Ordnung in den Punkten* P_1 *und* P_2 *und die Geraden* [BC] *und* [B′C′] *in* E *bez.* E′; *dann ist* (P_1P_2, EE′) *eine harmonische Gruppe.*

Derselbe Satz laesst sich aus dem folgenden Ausgangssatze herleiten:

Satz: Jede durch einen Kurvenpunkt einer Kurve dritter Ordnung gelegte Sehne schneidet die Kurve und die konische Polare des Kurvenpunktes in vier harmonischen Punkten.

189. Satz. *Sind* [AB], [AC], [AB′] *und* [AC′] *vier von einem*

Kurvenpunkte A *einer Kurve dritter Ordnung gezogene Tangenten, dann bilden* [BC], [B′C′], [DA], [DT] *eine harmonische Gruppe, wobei* D ≡ ([BC], [B′C′]) *und* DT *die Tangente an* D *der Kurve ist.*

Beweis. $f(x) \equiv ax_1^2x_2 + bx_1^2x_3 + dx_2^2x_3 + fx_3^2x_2 + gx_1x_2x_3 = 0$: die Kurve.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}: &\quad x_1 : x_2 : x_3 = 0 : -f : d. \\
[\mathrm{B\,C}]: &\quad S_1 \equiv gx_1 = 0, \\
[\mathrm{B'C'}]: &\quad S_2 \equiv gx_1 + 2dx_2 + 2fx_3 = 0, \\
[\mathrm{A\,D}]: &\quad S_3 \equiv 2dx_2 + 2fx_3 = 0, \\
[\mathrm{D\,T}]: &\quad S_4 \equiv 2gx_1 + 2dx_2 + 2fx_3 = 0. \\
&\quad S_3 \equiv S_2 - S_1 = 0, \\
&\quad S_4 \equiv S_2 + S_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Also bilden $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$ eine harmonische Gruppe.

Zusatz: *Jede durch einen Wendepunkt einer Kurve dritter Ordnung hindurchgehende Gerade ist durch die Kurve und die harmonische Polare harmonisch getrennt.*

In der Tat faellt in diesem Falle [DT] mit [AD] zusammen.

190. *Die folgenden zwei Saetze ergeben sich aus einander:*

Jede durch einen Kurvenpunkt einer Kurve dritter Ordnung hindurchgehende Gerade ist durch die Kurve und die konische Polare harmonisch getrennt.

Sind vier Tangenten [AB], [AC], [AB′], [AC′] *an einer Kurve dritter Ordnung durch einen Kurvenpunkt* A *gezogen, und schneidet eine durch* A *hindurchgehende Gerade die Kurve in den Punkten* P, Q *und die Sehnen* [BC], [B′C′] *in den Punkten* D, E; *dann ist* (PQ, DE) *eine harmonische Gruppe.*

In der Tat kann die Pseudoberuehrungssehne [B′C′] als die konische Polare des Punktes A angesehen werden.

191. Satz: *Es seien* A_1, A_2, A_3 *drei beliebige nicht kollineare Punkte auf einer Kurve dritter Ordnung;* [A_1B], [A_1C], [A_1B′], [A_1C′] *seien die vier von* A_1 *an der Kurve gezogenen Tangenten; es schneide eine beliebige Gerade* [A_1P] *die Kurve in* A_1, P, Q; *es schneide* [A_1P] *die Kegelschnitte* ($A_1A_2A_3$BC) *und* ($A_1A_2A_3$B′C′) *in den Punkten* D *bez.* E; *dann ist* (PQ, DE) *eine harmonische Gruppe.*

Dieser Satz folgt aus dem obigen rechtseitigen Satze.

Einige weitere Saetze ueber Kurven dritter Ordnung.

192. Ausgangssatz: Es sei A ein Wendepunkt auf einer Kurve

dritter Ordnung, und es schneiden zwei Geraden [AE], [AE′] die Kurve in den Punkten E, F bez. E′, F′. Dann ist die Gerade [([EF′], [E′F])([EE′], [FF′])] die harmonische Polare des Punktes A.

Hieraus ergiebt sich der

Satz: *Es sei* A *ein Wendepunkt einer Kurve dritter Ordnung, und es seien die drei Tangenten* [AB], [AC], [AD] *an den Punkten* B, C *bez.* D *gezogen; es schneiden zwei beliebige Sehnen* [AEF], [AE′F′] *die Kurve in den Punkten* E, F *bez.* E′, F′; *dann schneiden sich die Kegelschnittenpaare* (ABCEF′), (ABCE′F); (ABCEE′), (ABCFF′) *je auf der Geraden* [AD].

Hierbei sind die Fundamentalpunkte A, B, C.

193. Ausgangssatz: Die Tangenten in irgend zwei Punkten einer Kurve dritter Ordnung schneiden sich auf der harmonischen Polare des dritten Wendepunktes, welcher auf der Verbindungsgeraden der beiden vorigen Wendepunkte liegt.

Hieraus ergiebt sich der

Satz: *Es seien* A, E, F *drei* (*kollineare*) *Wendepunkte auf einer Kurve dritter Ordnung; es seien* [AB], [AC], [AD] *drei Tangenten in den kollinearen Punkten* B, C *bez.* D; *dann schneiden sich die zwei Kegelschnitte* (ABCEE), (ABCFF) *auf der Tangente* [DA], *wobei* EE *und* FF *je ein zusammenfallendes Punktepaar bedeuten.*

194. Ausgangssatz: Sind zwei Tangenten von einem Punkte A auf einer Kurve dritter Ordnung an der Kurve gezogen, so schneiden die Tangente an A und die Tangente an dem Punkte, in welchem die Beruehrungssehne die Kurve noch einmal schneidet, sich auf einem Kurvenpunkte.

Hieraus ergiebt sich der

Satz: *Sind zwei Tangenten* [AB], [AC] *an den Punkten* B *bez.* C *der Kurve dritter Ordnung durch einen Kurvenpunkt* A *gezogen, und schneidet die Gerade* [BC] *die Kurve dritter Ordnung im Punkte* D, *dann schneiden die Gerade* [DA] *und der Kegelschnitt* (AAABC), *welcher mit der Kurve im Punkte* A *eine Doppelberuehrung hat, sich in einem Kurvenpunkte* (*etwa* F).

