数理解析研究所講究録 1380 巻 2004 年 80-93

Conditional confidence intervals for a location-scale parameter family of distributions

早大・理工　小方 浩明 (Hiroaki Ogata)
筑波大・数学　赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1　はじめに

統計的推測においては, 未知母数 θ をもつ母集団分布からの大きさ n の無作為標本 $\mathbf{X}:=(X_1,\cdots,X_n)$ に基づく十分統計量 $S=S(\mathbf{X})$ が存在すれば, すなわち S を与えたときに $\mathbf{X}$ の条件付分布が θ に無関係であれば, S を用いて未知母数に関する推測を行えばよいことはよく知られている (Lehmann and Casella(1998)). しかし, 十分統計量が存在しないような場合には, どうすればよいかという問題が生じる. このような場合に, Fisher(1934) は, 全標本 $\mathbf{X}$ が補助統計量 (すなわち, その分布が θ に無関係な統計量) $A=A(\mathbf{X})$ と, 統計量 $T=T(\mathbf{X})$ の組に 1 対 1 対応すれば, 全標本から得られる θ に関する情報量は (T,A) から得られる情報量に等しいことを述べた. 一般に, 統計量 A, (T,A) の θ に関する情報量をそれぞれ $I_A(\theta)$, $I_{T,A}(\theta)$ とし, また A を与えたときの T の条件付分布 $P^{\theta}_{T|A}$ による θ に関する情報量を $I_{T|A}(\theta)$ とすれば, 関係式

$$I_{T,A}(\theta)=E_\theta[I_{T|A}(\theta)]+I_A(\theta)$$

が成り立つ. いま, A が補助統計量であれば, $I_A(\theta)\equiv 0$, $I_{T,A}(\theta)=E_\theta[I_{T|A}(\theta)]$ となり, また, $I_{\mathbf{X}}(\theta)=I_{T,A}(\theta)$ となるから, 条件付分布 $P^{\theta}_{T|A}$ を考えることによって統計量 T の情報損失を完全に回復できる. その後, Cox(1975) は, この条件付推測の考え方に基づいて, 条件尤度の概念を導入して生物統計学の分野への大きな貢献をした (Cox and Takeuchi(1981), Reid(1995)).

本論においては, 条件付推測の観点から区間推定について論じる. 本節の最初に述べた補助統計量 A と統計量 T の組に基づく枢軸量を $U_\theta:=U_\theta(T,A)$ とし, 補助統計量 A を与えたときの T の条件付分布 $P^{\theta}_{T|A}$ を用いて, 任意の α $(0<\alpha<1)$ について

$$P^{\theta}_{T|A}\{u_1\le U_\theta(T,A)\le u_2\}=1-\alpha$$

となる u_1, u_2 をとる. このとき, $\{\theta\mid u_1\le U_\theta(T,A)\le u_2\}$ が閉区間 $[\underline{\theta}(T,A),\ \bar{\theta}(T,A)]$ になれば, これを信頼係数 $1-\alpha$ の θ の条件付信頼区間といい, この区間の構成について考察する.

2　両側指数分布における最尤推定量に基づく条件付信頼区間

第 1 節で述べたように, 補助統計量による条件付操作を行うことによって損失を回復できる. そのことを示す 1 つの例として, 両側指数分布の位置母数 θ の推定問題を考える. か

つて, Fisher(1925) はその位置母数 θ の点推定に関して, 最尤推定量, すなわち標本中央値が情報量損失を起こすことを指摘した. もっと一般に, 順序統計量の情報量損失を計算することもできる (Akahira and Takeuchi(1995) の第 4 章参照). Fisher(1934) は両側指数分布の場合に, 条件付情報量の期待値の計算についても大まかに言及している.

後に, Kappenman(1975) は, 両側指数分布の場合に, 位置母数および尺度母数の条件付信頼区間を, 最尤推定量を用いて求めた. 本節ではこの方法について, Kappenman(1975) に従って述べる.

