Sur les courbures des courbes gauches dans un espace non-euclidien de plusieurs dimensions

par

Teikichi Nishiuchi

(Reçu, le 21 juin 1921)

Soient ξ_0, ξ_1,......, ξ_n les coordonnées de Weierstrass d'un point dans un espace non-euclidien de n dimensions dont la courbure d'espace est $\frac{1}{k^2}$. Pour les coordonnées du point, nous pouvons prendre les nombres

$$x_o = k\,\xi_o,\; x_1 = \xi_1,\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\; x_n = \xi_n.$$

Soient

$$x_o = \psi_o(t),\; x_1 = \psi_1(t),\; \ldots\ldots\ldots\ldots,\; x_n = \psi_n(t),$$

les formules qui donnent les coordonnées d'un point d'une courbe gauche Γ en fonction d'un paramètre t. Nous désignerons par x'_i, x''_i, ..., $x^{(r)}_i$ les dérivées première, seconde, ..., $r^{ième}$ de x_i par rapport à la variable t, et nous supposerons ici que x_o, x_1, x_2, ..., x_n admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n.

Prenons les $r+1$ points $P_o\,[x(t)]$, $P_1\,[x(t+\triangle t)]$, ... $P_r\,[x(t+r\triangle t)]$ de la courbe Γ. Alors on trouve que les coordonnées du pôle absolu ${}_rQ$ du r point[1] $(P_0, P_1, \ldots\ldots, P_{r-1})$ dans le $r+1$ point $(P_0, P_1, \ldots\ldots, P_{r-1}, P_r)$ sont

---

1 Voir le memoir de D'Ovidio. Math. Ann., t.12, p. 403.

$$
{}_r y_i = \frac{\begin{vmatrix} (xx) & (xx') & \cdots\cdots & (xx^{r-1}) & x_i \\ (x'x) & (x'x') & \cdots\cdots & (x'x^{r-1}) & x'_i \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ (x^r x) & (x^r x') & \cdots\cdots & (x^r x^{r-1}) & x^r_i \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (xx) & (xx') & \cdots & (xx^{r-1}) \\ (x'x) & (x'x') & \cdots & (x'x^{r-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x^{r-1}x) & (x^{r-1}) & \cdots & (x^{r-1}x^{r-1}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (xx) & (xx') & \cdots & (xx^r) \\ (x'x) & (x'x') & \cdots & (x'x^r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x^r x) & (x^r x') & \cdots & (x^r x^r) \end{vmatrix}}} \qquad (1)
$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n),$$

ici

$$(x^i x^s) = x^i_0 x^s_0 + x^i_1 x^s_1 + \ldots\ldots + x^i_n x^s_n.$$

On voit donc facilement que

$$({}_r y\ {}_p y) = 0, \quad (r \neq p)$$

$$({}_r y\ {}_p y) = 1. \quad (r = p).$$

Par (1) on voit ainsi que y_i est une fonction de la variable t. Lorsque le point P décrit la courbe Γ, le point Q décrit en même temp la courbe ${}_r\mathfrak{S}$. Nous appellerons la courbe la $r^{\text{ième}}$ *courbe polaire absolue de* Γ. Soit Q' le point de ${}_r\mathfrak{S}$ qui correspond à l'autre point P' de Γ. La limite du rapport $\dfrac{arc\ QQ'}{arc\ PP'}$, quand P' tend vers P, s'appellera la $r^{\text{ième}}$ courbure de Γ au point P. Au lieu de la limite de $\dfrac{arc\ QQ'}{arc\ PP'}$ nous pouvons considérer évidemment la limite de

$$\frac{\sin \dfrac{\overline{QQ'}}{k}}{\sin \dfrac{\overline{PP'}}{k}}.$$

Désignons cette limite par $\dfrac{1}{R_r}$ et en cherchons l'expression.