Beweis. Die Kurve dritter Ordnung sei durch

$$X_1^2(mX_3+nX_2)+X_2X_3(lX_1+\mu X_3+\nu X_2)=0,$$

d.h. durch

$$x_2x_3(lx_1+mx_2+nx_3)+x_1^2(\mu x_2+\nu x_3)=0$$

gegeben; dann ist AD durch

$$mX_3+nX_2=0$$

gegeben, und der Kegelschnitt (AAABC) durch

$$lX_1+\mu X_3+\nu X_2=0.$$

Diese Gleichungen zeigen unsre Behauptung.

195. Ausgangssatz: Schneidet eine Sehne BDCF, welche durch einen Punkt B auf einer Kurve dritter Ordnung hindurchgeht, die Kurve noch zweimal in den Punkten D und C und die konische Polare von B in F, dann gehen die Tangenten an D und C und die Tangente zur konische polare an F durch einen und denselben Punkt hindurch.

Hieraus ergiebt sich der

Satz: *Es seien* $[A_1M]$, $[A_1N]$, $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$ *irgend vier aus einem Kurvenpunkt* A_1 *einer Kurve dritter Ordnung an der Kurve gezogene Tangenten, welche die Kurve in den Punkten* M, N, A_2 *bez.* A_3 *beruehren; es sei* $[A_1CFD]$ *eine beliebige Gerade, welche die Kurve in den Punkten* C, D *und die Beruehrungssehne* [MN] *im Punkte* F *schneidet; dann schneiden die zwei Kegelschnitte* $(A_1A_2A_3CC)$, $(A_1A_2A_3DD)$, *die die Kurve in den Punkten* C *bez.* D *beruehren, und der Kegelschnitt* $(A_1A_2A_3FMN)$ *sich in einem Punkte.*

Hierbei sind die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3.

196. Satz: *Der folgende Satz enthaelt seine Umkehrung in sich: Geht ein beliebiger Kegelschnitt durch vier feste Punkte auf einer Kurve dritter Ordnung, so geht die durch die gegebenen Punkte nicht hindurchgehende Durchschnittsehne durch einen festen Punkt auf der Kurve hindurch.*

In der Tat ist der entsprechende Pseudosatz, in die gewoehnliche Geometrie uebersetzt, folgendes, wenn der Pseudokegelschnitt eine gewoehnliche Gerade ist und irgend drei der vier festen Punkte als die Fundamentalpunkte angenommen sind: *Geht eine durch einen festen Punkt auf einer Kurve dritter Ordnung hindurchgehende beliebige Gerade durch noch zwei andere Kurvenpunkte* L, M*; dann geht jeder durch* L, M *und noch drei andere Kurvenpunkte* A, B, C *hindurchgehender Kegelschnitt durch einen anderen festen Kurvenpunkt* (*ewta* D) *hindurch.*

Ist der Pseudokegelschnitt ein durch irgend zwei (B, C) der vier festen Kurvenpunkte (B, C, D, E) hindurchgehender gewoehhlicher Kegelschnitt, so ergiebt sich der

Satz: *Sind irgend fuenf Punkte* (A, B, C, D, E) *auf einer Kurve dritter Ordnung gegeben, und schneidet ein durch* B, C, D, E *hindurchgehender beliebiger andrer Kegelschnitt die Kurve in den Punkten* L, M;

dann geht der Kegelschnitt (ABCLM) *durch einen festen Punkt auf der Kurve hindurch.*

XXV.

Einige projektive Saetze ueber rationale Kurven vierter Ordnung.

197. *Der folgende Satz enthaelt seine Umhehrung in sich:*

Satz: *Die sechs Tangenten, die von den drei Doppelpunkten einer rationalen Kurve vierter Ordnung an dieser gezogen werden koennen, beruehren einen Kegelschnitt.*

In der Tat lautet seine Umkehrung: *Die sechs Tangenten, die von irgend drei nicht auf einem Kegelschnitt liegenden nicht kollinearen Punkten an diesem Kegelschnitt gezogen werden koennen, beruehren eine rationale Kurve vierter Ordnung, welche die drei Punkte als Doppelpunkte hat.*

198. Satz: *Die sechs Doppelpunktstangenten einer rationalen Kurve vierter Ordnung beruehren eine andere rationale Kurve vierter Ordnung, welche mit der ersten die drei Doppelpunkte gemein hat.*

Huelfssatz: *Schneidet ein Kegelschnitt die drei Seiten eines Dreiecks je in einem Punktepaare, so beruehren die sechs Geraden, die diese Punktepaare mit den gegenueberliegenden Ecken verbinden, einen Kegelschnitt.*

Es sei der erste Kegelschnitt durch

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

gegeben, so sind die sechs Verbindungsgeraden durch

$$a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0,$$

$$a_{33}x_3^2+2a_{31}x_3x_1+a_{11}x_1^2=0,$$

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0$$

gegeben. Damit diese sechs Geraden einen Kegelschnitt beruehren, muss

$$a_{22}a_{33}a_{11}=a_{33}a_{11}a_{22}$$

sein, was der Fall ist.

199. Satz: *Schneidet ein Kegelschnitt die drei Seiten eines Dreiecks in drei Punktepaaren, so beruehren die sechs Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den gegenueberliegenden Ecken eine durch die drei Ecken des Dreiecks je zweimal hindurchgehende rationale Kurve vierter Ordnung.*

Dieser Satz folgt aus dem wohlbekannten Satz: Die Doppelpunktstangenten einer rationalen Kurve vierter Ordnung beruehren einen Kegelschnitt.