まず, $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立にいずれも p.d.f.

$$f(x;\xi,\tau) = \frac{1}{\tau}\, g\left(\frac{x-\xi}{\tau}\right) \qquad \left(x \in \mathbf{R}^1,\ \theta \in \mathbf{R}^1,\ \tau \in \mathbf{R}^+ := (0,\infty)\right) \tag{1}$$

に従う確率変数とする. このような p.d.f. を持つ分布を**位置尺度母数分布**といい, ξ を**位置母数**(location parameter), τ を**尺度母数**(scale parameter) という. いま, ξ, τ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator 略して MLE) すなわち尤度関数 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\xi,\tau)$ を最大にする ξ, τ をそれぞれ $\hat{\xi} = \hat{\xi}(\mathbf{X})$, $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\mathbf{X})$ とする. ただし, $\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ とする.

定理 1 (Antle and Bain (1969)). ξ_0, τ_0 をそれぞれ ξ, τ の真値とする. このとき, 最尤推定量 $\hat{\xi}, \hat{\tau}$ について,

$$\hat{\tau}_s := \frac{\hat{\tau}}{\tau_0}, \quad \hat{\xi}_s := \frac{\hat{\xi}-\xi_0}{\tau_0}, \quad \hat{\xi}_p := \frac{\hat{\xi}-\xi_0}{\hat{\tau}}$$

の分布はそれぞれ ξ, τ に無関係である.

特に, 両側指数分布の場合, すなわち (1) において,

$$g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} \tag{2}$$

となる場合について考える.

しかし, この場合には, 最尤推定量 $\hat{\xi}, \hat{\tau}$ は, これらによってネイマンの因子分解定理の形に分解できないため, 十分統計量とはならないから, $\hat{\xi}, \hat{\tau}$ を用いて推定すると, 全標本が持っている情報量の損失を起こす. そこで, 条件付推測の観点から, Kappenman(1975) は補助統計量を与えたときの条件付分布を用いて, 次のようにして条件付信頼区間を求めた. いま,

$$u_i = \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\tau}}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

とおく. このとき

$$u_i = \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\tau}} = \left(\frac{x_i - \xi_0}{\tau_0} - \frac{\hat{\xi}-\xi_0}{\tau_0}\right)\frac{\tau_0}{\hat{\tau}} = \frac{x_i' - \hat{\xi}_s}{\hat{\tau}_s}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

となるから, 定理1より $(U_1,\cdots,U_n)$ が補助統計量であることがわかる. そこで, $(U_1,\cdots,U_n)$ を与えたときの

$$V := \frac{\hat{\xi}-\xi}{\hat{\tau}}, \quad W := \frac{\hat{\tau}}{\tau}$$

のそれぞれの条件付分布を求めていこう.

まず, $(X_1,\cdots,X_n)$ を, g が (2) となる p.d.f.(1) を持つ分布からの大きさ n の無作為標本とし, $n \geq 3$ とする. このとき, 尤度関数は

$$L(\xi,\tau;\mathbf{x}) := \left(\frac{1}{2\tau}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n |x_i-\xi|\right\}$$

であり, 対数尤度関数は

$$l(\xi,\tau;\mathbf{x}) := \log L(\xi,\tau;\mathbf{x}) = -n\log 2 - n\log\tau - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n |x_i-\xi| \tag{4}$$

となる. ここで, $\tau(>0)$ を任意に固定して ξ を動かして, $\sum_{i=1}^n |x_i-\xi|$ を最小にする ξ を求めると,

$$\hat{\xi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_{(m)} & (n=2m-1), \\ \frac{1}{2}(x_{(m)}+x_{(m+1)}) & (n=2m) \end{cases} \tag{5}$$

になるから, ξ の最尤推定量は $\hat{\xi}(\mathbf{X})$ となる.

次に, (4) の ξ に (5) の $\hat{\xi}$ を代入すると,

$$l_{\hat{\xi}}(\tau;\mathbf{x}) = -n\log 2 - n\log\tau - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n |x_i-\hat{\xi}|$$

となり, これを最大にするような τ は,

$$\hat{\tau}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i-\hat{\xi}| \tag{6}$$

となる. よって $\hat{\tau}(\mathbf{X})$ は τ の最尤推定量になる.