Or

$$\sin \frac{\overline{QQ'}}{k} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} ({}_r y(t)\ {}_r y(t)) & (y_r(t)\ {}_r y(t+\triangle t)) \\ ({}_r y(t+\triangle t)\ {}_r y(t)) & ({}_r y(t+\triangle t)\ {}_r y(t+\triangle t)) \end{vmatrix}}{({}_r y(t)\ {}_r y(t))\ (y_r(t+\triangle t)\ {}_r y(t+\triangle t))}},$$

$$(r = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1).$$

De la formule (1) on tire

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} ({}_r y(t), {}_r y(t)) & ({}_r y(t), {}_r y(t+\triangle t)) \\ ({}_r y(t+\triangle t), {}_r y(t)) & ({}_r y(t+\triangle t), {}_r y(t+\triangle t)) \end{vmatrix}}{({}_r y(t)\, {}_r y(t))\ (ry(t+\triangle t)\, {}_r y(t+\triangle t))}}$$

$$=\sqrt{\frac{\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} (xx) & \ldots (xx^{r-1}) & (xx^r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x^{r-1}x) & \ldots (x^{r-1}x^{r-1}) & (x^{r-1}x^r) \\ (x^r x) & \ldots (x^r x^{r-1}) & (x^r x^r) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (xx) & \ldots (xx^{r-1}) & (xx^{r+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x^{r-1}x) & \ldots (x^{r-1}x^{r-1}) & (x^{r-1}x^{r+1}) \\ (x^r x) & \ldots (x^r x^{r-1}) & (x_r x^{r+1}) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (xx) & \ldots (xx^{r-1}) & (xx^r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x^{r-1}x) & \ldots (x^{r-1}x^{r-1}) & (x^{r-1}x^r) \\ (x^{r+1}x) & \ldots (x^{r+1}x^{r-1}) & (x^{r+1}x^r) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (xx) & \ldots (xx^{r-1}) & (xx^{r+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{r-1}x) & \ldots (x^{r-1}x^{r-1}) & (x^{r-1}x^{r+1}) \\ x^{r+1}x) & \ldots (x^{r+1}x^{r-1}) & (x^{r+1}x^{r+1}) \end{vmatrix} \end{Vmatrix}}{\begin{vmatrix} (xx) & \ldots\ldots (xx^{r-1}) & (xx^r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x^{r-1}x) \ldots\ldots & (x^{r-1}x^{r-1}) & (x^{r-1}x^r) \\ (x^r x) & \ldots\ldots (x^r x^{r-1}) & (x^r x^r) \end{vmatrix}}}\,.\varDelta t$$

$$+\ \theta\varDelta t,$$

ici $$\lim_{\triangle t \to 0} \theta = 0.$$

Par l'emploi du théorème de Sylvester, l'expression sous la radicale se déduit à

$$\frac{\triangle_{r-1}\ \triangle_{r+1}}{\triangle_r^2},$$

ou

$$\triangle_i = \begin{vmatrix} (xx) & \ldots\ldots & (xx^i) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (x^i x) & \ldots\ldots & (x^i x^i) \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0\ x_1\ \ldots\ldots\ x_n \\ x'_0\ x'_1\ \ldots\ldots\ x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^i_0\ x^i_1\ \ldots\ldots x^i_n \end{Vmatrix}^2$$

D'autre part, nous avons

$$\sin\frac{\overline{PP'}}{k} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} (xx) & (xx') \\ (x'x) & (x'x') \end{vmatrix}}{(xx)^2}}\,.\ \varDelta t + W\triangle t$$

$$=\frac{\sqrt{\triangle_1}}{k}\cdot\triangle t+W\triangle t;$$

ici

$$\lim_{\triangle t\to 0} W=0.$$

Par suite, la formule (1) qui donne la $r^{\text{ième}}$ courbure devient

$$\frac{1}{R_r^2}=k^2\frac{\triangle_{r-1}\triangle_{r+1}}{\triangle_r^2\triangle_1}.$$