200. Satz: *Es schneide ein Kegelschnitt die zwei Seiten* $[A_1A_2]$ *und* $[A_1A_3]$ *eines Dreiecks* $A_1A_2A_3$ *in den Punktepaaren* P_1, P_2 *und* Q_1, Q_2: *es sehneiden die Geradenpaare* $[A_2Q_1]$, $[A_2Q_2]$ *und* $[A_3P_1]$, $[A_3P_2]$ *den Kegelschnitt in den Punktepaaren* P_1', P_2' *bez,* Q_1', Q_2'; *dann koennen wir einen durch* P_1', P_2', Q_1', Q_2', A_2, A_3 *hindurchgehenden Kegelschnitt ziehen.*

Dieser Satz folgt aus dem wohlbekannten Satze: Ein Kegelschnitt kann durch irgend zwei Doppelpunkte einer rationalen Kurve vierter Ordnung und die zwei Punkte, in welchen die zwei Paare entsprechender Tangenten die Kurve schneiden, geschrieben werden.

201. Satz: *Die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, in welchen je ein durch drei feste Punkte (nicht auf dem Kegelschnitt) hindurchgehender Kegelschnitt den ersten Kegelschnitt oskuliert, liegen auf einer rationalen Kurve vierter Ordnung, welche die drei Punkte als Knotenpunkte besitzt.*

Dieser Satz folgt aus dem bekannten Satze: Die sechs Wendepunkte einer rationalen Kurve vierter Ordnung liegen auf einem Kegelschnitt.

202. Satz: *Die sechs Punkte, in welchen die drei Paare Verbindungslinien der drei Paare Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes mit den drei Seiten eines Dreiecks, mit den drei gegenueberliegenden Ecken den Kegelschnitt schneiden, liegen auf einer rationalen Kurve vierter Ordnung mit den drei Ecken als Doppelpunkte.*

Dieser Satz folgt aus dem bekannten Satze; Die sechs Beruehrungspunkte in welchen die drei Doppelpunktstangenten einer rationalen Kurve vierter Ordnung sie schneiden, liegen auf einem Kegelschnitt.

203. Satz: *Die sechs Beruehrungspunkte der von den drei Ecken eines Dreiecks an einem Kegelschnitt gezogenen Tangenten liegen auf einer durch die drei Ecke je zweimal hindurchgehenden rationalen Kurve vierter Ordnung.*

Dieser Satz folgt aus dem bekannten Satze: Die sechs Beruehrungspunkte der von den drei Doppelpunkten einer rationalen Kurve vierter Ordnung gezogenen drei Paar Tangenten derselben, liegen auf einem Kegelschnitt.

204. Satz: *Die drei in den drei vorhergehenden Saetzen besprochenen rationalen Kurven vierter Ordnung gehen durch zwei feste Punkte des genannten Kegelschnittes hindurch.*

Dieser Satz folgt aus dem bekannten Satze: Die drei in den drei vorhergehenden Huelfssaetzen besprochenen Kegelschnitte gehen durch zwei feste Punkte der genannten rationalen Kurve vierter Ordnung.

205. Satz: *Sind* P, P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$, *irgend fuenf Punkte auf einer rationalen Kurve vierter Ordnung mit Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3, *so ist das Doppelverhaeltnis von den Kegelschnitten* $(A_1A_2A_3PP_1)$, $(A_1A_2A_3PP_2)$, $(A_1A_2A_3PP_\lambda)$, $(A_1A_2A_3PP_{\lambda'})$ *unabhaengig von der Wahl der Lage des Punktes* P *auf der Kurve.*

206. Satz: *Sind* P, P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ *irgend fuenf Punkte auf einer rationalen Kurve vierter Ordnung mit Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3, *dann ist das Doppelverhaeltnis von den vier Punkten* $((A_1A_2A_3PP), (A_1A_2A_3P_1P_1))$, $((A_1A_2A_3PP), (A_1A_2A_3P_2P_2))$, $((A_1A_2A_3PP), (A_1A_2A_3P_\lambda P_\lambda))$, $((A_1A_2A_3PP), (A_1A_2A_3P_{\lambda'}P_{\lambda'}))$ *unabhaengig von der Wahl der Lage des Punktes* P *auf der Kurve.*

207. Satz: *Eine rationale Kurve vierter Ordnung mit Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3 *und ein durch* A_1, A_2, A_3 *hindurchgehender Kegelschnitt bestimmen eine Involution auf dem Kegelschnitt.*

208. Satz: *Eine rationale Kurve vierter Ordnung mit Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3 *und eine durch* A_i $(i=1$ od. 2 od. $3)$ *hindurchgehende Gerade bestimmen eine Involution auf der Geraden.*

209. Satz: *Ein durch* A_1, A_2, A_3 *hindurchgehender Kegelschnitt schneidet ein System von rationalen Kurven vierter Ordnung* $(Q_1Q_2Q_3Q_4A_1A_2A_3)$ *mit Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3 *in einer Involution auf sich selbst.*

210. Satz: *Eine durch* A_1 *hindurchgehende Gerade schneidet ein System von rationalen Kurven vierter Ordnung* $(Q_1Q_2Q_3Q_4A_1A_2A_3)$ *mit Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3 *in einer Involution auf sich selbst.*

XXVI.

Interpretation eines Grundgebildes m-ter Ordnung als ein Grundgebilde n-ter Ordnung ($m, n = 1, 2, 3, m \neq n$).

211. Satz: *Die folgenden Paare sind in einem gewissen Sinne miteinander vertauschbar (ohne Schaden der Doppelvehaeltnisse):*

i) *Grundgebilde erster Stufe, erster Ordnung.*	i) *Grundgebilde erster Stufe, zweiter Ordnung.*

ii) *Grundgebilde erster Stufe, zweiter Ordnung.*	ii) *Grundgebilde erster Stufe, dritter Ordnung.*
iii) *Grundgebilde erster Stufe, dritter Ordnung.*	iii) *Grundgebilde erster Stufe, erster Ordnung.*

Beweis. i) Bezieht es sich auf die Punktreihen, so haben wir es bereits in 130 bewiesen. Wenn von den Ebenenbuescheln die Rede ist, so folgt unsre Behauptung aus 136, (i) und 137, (i).

ii) Das folgende Schema zeigt uns die Richtigkeit unsrer Behauptung:

In der in Kap. IV betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewöehnlichen Geometrie.
Eine Pseudopunktreihe zweiter Ordnung. ...	Eine k^2 dreimal betreffende durch A_4 hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung.
Eine Pseudoraumkurve dritter Ordnung. ...	Eine durch A_4 hindurchgehende und k^2 nicht betreffende Punktreihe zweiter Ordnung.