そこで, (5), (6) で与えられる (ξ,τ) の最尤推定量 $(\hat{\xi},\hat{\tau})$ を用いて, 補助統計量 (3) を考えるが, いまの場合, $n=2m-1$ のとき $u_{(m)}=0$, $n=2m$ のとき $u_{(m)}=-u_{(m+1)}$ となり, また,

$$\sum_{i=1}^n |u_i| = \frac{1}{\hat{\tau}}\sum_{i=1}^n |x_i-\hat{\xi}| = \frac{1}{\hat{\tau}}(n\hat{\tau}) = n$$

という関係式も成り立つ. したがって, $u_{(n)}$ は $n-2$ 個の $u_{(1)},\cdots,u_{(m-1)},u_{(m+1)},\cdots u_{(n-1)}$ の関数となることが分かる. このとき, $\mathbf{U} := (U_{(1)},\cdots,U_{(m-1)},U_{(m+1)},\cdots U_{(n-1)})$ $= (u_{(1)},\cdots,u_{(m-1)},u_{(m+1)},\cdots u_{(n-1)}) =: \mathbf{u}$ を与えたときの, (V,W) の条件付 (c.)p.d.f. は

$$f_{V,W|\mathbf{U}}(v,w|\mathbf{u}) = Kw^{n-1}\exp\left\{-w\sum_{i=1}^n |v+u_{(i)}|\right\} \tag{7}$$

になる. ただし

$$K=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)}\left\{c_{\mathbf{u}}(u_{(j)})\right\}^{-n+1}\right]^{-1} & (n=2m-1),\\ \frac{1}{\Gamma(n-1)}\left[\sum^{n}_{\substack{j=1\\ j\neq m,m+1}}\frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)}\left\{c_{\mathbf{u}}(u_{(j)})\right\}^{-n+1}\right. & \\ \qquad\left.+\left\{c_{\mathbf{u}}(0)\right\}^{-n+1}+(n-1)\left\{c_{\mathbf{u}}(0)\right\}^{-n}\left(u_{(m+1)}-u_{(m)}\right)\right]^{-1} & (n=2m)\end{cases}$$

とする. さらに, $\mathbf{U}=\mathbf{u}$ を与えたときの V の c.p.d.f.

$$\begin{aligned}f_{V|\mathbf{U}}(v|\mathbf{u}) &= K\int_0^{\infty}w^{n-1}\exp\left[-w\sum_{i=1}^{n}|v+u_{(i)}|\right]dw\\ &= K\Gamma(n)\left[\sum_{i=1}^{n}|v+u_{(i)}|\right]^{-n}\end{aligned}\tag{8}$$

を得る. よって (8) より, 任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ について

$$\mathbf{P}_{V|\mathbf{U}}\{v_1<V<v_2\}=1-\alpha$$

となる $v_1, v_2(v_1<v_2)$ をとれるから, $V=(\hat{\xi}-\xi)/\hat{\tau}$ より

$$\mathbf{P}_{V|\mathbf{U}}\{\hat{\xi}-v_2\hat{\tau}<\xi<\hat{\xi}-v_1\hat{\tau}\} \;=\; 1-\alpha$$

になり, ξ の信頼区間 $[\hat{\xi}-v_2\hat{\tau},\ \hat{\xi}-v_1\hat{\tau}]$ が求められる.