En particulier, dans le cas euclidien, il faut considérer la limite de l'expression de la valeur de la courbure pour que $\frac{1}{k^2}$ tende vers zéro. Dans ce cas, en passant aux coordonnées cartésiennes $\mathfrak{x}_1=\frac{x_1}{x_0}$, $\mathfrak{x}_2=\frac{x_2}{x_0}$, ..., $\mathfrak{x}_n=\frac{x_n}{x_0}$, on aura

$$\frac{1}{R_r^2}=\frac{D_{r-1}D_{r+1}}{D_r^2\,D_1},$$

où

$$D_i=\begin{vmatrix}(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}') & \cdots\cdots & (\mathfrak{x}'\mathfrak{x}^i)\\ \vdots & & \vdots\\ (\mathfrak{x}^i\mathfrak{x}') & \cdots\cdots & (\mathfrak{x}^i\mathfrak{x}^i)\end{vmatrix}=\begin{Vmatrix}\mathfrak{x}_1' & \mathfrak{x}_2' & \cdots\cdots & \mathfrak{x}_n'\\ \mathfrak{x}_1'' & \mathfrak{x}_2'' & \cdots\cdots & \mathfrak{x}_n''\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathfrak{x}_1^i & \mathfrak{x}_2^i & \cdots\cdots & \mathfrak{x}_n^i\end{Vmatrix}^2.$$

La formule est déja obtenue par Brunel[1] et Landsberg.[2]

Maintenent, nous cherchons les formules dans l'espace qui doivent correspondre à celles de Frenet dans l'espace euclidien.

La différentiation de l'expression pour ${}_r y_i$ par rapport à t donnera

$$\frac{d_r y_i}{dt}=\frac{1}{\triangle_{r-1}^{\frac{3}{2}}\triangle_r^{\frac{3}{2}}}\left\{\triangle_{r-1}\left(\begin{vmatrix}(xx) & \ldots & (xx^r)\\ \vdots & & \vdots\\ (x^{r-1}x) & \ldots & (x^{r-1}x)\\ (x^r x) & \ldots & (x^r x^r)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(xx) & \ldots & (xx^{r-1}) & x_i\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (x^{r-1}x) & \ldots & (x^{r-1}x^{r-1}) & x_i^{r-1}\\ (x^{r+1}x) & \ldots & (x^{r+1}x^{r+1}) & x_i^{r+1}\end{vmatrix}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\begin{vmatrix}(xx) & \ldots & (xx^{r-1}) & x_i\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (x^{r-1}x) & \ldots & (x^{r-1}x^{r-1}) & x_i^{r-1}\\ (x^r x) & \ldots & (x^r x^{r-1}) & x_i^r\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(xx) & \ldots & (xx^{r-1}) & (xx^{r+1})\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (x^{r-1}x) & \ldots & (x^{r-1}x^{r-1}) & (x^{r-1}x^{r+1})\\ (x^r x & \ldots & (x^r x^{r-1}) & (x^r x^{r+1})\end{vmatrix}\right)\right.$$

1 Brunel, Math. Ann. 19.

2 Landsberg, Crelle. 114.

$$-\Delta_r\left(\begin{vmatrix}(xx) & \dots (xx^{r-1}) & x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x^{r-1}x) & \dots (x^{r-1}x^{r-1}) & x_i^{r-1} \\ (x^r x) & \dots (x^r x) & x^r\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(xx) & \dots (xx^{r-2}) & (xx^r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x^{r-1}x) & \dots (x^{r-2}x^{r-2}) & (x^{r-2}x^r) \\ (x^{r-1}x) & \dots (x^{r-1}x^{r-2}) & (x^{r-1}x^r)\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix}(xx) & \dots (xx^{r-1}) \\ \vdots & \vdots \\ (x^{r-2}x) & \dots (x^{r-2}x^{r-1}) \\ (x^{r-1}x) & \dots (x^{r-1}x^{r-1})\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(xx) & \dots (xx^{r-2}) & (xx^r) & x_i \\ \vdots & & & \\ (x^{r-1}x) & \dots (x^{r-1}x^{r-2}) & (x^{r-1}x^r) & x_i^{r-1} \\ (x^r x) & \dots (x^r x^{r-2}) & (x^r x^r) & x_i^r\end{vmatrix}\right)\Bigg\}.$$