In der in XIX betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Ein Pseudoebenenbueschel zweiter Ordnung.	Ein mit dem Kegel (A_4, k_1^2) drei Schmiegungsebenen gemein habendes, die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ anschmiegendes Ebenenbueschel dritter Ordnung.
Ein Pseudoebenenbueschel dritter Ordnung.	Ein die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ anschmiegendes und mit dem Kegel (A_4, k_1^2) keine Tangentialebenen gemein habendes Ebenenbueschel zweiter Ordnung.

iii) Das folgende Schema zeigt uns die Richtigkeit unsrer Behauptung:[1]

In der in Kap. II betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Eine Pseudogerade	Eine durch die vier festen Punkte hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung.

1 Fuer die Beibehaltung der Doppelverhaeltnisse siehe Schlusswort 10.

Eine Psudoraumkurve dritter Ordnung.	Eine das Fundamentalsystem nicht betreffende Gerade.

In der in XVII betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Ein Pseudoebenenbueschel erster Ordnung.	Ein Ebenenbueschel dritter Ordnung, welches die vier festen Ebenen als rektifizierende Ebenen besitzt.
Ein Pseudoebenenbueschel dritter Ordnung.	Ein das Fundamentalsystem nicht betreffendes Ebenenbueschel erster Ordnung.

212. Satz: *Die folgenden Paare sind je in einem gewissen Sinne miteinander vertauschbar (ohne Schaden der Doppelverhaeltnisse):*

i) *Grundgebilde zweiter Stufe, zweiter Ordnung.*	i) *Grundgebilde zweiter Stufe, dritter Ordnung.*
ii) *Grundgebilde zweiter Stufe, dritter Ordnung.*	ii) *Grundgebilde zweiter Stufe, erster Ordnung.*
iii) *Grundgebilde zweiter Stufe, erster Ordnung.*	iii) *Grundgebilde zweiter Stufe, zweiter Ordnung.*

Beweis. i) Das folgende Schema zeigt uns die Richtigkeit unsrer Behauptung:

In der in Kap. IV betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Eine Pseudoflaeche dritter Ordnung.	Eine durch A_4 hindurchgehende und k_1^2 nicht enthaltende Quadriflaeche.
Eine Pseudoquadriflaeche	Eine k_1^2 einmal in sich enthaltende und einen zweifachen Knotenpunkt in A_4 habende Flaeche dritter Ordnung.

In der in X betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Eine Pseudoflaeche dritter Klasse.	Eine die Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ beruehrende und den Kegel (A_4, k_1^2) nicht beruehrende Quadriflaeche.

Eine Pseudoquadriflaeche ....Eine den Kegel (A_4, k_1^2) einmal beruehrende und einen Kegelschnitt in der Ebene $\{A_1A_2A_3\}$ enthaltende Flaeche dritter Klasse.

ii) Das folgende Schema zeigt uns die Richtigkeit unsrer Behauptung :

In der in Kap. II. betrachteten Pseudogeometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Eine Pseudoebene	Eine die Fundamentalkurve sechster Ordnung L^6 enthaltende Flaeche dritter Ordnung.
Eine Pseudoflaeche dritter......... Ordnung.	Eine zum Fundamentalsysteme nicht gehoerige gewoehnliche Ebene.

In der zu der in Kap. II betrachteten Geometrie korrelativen Geometrie.	In der gewoehnlichen Geometrie.
Ein Pseudopunkt.....................	Eine die Fundamentalkurve sechster Klasse enthaltende Flaeche dritter Klasse.
Eine Pseudoflaeche dritter .... Klasse.	Ein zum Fundamentalsysteme nicht angehoeriger gewoehnlicher Punkt.

iii) S. 142.

XXVII.

Analogien zwischen Kegelschnitten und Raumkurven dritter Ordnung.

213. Der vorhergehenden Prinzipien wegen koennen wir zahlreiche Analogien zwischen Gebilden von verschiedenen Ordnungen und von derselben Stufe geben. Wir haben bereits in XVIII einige derartige Beispiele nach der Meinung von Herrn Nishiuchi gegeben. Wir wollen jetzt die folgenden geben, *von denen jeder aus dem gegenseitigen beweisbar ist.*

214. Satz: *Sind* P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ *irgend vier Punkte auf einem Kegelschnitt, so ist das Doppelverhaeltnis* $([PP_1][PP_2], [PP_\lambda][PP_{\lambda'}])$ *unabhaengig von der Wahl der Lage des Punktes* P *auf dem Kegelschnitt.*

215. Satz: *Sind* p_1, p_2, p_λ, $p_{\lambda'}$ *irgend vier Tangenten eines Kegelschnittes, so ist das Doppelverhaeltnis* $((pp_1)(pp_2), (pp_\lambda)(pp_{\lambda'}))$ *unabhaenigig von der Wahl der Lage der Tangente* p *des Kegelschnittes.*

216. Satz: *Ein Kegelschnitt und eine Gerade in derselben Ebene bestimmen eine Involution auf der Geraden sowohl als auf dem Kegelschnitt.*

217. Satz: *Ein Geradenbueschel und ein Kegelschnitt bestimmen eine Involution auf dem Kegelschnitt sowohl als in dem Geradenbueschel.*

218. Satz: *Durch fuenf Punkte* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *von welchen keine vier in einerlei Geraden liegen, ist ein Kegelschnitt bestimmt, welcher durch die fuenf Punkte geht.*

219. Satz: *Durch fuenf*

Satz: *Sind* P_1, P_2, P_λ, $P_{\lambda'}$ *irgend vier Punkte auf einer Raumkurve dritter Ordnung, so ist das Doppelverhaeltnis* $(\{A_4QP_1\}\{A_4QP_2\}, \{A_4QP_\lambda\}\{A_4Q_4P_{\lambda'}\})$ *unabhaengig von der Wahl der Lagen der Punkte* A_4, Q *auf der Raumkurve dritter Ordnung.*