同様にして, $\mathbf{U}=\mathbf{u}$ を与えたときの W の c.p.d.f. は

$$f_{W|\mathbf{U}}(w|\mathbf{u})=\begin{cases}Kw^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)w}\exp\left[-wc_{\mathbf{u}}(u_{(j)})\right] & (n=2m-1)\\ Kw^{n-1}\left\{\sum^{n}_{\substack{j=1\\ j\neq m,m+1}}\frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)w}\exp\left[-wc_{\mathbf{u}}(u_{(j)})\right]\right. & \\ \qquad\left.+\left(\frac{1}{w}+u_{(m+1)}-u_{(m)}\right)\exp[-wc_{\mathbf{u}}(0)]\right\} & (n=2m)\end{cases}\tag{9}$$

となる. よって (9) より, 任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ について

$$\mathbf{P}_{W|\mathbf{U}}\{w_1<W<w_2\}=1-\alpha$$

となる $w_1, w_2(w_1<w_2)$ をとれるから, $W=\hat{\tau}/\tau$ より

$$\mathbf{P}_{V|\mathbf{U}}\left\{\frac{\hat{\tau}}{w_2}<\tau<\frac{\hat{\tau}}{w_1}\right\} \;=\; 1-\alpha$$

になり, τ の信頼区間 $[\hat{\tau}/w_2,\ \hat{\tau}/w_1]$ が求められる.

3 位置尺度母数分布族における条件付信頼区間

第2節において紹介した Kappenman(1975) においては, 両側指数分布の位置母数, 尺度母数の最尤推定量から成る補助統計量による条件付分布を用いたが, 最尤推定量を用いる必要はない.

一般に, 位置尺度母数分布族の母数推定問題において, **共変推定量**(equivariant estimator) を用いても, 第2節と同様にして枢軸量を作ることができる. 実際, 共変推定量の中で最もリスクが小さくなる推定量 (**minimum risk equivariant(MRE) 推定量**) を見つけ, それに基づいて条件付区間推定を行う. 実は, 第2節の場合には最尤推定量も共変推定量の1つであり, 従って, MRE 推定量に基づいた条件付区間推定の方がより一般的である.

本節では, Lehmann and Casella (1998)(の第3章), Takeuchi(2003) と同様の方法によって位置尺度母数分布族において MRE 推定量を考える. そしてそれに基づく枢軸量をつくり, 補助統計量を与えたときの枢軸量の条件付分布を用いて条件付信頼区間について考察する. まず, $X_1,\cdots,X_n$ を p.d.f.(1) を持つ位置尺度母数分布に従う確率変数とする.

定義　推定量 $\tilde{\xi}(X_1,\cdots,X_n)$, $\tilde{\tau}(X_1,\cdots,X_n)$, $\tilde{\psi}(X_1,\cdots,X_n)$ が, 任意の $\xi\in\mathbf{R}$ と任意の $\tau>0$ に対して,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(\tau x_1+\xi,\cdots,\tau x_n+\xi) &= \tau\,\tilde{\xi}(x_1,\cdots,x_n)+\xi,\\ \tilde{\tau}(\tau x_1+\xi,\cdots,\tau x_n+\xi) &= \tau\,\tilde{\tau}(x_1,\cdots,x_n),\\ \tilde{\psi}(\tau x_1+\xi,\cdots,\tau x_n+\xi) &= \tilde{\psi}(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned} \tag{10}$$

という性質を満たしているとき, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{\psi}$ をそれぞれ**位置尺度共変推定量**, **尺度共変推定量**, **不変推定量**という.

定理 2　$\tilde{\xi}$, $\tilde{\tau}$ をそれぞれ位置尺度共変推定量, 尺度共変推定量とすると,

$$\tilde{V}=\frac{\tilde{\xi}-\xi}{\tilde{\tau}},\quad \tilde{W}=\frac{\tilde{\tau}}{\tau} \tag{11}$$

は枢軸量であり,

$$\tilde{U}_i=\frac{X_i-\tilde{\xi}}{\tilde{\tau}}\qquad (i=1,\cdots,n)$$

は補助統計量である.