Par l'emploi du théorème de Sylvester, on aura

$$\frac{d\ {}_r y_i}{dt} = \frac{1}{\Delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}\Delta_r^{\frac{3}{2}}}\left\{\Delta_{r-1}^2 N_{r+1} - \Delta_r^2 N_{r-1}\right\};$$

ici

$$N_r = \begin{vmatrix}(xx) & \dots\dots (xx^{r-1}) & x_i \\ (x'x) & \dots\dots (x'x^{r-1}) & x_i' \\ \vdots & \vdots & \\ (x^r x) & \dots\dots (x^r x^{r-1}) & x_i^r\end{vmatrix}.$$

Par suite

$$\frac{d\ {}_r y_i}{ds} = \frac{{}_{r+1}y_i}{R_r} - \frac{{}_{r-1}y_i}{R_{r-1}}, \quad (r = 1,\ 2,\ \dots\dots,\ n-1) \qquad (2).$$

De même

$$\frac{d\ {}_0 y_i}{ds} = \frac{{}_1 y_i}{k}, \quad \frac{d_n y_i}{ds} = -\frac{{}_{n-1}y_i}{R_{n-1}} \qquad (3).$$

Ce sont les formules cherchées. Dans le cas $n=3$, on aura les formules suivantes

$$\frac{d\ {}_0 y_i}{ds} = \frac{{}_1 y_i}{R_0}, \quad \frac{d\ {}_1 y_i}{ds} = \frac{{}_2 y_i}{R_1} - \frac{{}_0 y_i}{R_0},$$

$$\frac{d\ {}_2 y_i}{ds} = \frac{{}_3 y_i}{R_2} - \frac{{}_1 y_i}{R_1}, \quad \frac{d\ {}_3 y_i}{ds} = -\frac{{}_2 y_i}{R_2}.$$

Les formules sont déja obtenues par Bianchi.[1] En divisant les deux membres de l'équation (2) par k^2 et considérant les limites, il en suit les formules dans un espace euclidien

---

[1] Voir Bianchi. Lezioni di Geometria Différenziale, p. 457. A. Razzaboni: Le formale del Frenet in geometria iperbolica e laro applicazioni. (Bologna, Gamberini 1897).

$$\frac{d\,{}_r a_i}{ds}=\frac{{}_{r-1}a_i}{R_r}-\frac{{}_{r-1}a_i}{R_{r-1}}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4}$$

De même

$$\frac{d\,{}_1 a_i}{ds}=\frac{{}_2 a_i}{R_2},\quad \frac{d\,{}_n a_i}{ds}=\frac{{}_{n-1}a_i}{R_{n-1}}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{5}$$

ici

$$
{}_r a_i=\frac{\begin{vmatrix} (x'x') & \ldots\ldots & (x'x^{r-1}) & x'_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x^r x') & \ldots\ldots & (x^r x^{r-1}) & x^r_i \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (x'x') & \ldots\ldots & (x'x^{r-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (x^{r-1}x') & \ldots\ldots & (x^{r-1}x^{r-1}) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} (x'x') & \ldots\ldots & (x'x^r) \\ \vdots & & \vdots \\ (x^r x') & \ldots\ldots & (x^r x^r) \end{vmatrix}}}.
$$

$(i=\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n).$

On voit que

$$({}_r a\,{}_s a)=0,\qquad (r\neq s);$$

$$({}_r a\,{}_s a)=1,\qquad (r=s).$$

Les formules (4) et (5) ont été obtenues aussi par Brunel et Landsberg.