Satz: *Sind* $\pi_1, \pi_2, \pi_\lambda, \pi_{\lambda'}$ *irgend vier Schmiegungsebenen (in der Regelflaeche, oskulierende Kegelschnitte) einer Raumkurve dritter Ordnung, so ist das Doppelverhaeltnis* $((\pi\rho\pi_1)(\pi\rho\pi_2), (\pi\rho\pi_\lambda)(\pi\rho\pi_{\lambda'}))$, $(\pi \equiv \{A_1A_2A_3\})$, *unabhaengig von der Wahl der Lagen der Schmiegungsebenen (oskulierende Kegelschnitte)* π, ρ *der Raumkurve dritter Ordnung.*

Satz: *Eine Raumkurve dritter Ordnung und eine dazu inzidente Gerade bestimmen eine Involution auf der Geraden sowie auf der Raumkurve dritter Ordnung.*[1]

Satz: *Ein System von Kegelschnitten, welche durch irgend zwei Punkte auf einer Regelflaeche gehen, und eine Raumkurve dritter Ordnung in derselben Regelflaeche, bestimmen eine Involution auf der Raumkurve dritter Ordnung sowie in dem Kegelschnittensystem.*

Satz: *Durch sechs Punkte* A_4, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, *von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, ist eine Raumkurve dritter Ordnung bestimmt, welche durch die sechs Punkte geht.*

Satz: *Durch sechs Ebenen*

[1] Vgl. Von Staudt, Beitraege zur Geometrie der Lage, 471.

Gerade p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, von welchen keine vier durch einen Punkt gehen, ist ein Kegelschnitt bestimmt, welcher die fuenf gegebenen Geraden beruehrt.

220. Satz: *Durch einen Kegelschnitt ist ein Polarsystem bestimmt.*

221. Satz: *Eine Gerade schneidet ein Kegelschnittsbueschel in einer Involution auf sich selbst.*

222. Satz: *Ein zu dem letzten Satze korrelativer Satz.*

223. Satz: *Ein Ebenenbueschel und ein in keiner der Ebenen des Bueschels liegender Kegelschnitt bestimmen eine Involution auf dem Kegelschnitt.*

224. Satz von Pascal.

$\{A_1A_2A_3\}$, π_1, π_2, π_3, π_4, π_5, *von welchen keine vier durch einen Punkt gehen, ist eine Raumkurve dritter Ordnung bestimmt, welche an die sechs Ebenen sich anschmiegt.*

Satz: *Durch eine Raumkurve dritter Ordnung auf einer Quadriflaeche und einen festen Punkt auf dieser Raumkurve ist eine Punktkegelschnitt-zuordnung bestimmt.*

Satz: *Eine Gerade auf einer Regelflaeche schneidet ein System einer fuenf Punkte gemein habenden Raumkurve dritter Ordnung auf der Regelflaeche in einer Involution auf sich selbst. Besitzt ein System von Raumkurven dritter Ordnung auf einer Quadriflaeche fuenf Punkte gemein, so schneidet ein durch einen der fuenf Punkte hindurchgehender Kegelschnitt auf der Quadriflaeche die Raumkurven in einer Involution auf sich selbst.*

Satz: *Ein zu dem letzten Satze korrelativer Satz.*

Satz: *Ein Ebenenbueschel* $[A_4P]$ *und eine durch* A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung bestimmen eine Involution auf der Raumkurve.*

Satz von Pascal im Raume: *Sind* $A_4, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ *irgend sieben Punkte auf einer Raumkurve dritter Ordnung* K^3 *in einer Quadriflaeche* Q^2, *so liegen die vier Punkte* A_4,

$$((\{A_4P_1P_2\}, Q^2)(\{A_4P_4P_5\}, Q^2)),$$
$$((\{A_4P_2P_3\}, Q^2)(\{A_4P_5P_6\}, Q^2)),$$
$$((\{A_4P_3P_4\}, Q^2)(\{A_4P_6P_1\}, Q^2))$$

auf einem Kegelschnitt in Q^2.

225. Satz von Brianchon. | Satz von Brianchon im Raume.

Es ist zu bemerken, dass die letzten Saetze wesentlich nichts anderes als die Pascal'schen resp. Brianchon'schen Saetze des Kegels (A_4, K^3) sind.

XXVIII.

Analogien zwischen Kegelschnitten und ebenen kubischen Kurven mit Knotenpunkten.

226. Da zwischen Kegelschnitten und Raumkurven dritter Ordnung Analogien bestehen, und die Raumkurven dritter Ordnung immer in ebenen kubischen Kurven mit Knotenpunkten projiziert werden koennen[1], so koennen wir *zwischen den ebenen kubischen Kurven mit Knotenpunkten und den Kegelschnitten Analogien aufstellen;* z.B.—

227. Satz: *Ein Kegelschnitt ist durch irgend zwei projektive Geradenbueschel bestimmt.*

Satz: *Eine ebene Kurve dritter Ordnung mit Knotenpunkte ist durch ein Kegelschnittsbueschel* $(A_1A_2A_3P)$ *und ein dazu projektives Geradenbueschel* (A_1) *bestimmt.*

228. Satz: *Eine Gerade und ein Kegelschnitt bestimmen eine Involution auf der Geraden sowie auf dem Kegelschnitt.*

Satz: *Eine ebene Kurve dritter Ordnung mit Knotenpunkte und ein durch den Knotenpunkt hindurchgehender Kegelschnitt bestimmen eine Involution auf dem Kegelschnitt sowie auf der Kurve dritter Ordnung.*

229. Ebenso koennen wir die zu 214–225 entsprechenden Analogien aufstellen.

XXIX.

Einige Eigenschaften der Raumkurven dritter Ordnung.

230. Mit Benutzung des Prinzips, dass jede Raumkurve dritter Ordnung in eine ebene knotige Kurve dritter Ordnung projiziert werden kann, koennen wir die Saetze in 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195 auf die Raumkurven dritter Ordnung anwenden.

231. Also z.B. der Satz in 188 wird:

---

[1] Basset, Treatise on the Geometry of Surfaces, pp. 99–100.