証明　まず, $x_i':=(x_i-\xi)/\tau$, $(i=1,\cdots,n)$ とすると, $(X_1',\cdots,X_n')$ の分布は母数に無関係になる. このとき, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{u}_i$ $(i=1,\cdots,n)$ は, それぞれ

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \frac{\tilde{\xi}(x_1,\cdots,x_n)-\xi}{\tilde{\tau}(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\tilde{\xi}(x_1-\xi,\cdots,x_n-\xi)}{\tilde{\tau}(x_1-\xi,\cdots,x_n-\xi)}=\frac{\tilde{\xi}(x_1-\xi,\cdots,x_n-\xi)/\tau}{\tilde{\tau}(x_1-\xi,\cdots,x_n-\xi)/\tau}\\ &= \frac{\tilde{\xi}(\frac{x_1-\xi}{\tau},\cdots,\frac{x_n-\xi}{\tau})}{\tilde{\tau}(\frac{x_1-\xi}{\tau},\cdots,\frac{x_n-\xi}{\tau})}=\frac{\tilde{\xi}(x_1',\cdots,x_n')}{\tilde{\tau}(x_1',\cdots,x_n')},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &= \frac{\tilde{\tau}(x_1,\cdots,x_n)}{\tau} = \frac{\tilde{\tau}(x_1-\xi,\cdots,x_n-\xi)}{\tau} = \tilde{\tau}\left(\frac{x_1-\xi}{\tau},\cdots,\frac{x_n-\xi}{\tau}\right) \\
&= \tilde{\tau}\left(x_1',\cdots,x_n'\right), \\
\tilde{u}_i &= \frac{x_i-\tilde{\xi}(x_1,\cdots,x_n)}{\tilde{\tau}(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{(x_i-\xi)/\tau-(\tilde{\xi}(x_1,\cdots,x_n)-\xi)/\tau}{\tilde{\tau}(x_1,\cdots,x_n)/\tau} \\
&= \frac{\frac{x_i-\xi}{\tau}-\tilde{\xi}(\frac{x_1-\xi}{\tau},\cdots,\frac{x_n-\xi}{\tau})}{\tilde{\tau}(\frac{x_1-\xi}{\tau},\cdots,\frac{x_n-\xi}{\tau})} = \frac{x_i'-\tilde{\xi}(x_1',\cdots,x_n')}{\tilde{\tau}(x_1',\cdots,x_n')} \quad (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$

となるから, $\tilde{V},\tilde{W},\tilde{U}_i\,(i=1,\cdots,n)$ はいずれも $X_1',\cdots,X_n'$ の関数となり, 従ってそれらの分布は母数に依存しない. □

定理 3 　$\tilde{\xi}_0(\mathbf{X})$, $\tilde{\tau}_0(\mathbf{X})$ をそれぞれ任意の位置尺度共変推定量, 尺度共変推定量とすると, $\tilde{\xi}(\mathbf{X})$ は,

$$\tilde{\xi}(\mathbf{X}) = \tilde{\xi}_0(\mathbf{X}) - \tilde{\psi}(\mathbf{X})\tilde{\tau}_0(\mathbf{X}) \tag{12}$$

という形に表されるときのみ位置尺度共変推定量である. ただし, $\tilde{\psi}(\mathbf{X})$ は不変推定量とし, $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ とする.

証明 　まず, $\tilde{\xi}(\mathbf{X})$ が (12) の形で表されているとすると,

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}(\tau\mathbf{x}-\xi) &= \tilde{\xi}_0(\tau\mathbf{x}-\xi)-\tilde{\psi}(\tau\mathbf{x}-\xi)\tilde{\tau}_0(\tau\mathbf{x}-\xi) \\
&= \tau\,\tilde{\xi}_0(\mathbf{x})-\xi-\tilde{\psi}(\mathbf{x})\,\tau\,\tilde{\tau}_0(\mathbf{x}) \\
&= \tau\,(\tilde{\xi}_0(\mathbf{x})-\tilde{\psi}(\mathbf{x})\tilde{\tau}_0(\mathbf{x}))-\xi \\
&= \tau\,\tilde{\xi}(\mathbf{x})-\xi
\end{aligned}$$

となるので, $\tilde{\xi}(\mathbf{X})$ は位置尺度共変推定量となる. ただし, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ とする. 逆に, $\tilde{\xi}(\mathbf{X})$ が位置尺度共変推定量とし,