Satz: *Es seien* {OAB}, {OAC}, {OA′B′}, {OA′C′} *durch einen Knotenpunkte* A *einer Raumkurve dritter Ordnung und durch einen beliebigen Punkt* O *ausserhalb derselben gezogene Tangentialebenen, welche in den Punkten* B, C, B′ *bez.* C′ *die Kurve beruehren; es schneide eine beliebige durch* O, A *gehende Gerade die Kurve dritter Ordnung in den Punkten* P_1 *und* P_2, *die Ebenen* {OBC} *und* {OB′C′} *in* E *bez.* E′; *dann ist* (P_1P_2, EE′) *eine harmonische Gruppe.*

232. Und der Satz in 189 wird:

Satz: *Sind* {OAB}, {OAC}, {OAB′} *und* {OAC′} *vier von einem Kurvenpunkte* A *einer Raumkurve dritter Ordnung und durch einen beliebigen Punkt* O *ausserhalb derselben gezogene Tangentialebenen, dann bilden* {OBC}, {OB′C′}, {ODA}, {ODT} *eine harmonische Gruppe, wobei* [OD]=[{OBC}, {OB′C′}] *und* {ODT} *die Tangentialebenen an* D *der Kurve sind.*

XXX.

Einige projektive Saetze ueber Flaechen zweiter und dritter Ordnungen.

233. Ausgangssatz: Besitzt ein System von Quadriflaechen eine Kurve gemein, so schneidet jede Gerade die Quadriflaechen in involutorischen Punkten.

Aus diesem Satze ergeben sich die folgenden zwei Saetze:

Satz: *Besitzt ein System von Quadriflaechen eine Kurve gemein, so schneidet eine die Kurve viermal betreffende Raumkurve dritter Ordnung die Quadriflaechen in involutorischen Punkten auf der Raumkurve dritter Ordnung.*

234. Satz: *Besitzt ein System von Quadriflaechen eine Kurve gemein, und sind* A_1, A_2 *irgend zwei Punhte auf der Kurve, dann schneidet jeder durch* A_1, A_2 *hindurchgehende Kegelschnitt die Quadriflaechen in involutorischen Punkten auf sich selbst.*

Beweis. Die Ebene des durch A_1, A_2 hindurchgehenden Kegelschnittes schneidet die Quadriflaechen in einem Kegelschnittsbueschel, und mit Ruecksicht auf dem Satz ii in 129 erhaelt man daher unsren Satz.

235. Ausgangssatz: Ein Kegelschnitt schneidet die Ebenen eines Ebenenbueschels in involutorischen Punkten auf sich selbst.

Aus diesem Satze ergeben sich die folgenden Saetze:

Satz: *Besitzt ein System von Flaechen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3 A_4 *eine durch* A_1, A_2, A_3 A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung gemein, so schneidet ein durch* A_i, A_j *hindurchgehender Kegelschnitt die Flaechen in involutorischen Punkten auf sich selbst.*

236. Satz: *Besitzt ein System von Flaechen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3, A_4 *eine durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung gemein, so schneidet ein durch* A_j *hindurchgehender und die Geraden* $[A_iA_k]$, $[A_iA_l]$ *betreffender Kegelschnitt die Flaechen in involutorischen Punkten auf sich selbst.*

237. Satz: *Besitzt ein System von Flaechen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3, A_4 *eine durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung gemein, so schneidet ein durch* A_i, A_k *hindurchgehender Kegelschnitt die Flaechen in involutorischen Punkten auf sich selbst.*

238. Satz: *Besitzt ein System von Flaechen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten* A_1, A_2, A_3, A_4 *eine durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung gemein, so schneidet eine* $[A_iA_j]$ *betreffende Gerade die Flaechen in involutorischen Punkten auf sich selbst.*

239. Ausgangssatz: Besitzt ein System von Quadriflaechen eine Kurve gemein, so gehen die Polarebenen eines Punktes durch eine Gerade hindurch.

Aus diesem Satze ergeben sich die folgenden Saetze:

Satz: *Es haben ein System von Quadriflaechen eine durch vier Punkte* A_1 A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende Kurve gemein; es schneide eine bewegliche, durch die fuenf Punkte* P, A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung die Quadriflaechen in den Punktepaaren* P_i, P_i'; *dann ist der Ort von* Q_i *derart, dass* (PQ_i, P_iP_i') *je eine harmonische Gruppe bilden, eine durch* A_1, A_2, A_3, A_4 *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung. Und korrelativ hierzu.*

240. Satz: *Es schneide eine bewegliche durch fuenf Punkte* A_1, A_2, A_3, A_4, P *hindurchgehende Raumkurve dritter Ordnung die Ebenen eines Ebenenbueschels* $[A_jR]$, $(j = 1, 2, 3, 4)$ *in den Punktepaaren* P_i, P_i'; *dann ist der Ort von den Punkten* Q_i *derart, dass* (P_iP_i', PQ_i) *je eine harmonische Gruppe bilden, eine durch* A_j *hindurchgehende Gerade. Und korrelativ hierzu.*

241. Satz: *Besitzt ein System von Quadriflaechen zwei Kegelschnitte* k^2, k'^2 *gemein; schneidet ein beweglicher durch zwei auf keiner der Quadriflaechen liegenden Punkte* A_4, P *hindurchgehender und* k^2 *zweimal*

betreffender Kegelschnitt die Quadriflaechen des genannten Systems in den Punktepaaren P_i, P_i'; *dann ist der Ort von den Punkten* Q_i *derart, dass* (P_iP_i', PQ_i) *je eine harmonische Gruppe bilden, ein durch* A_4 *hindurchgehender und* k^2 *zweimal betreffender Kegelschnitt. Und korrelativ hierzu.*

242. Satz: *Schneidet ein durch zwei feste Punkte* P, A_4 *hindurchgehender und einen festen Kegelschnitt* k^2 *zweimal betreffender Kegelschnitt die Ebenen eines Ebenenbueschels, dessen Achse nicht mit* A_4, k^2 *inzident ist in den Punktepaaren* P_i, P_i', *dann ist der Ort von den Punkten* Q_i *derart, dass* (P_iP_i', PQ_i) *je eine harmonische Gruppe bilden, ein durch* A_4 *hindurchgehender und* k^2 *zweimal betreffender Kegelschnitt. Und korrelativ hierzu.*

243. Die folgenden zwei Saetze ermoeglichen uns ebenso ein System von Saetzen aufzustellen:

Satz: Besitzt ein System von Quadriflaechen eine Kurve gemein, so erzeugen die Polaren einer festen Geraden eine Regelflaeche zweiter Ordnung.

Satz: Besitzt ein System von Quadriflaechen eine Kurve gemein, so erzeugen die Polaren einer festen Ebene eine Raumkurve dritter Ordnung.

XXXI.

Einige projektive Saetze ueber Flaechen vierter Ordnung je mit einem knotigen Kegelschnitt und einem Knotenpunkte.

244. Satz: *Eine Flaeche vierter Ordnung mit einem Knotenpunkte* A_4 *und einem knotigen Kegelschnitt* k^2 $(A_1A_2A_3PQ)$ *und ein durch* A_4, P, Q *hindurchgehender Kegelschnitt bestimmen eine Involution auf dem Kegelschnitt.* (Vgl. 207).

245. Satz: *Eine Flaeche vierter Ordnung mit einem Knotenpunkte* A_4 *und einem knotigen Kegelschnitt* k^2 $(A_1A_2A_3PQ)$ *und eine entweder durch* A_4 *oder durch* P *hindurchgehende Gerade bestimmen eine Involution auf der Geraden.* (Vgl. 208).

246. Satz: *Ein durch* A_4, P, Q *hindurchgehender Kegelschnitt schneidet ein System von eine Kurve gemein habenden Flaechen vierter Ordnung mit einem Knotenpunkte* A_4 *und einem knotigen Kegelschnitt* k^2 $(A_1A_2A_3PQ)$ *in einer Involution auf sich selbst.* (Vgl. 209).

247. Satz: *Eine entweder durch* A_4 *oder durch* P *hindurchgehende*

Gerade schneidet ein System von eine Kurve gemein habenden Flaechen vierter Ordnung mit einem Knotenpunkte A_4 *und einem knotigen Kegelschnitt* k^2 $(A_1A_2A_3PQ)$ *in einer Involution auf sich selbst.* (Vgl. 210).

248. Wir koennen die den in 244–248 gegebenen Saetzen entsprechenden Saetze bezueglich einer Flaeche sechster Ordnung aufstellen, die eine Gleichung von der Gestalt besitzt:

$$a_{11}x_2^2x_3^2x_4^2 + a_{22}x_3^2x_4^2x_1^2 + a_{33}x_4^2x_1^2x_2^2 + a_{44}x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3x_4(a_{12}x_3x_4 + a_{13}x_4x_2 + a_{14}x_2x_3 + a_{23}x_1x_4 + a_{24}x_1x_3 + {}_{34}x_1x_2) = 0.$$

XXXII.

Ebene Interpretationen der Saetze von Pascal und Brianchon im Raume.

249. Pascal'scher Satz[1]: Liegt ein Sechsseit auf einer Regelflaeche zweiter Ordnung, so liegen die drei Geraden, in welcher die drei Paar Tangentialebenen der Flaeche in den gegenueberliegenden Ecken des Sechsseits paarweise sich schneiden, in einer Ebene.

Brianchon'scher Satz[1]: Liegt ein Sechsseit auf einer Regelflaeche zweiter Ordnung, so schneiden sich die drei Paar Diagonalen in einem Punkte.

Ebene Intepretation. Es ist nur noetig, den Fall des Pascal'schen Satzes zu zeigen.

Es seien 1, 2, 3 irgend drei Erzeugende eines Systems und 1', 2', 3' irgend drei Erzeugende des andern Systems auf der Regelflaeche zweiter Ordnung R^2. Es bestimmen $((11'), (12'), (22'), (23'), (33'), (31'))$ das Sechsseit. Man nehme $(32') \equiv A_1$, $(21') \equiv A_2$, $(13') \equiv A_3$, einer der zwei Durchschnittspunkte $([\{(11'), (22')(33')\}\{(12')(23')(31')\}], R^2) \equiv A_4$. Bezeichnet man die Tangentialebene in (ij) mit $\{(ij)\}$, so sind

$$[\{(11')\}, \{(23')\}] = [A_2A_3],$$

$$[\{(12')\}, \{(33')\}] = [A_3A_1], \quad [\{(22')\}, \{(31')\}] = [A_1A_2];$$

und die drei Geraden $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$, $[A_1A_2]$ liegen offenbar in einer Ebene.

[1] Nach Hesse.

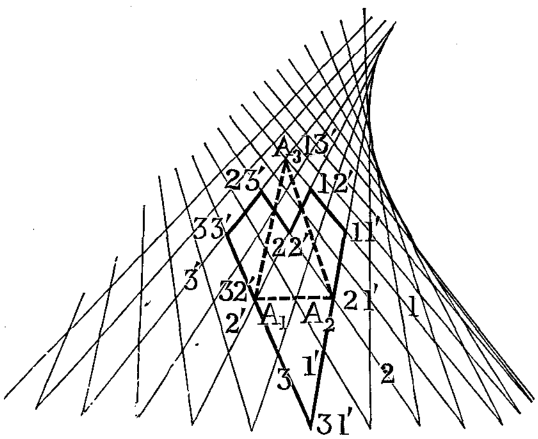


Fig. 7.

Betrachtet man dieses Gebilde von der Pseudogeometrie in Kap. IV aus, so ist die Regelflaeche zweiter Ordnung eine Pseudoebene, in welcher die Geraden 1, 2, 3, 1', 2', 3' die Rolle der Pseudogeraden spielen.