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{\tilde{\xi}_0(\mathbf{x})-\tilde{\xi}(\mathbf{x})}{\tilde{\tau}_0(\mathbf{x})}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(\tau\mathbf{x}-\xi) &= \frac{\tilde{\xi}_0(\tau\mathbf{x}-\xi)-\tilde{\xi}(\tau\mathbf{x}-\xi)}{\tilde{\tau}_0(\tau\mathbf{x}-\xi)} \\
&= \frac{(\tau\,\tilde{\xi}_0(\mathbf{x})-\xi)-(\tau\,\tilde{\xi}(\mathbf{x})-\xi)}{\tau\,\tilde{\tau}_0(\mathbf{x})} \\
&= \frac{\tilde{\xi}_0(\mathbf{x})-\tilde{\xi}(\mathbf{x})}{\tilde{\tau}_0(\mathbf{x})} \\
&= \tilde{\psi}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

となるので (10), (12) が成り立つ. □

定理 4　$\tilde{\tau}_0(\mathbf{X})$ を任意の尺度共変推定量とすると, $\tilde{\tau}(\mathbf{X})$ は,

$$\tilde{\tau}(\mathbf{X}) = \tilde{\psi}(\mathbf{X})\tilde{\tau}_0(\mathbf{X}) \tag{13}$$

という形で表されるときのみ尺度共変推定量である. ただし, $\tilde{\psi}(\mathbf{X})$ は不変推定量である.

証明については定理 3 と同様にすればよい. 定理 3, 4 より, 位置尺度共変推定量, 尺度推定量の全体は, 不変推定量を動かすことで得ることができる. 次の定理は, 不変推定量に関する命題である.

定理 5　$\tilde{\psi}(\mathbf{X})$ は

$$Z_i := \frac{X_i - X_n}{X_{n-1} - X_n} \quad (i = 1, \cdots, n-2), \qquad Z_{n-1} = \frac{X_{n-1} - X_n}{|X_{n-1} - X_n|} \tag{14}$$

の関数であるときのみ不変推定量である.

証明　$\tilde{\psi}(\mathbf{X})$ が不変推定量, すなわち $\psi(\mathbf{x})$ が (10) を満たすとすると, (10) において $\tau = 1/|x_{n-1} - x_n|$, $\xi = x_n/|x_{n-1} - x_n|$ とおけば,

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}(x_1, \cdots, x_n) \\ = \ & \tilde{\psi}\left(\frac{x_1 - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}, \cdots, \frac{x_{n-2} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}, \frac{x_{n-1} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}, 0\right) \end{aligned}$$

となり,

$$\left(\frac{x_1 - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}, \cdots, \frac{x_{n-2} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}, \frac{x_{n-1} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}\right)$$

と

$$\left(\frac{x_1 - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \cdots, \frac{x_{n-2} - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \frac{x_{n-1} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}\right)$$

は 1 対 1 対応なので, $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ は (14) の関数となる.

逆に, $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ は (14) の関数, つまり

$$\tilde{\psi}(x_1, \cdots, x_n) = \omega\left(\frac{x_1 - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \ \cdots, \ \frac{x_{n-2} - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \ \frac{x_{n-1} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}\right)$$

と表されているとすると,

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}(\tau x_1 + \xi, \cdots, \tau x_n + \xi) \\ = \ & \omega\left(\frac{(\tau x_1 + \xi) - (\tau x_n + \xi)}{(\tau x_{n-1} + \xi) - (\tau x_n + \xi)}, \cdots, \frac{(\tau x_{n-2} + \xi) - (\tau x_n + \xi)}{(\tau x_{n-1} + \xi) - (\tau x_n + \xi)}, \frac{(\tau x_{n-1} + \xi) - (\tau x_n + \xi)}{|(\tau x_{n-1} + \xi) - (\tau x_n + \xi)|}\right) \\ = \ & \omega\left(\frac{x_1 - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \ \cdots, \ \frac{x_{n-2} - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \ \frac{x_{n-1} - x_n}{|x_{n-1} - x_n|}\right) \\ = \ & \tilde{\psi}(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

となり, $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ は (10) を満たす. □

次の命題は, 上記の $\mathbf{Z} = (Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ が補助統計量であることを示している.

定理 6 $\mathbf{Y} := (Y_1, \cdots, Y_{n-1}) := (X_1 - X_n, \cdots, X_{n-1} - X_n)$ の分布は ξ に依存しない.
また,

$$\mathbf{Z} := (Z_1, \cdots, Z_{n-2}, Z_{n-1}) = \left(\frac{X_1 - X_n}{X_{n-1} - X_n}, \cdots, \frac{X_{n-2} - X_n}{X_{n-1} - X_n}, \frac{X_{n-1} - X_n}{|X_{n-1} - X_n|} \right)$$

の分布は ξ, τ に依存しない.

証明 まず,

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_n \\ \quad \cdots \\ Y_{n-1} = X_{n-1} - X_n \\ T = X_n \end{cases}$$

と変数変換すると,

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 + T \\ \quad \cdots \\ X_{n-1} = Y_{n-1} + T \\ X_n = T \end{cases}$$

となり, ヤコビアンは $J = \partial \mathbf{X} / \partial (\mathbf{Y}, T) = 1$ なので, $(\mathbf{Y}, T)$ の同時 (j.)p.d.f. は

$$f_{\mathbf{Y},T}(\mathbf{y}, t) = \left(\frac{1}{\tau} \right)^n \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} g\left(\frac{y_i + t - \xi}{\tau} \right) \right\} g\left(\frac{t - \xi}{\tau} \right)$$

となり, $\mathbf{Y}$ の周辺 (m.)p.d.f. は

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau} \right)^n \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} g\left(\frac{y_i + t - \xi}{\tau} \right) \right\} g\left(\frac{t - \xi}{\tau} \right) dt$$

となる. ただし, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_{n-1})$ とする. さらに, $t' = t - \xi$ と変数変換すると, $dt = dt'$, $-\infty < t' < \infty$ より,

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\tau} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} g\left(\frac{y_i + t'}{\tau} \right) \right\} g\left(\frac{t'}{\tau} \right) dt'$$

となり, $\mathbf{Y}$ の分布は ξ に依存しない.

次に,

$$\begin{cases} Z_1 = Y_1 / Y_{n-1} \\ \quad \cdots \\ Z_{n-2} = Y_{n-2} / Y_{n-1} \\ S = Y_{n-1} \end{cases}$$

と変数変換すると,

$$\begin{cases} Y_1 = Z_1 S \\ \quad\cdots \\ Y_{n-2} = Z_{n-2} S \\ Y_{n-1} = S \end{cases}$$

となり, ヤコビアンは $J = \partial\mathbf{Y}/\partial(\mathbf{Z}, S) = s^{n-2}$ なので $(Z_1, \cdots, Z_{n-2}, S)$ の j.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{Z_1,\cdots,Z_{n-2},S}(z_1, \cdots, z_{n-2}, s) \\ = \ & \left(\frac{1}{\tau}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\prod_{i=1}^{n-2} g\left(\frac{z_i s + t'}{\tau}\right)\right\} g\left(\frac{s+t'}{\tau}\right) g\left(\frac{t'}{\tau}\right) dt' \cdot s^{n-2} \end{aligned}$$

となる. このとき, $(Z_1, \cdots, Z_{n-2})$ の m.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{Z_1,\cdots,Z_{n-2}}(z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ = \ & \left(\frac{1}{\tau}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\prod_{i=1}^{n-2} g\left(\frac{z_i s + t'}{\tau}\right)\right\} g\left(\frac{s+t'}{\tau}\right) g\left(\frac{t'}{\tau}\right) s^{n-2}\, dt'\, ds \end{aligned} \tag{15}$$