Bezueglich des Pseudosechsseits ((11') (12') (22') (23')(33')(31')) *gilt der Pascal'sche Satz in der Pseudoebene, welcher wesentlich zum Pascal'schen Satze im Raume aequivalent ist.* In der Tat liegen die drei Pseudopunkte ([(11')(12')][(23')(33')]), ([(12')(22')][(33')(31')]), ([(22')(23')][(31')(11')]) in der uneigentlichen Pseudogeraden erster Art $A_4(\{A_1A_2A_3\}, R^2)$, da die drei Pseudopunkte tatsaechlich drei Erzeugende des Kegels $A_4(\{A_1A_2A_3\}, R^2)$ sind. Diese Pseudogerade ist als die Pseudo-Pascal'sche Gerade des Pseudosechsseits anzusehen. In der Tat liegen die drei Pseudopunkte (11'), (22'), (33') auf der Pseudogeraden ({(11')(22')(33')}, R^2), und die drei Pseudopunkte (12'), (23'), (31') auf der Pseudogeraden ({(12')(23')(31')}, R^2).

250. N.B. *Die in 249 gegebenen Pascal'schen und Brianchon'schen Saetze im Raume sind den vier Arten von den Pseudogeometrien und der gewoehnlichen Geometrie wesentlich gemeinsam.*

In der in Kap. III besprochenen Pseudogeometrie:

Pascal'scher Satz: *Fundamentalpunkte:* (13')$\equiv A_1$, (32')$\equiv A_2$, (21')$\equiv A_3$, (ein beliebiger Punkt auf der Regelflaeche zweiter Ordnung) $\equiv A_4$.

Das Pseudosechsseit:

([(11')(12')][(12')(22')]
[(22')(23')][(23')(33')]
[(33')(31')][(31')(11')]),

die Seiten aus den eigentlichen

Brianchon'scher Satz: *Fundamentalpunkte:* (31')$\equiv A_1$, (12')$\equiv A_2$, (23')$\equiv A_3$, (ein beliebiger Punkt auf der Regelflaeche zweiter Ordnung)$\equiv A_4$.

Das Pseudosechsseit:

([(11')(12')][(12')(22')]
[(22')(23')][(23')(33')]
[(33')(31')][(31')(11')]),

die Seiten aus den eigentlichen

Pseudogeraden dritter Art bestehend.

Die Pseudotangentialebenen: $\{(12')A_1A_2\}$ etc., die eigentliche Pseudoebenen dritter Art sind.

Die drei Pseudodurchschnittslinien: $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$, die uneigentliche Pseudogerade dritter Art sind.

Die Pseudo-Pascal'sche Ebene: A_4, die eine uneigentliche Pseudoebene ist.

Pseudogeraden dritter Art bestehend.

Die Pseudodiagonalen: $[(31')(22')]$, $[(12')(33')]$, $[(23')(11')]$, die eigentliche Pseudogeraden dritter Art sind.

Der Pseudo-Brianchon'sche Punkt: $([(31')(22')][(11')(23')][(12')(33')])$, welcher ein eigentlicher Pseudopunkt ist.

In der in Kap. IV besprochenen Pseudogeomentrie:

Fundamentalpunkte: $(13') \equiv A_1$, $(32') \equiv A_2$, $(21') \equiv A_3$, (ein beliebiger Punkt ausserhalb der Regelflaeche zweiter Ordnung) $\equiv A_4$.

Das Pseudosechsseit:

$$([(11')(12')],\ [(12')(22')],\ [(22')(23')],\ [(23')(33')],\ [(33')(31')],\ [(31')(11')]),$$

wobei die Pseudoseiten eigentliche Pseudogeraden dritter Art sind.

Die pseudotangentialebenen: $([(12')(13')][(12')(32')],\ k^2, A_4)$ etc., die eigentliche Pseudoebenen dritter Art sind.

Die drei Pseudodurchschnittslinien: $[([(12')(13')][(12')(32')],\ k^2, A_4), \{(13')(32')A_4\}]$ etc., die eigentliche Pseudogeraden erster Art sind.

Die Pseudo-Pascal'sche Ebene: A_4, die eine uneigentliche Pseudoebene ist.

Fundamentalpunkte: $(31') \equiv A_1$, $(12') \equiv A_2$, $(23') \equiv A_3$, (ein beliebiger Punkt ausserhalb der Regelflaeche zweiter Ordnung) $\equiv A_4$.

Das Pseudosechsseit:

$$([(11')(12')], [(12')(22')], [(22')(23')], [(23')(33')], [(33')(31')], [(31')(11')]),$$

wobei die Pseudoseiten eigentliche Pseudogeraden dritter Art sind.

Die drei Pseudodiagonalen: $[(31')(22')]$, $[(11')(23')]$, $[(12')(33')]$, die eigentliche Pseudogeraden dritter Art sind.

Der Pseudo-Brianchon'sche Punkt: $([(31')(22')], [(11')(23')], [(12')(33')])$, der ein eigentlicher Pseudopunkt ist.

Ganz ebenenso koennen wir die beiden Saetze in die beiden in XVII, XIX betrachteten Geometrien ohne wesentliche Aenderung einfuehren.

Schlusswort.

Die Hauptfruechte dieser Abhandlung sind No. 1 (S. 310), 50 (S. 338) und 94 (S. 358).

Auf Grund dieser Prinzipien koennten wir noch folgendes hinzufuegen:

1° die Prinzipien 50 und 94 zur in Kap. II betrachteten Pseudogeometrie (und auch vielleicht zu jeder in 1 besprochenen Pseudogeometrie) liessen sich erweitern;

2° indem wir die Cayley-Kleinsche Maassbestimmung in jede Pseudogeometrie ohne Schaden der Doppelverhaeltnisse einfuehren, liessen sich pseudoelliptische, pseudoparabolische und pseudohyperbolische Geometrien aufbauen und zahlreiche schoene Analogien daraus erzielen;

3° in allen Pseudoraeumen liessen sich Pseudoliniengeometrien aufbauen;

4° liesse sich die unendliche Pluralitaet der raeumlichen Cremona-Transformationen beweisen;

5° Dr. Berliners (S. die Fussnote auf S. 311) "une loi de la pluralité infinie permettant d'interpréter chaque théorème de la géométrie projektive d'une infinité de manières" koennte man eine neue Form geben.

6° Ueberdies glaube ich voraussehen zu koennen, dass die projektive Geometrie von Staudts sowie die Theorie der raeumlichen birationalen Transformationen in kurzem auf Grund dieser Prinzipien eine grosse Ergaenzung erhalten werden.

Mai 29, 1918.