となる. また, $s' = s/\tau$ と変数変換すると, $ds = \tau\, ds'$, $-\infty < s' < \infty$ より, (15) から

$$\begin{aligned} & f_{Z_1,\cdots,Z_{n-2}}(z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ = \ & \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\prod_{i=1}^{n-2} g\left(z_i s' + \frac{t'}{\tau}\right)\right\} g\left(s' + \frac{t'}{\tau}\right) g\left(\frac{t'}{\tau}\right) s'^{n-2}\, dt'\, ds' \end{aligned} \tag{16}$$

となる. さらに, $t'' = t'/\tau$ と変数変換すると, $dt' = \tau\, dt''$, $-\infty < t'' < \infty$ より, (16) から

$$\begin{aligned} & f_{Z_1,\cdots,Z_{n-2}}(z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ = \ & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\prod_{i=1}^{n-2} g\left(z_i s' + t''\right)\right\} g\left(s' + t''\right) g\left(t''\right) s'^{n-2}\, dt''\, ds' \end{aligned}$$

となる. よって, $(Z_1, \cdots, Z_{n-2})$ の分布は ξ, τ に依存しない. また, Z_{n-1} は, $Y_{n-1} \geq 0, Y_{n-1} < 0$ のときそれぞれ $1, -1$ をとる. 先ほどと同様に Y_{n-1} の p.d.f. を求めると

$$f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) = \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{y_{n-1}+t}{\tau}\right) g\left(\frac{t}{\tau}\right) dt$$

となる. 従って

$$P(Y_{n-1} \geq 0) = \int_0^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{y_{n-1}+t}{\tau}\right) g\left(\frac{t}{\tau}\right) dt\right\} dy_{n-1} \tag{17}$$

となる. ここで, $s = y_{n-1}/\tau$ とすると, $dy_{n-1} = \tau\, ds$, $0 < s < \infty$ より, (17) から

$$P(Y_{n-1} \geq 0) = \int_0^{\infty} \left\{\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(s + \frac{t}{\tau}\right) g\left(\frac{t}{\tau}\right) dt\right\} ds \tag{18}$$

となる. さらに, $t' = t/\tau$ とすると, $dt = \tau\, dt'$, $-\infty < t' < \infty$ より, (18) から

$$P(Y_{n-1} \geq 0) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s+t') g(t')\, dt'\, ds$$

となる. よって, Z_{n-1} の分布は ξ, τ に依存しないから, $\mathbf{Z}$ の分布は ξ, τ に依存しない. □

次に, 位置尺度共変推定量全体のクラスあるいは, 尺度共変推定量全体のクラスの中で, MRE 推定量を求める. 定理 3〜5 より, それは $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ の関数である $\tilde{\psi}$ を決定することになる. MRE 推定量を考えるには, まず, ξ, τ に関するそれぞれの損失関数を

$$L(\xi, d) = \left(\frac{d-\xi}{\tau}\right)^2, \tag{19}$$

$$L(\tau, d) = \left(\frac{d-\tau}{\tau}\right)^2 \tag{20}$$

と定義する. また, 推定量のリスクは平均損失で定義する.

定理 7　　損失関数 (19), (20) の下で, ξ, τ のそれぞれの MRE 推定量は

$$\tilde{\xi}^*(\mathbf{X}) = \tilde{\xi}_0(\mathbf{X}) - \frac{E_{\xi=0,\tau=1}[\tilde{\xi}_0(\mathbf{X})\tilde{\tau}_0(\mathbf{X})|\mathbf{Z}]}{E_{\xi=0,\tau=1}[(\tilde{\tau}_0(\mathbf{X}))^2|\mathbf{Z}]}\,\tilde{\tau}_0(\mathbf{X}) \tag{21}$$

$$\tilde{\tau}^*(\mathbf{X}) = \frac{E_{\tau=1}[\tilde{\tau}_0(\mathbf{Y})|\mathbf{Z}]}{E_{\tau=1}[(\tilde{\tau}_0(\mathbf{Y}))^2|\mathbf{Z}]}\,\tilde{\tau}_0(\mathbf{Y}) \tag{22}$$

である. ただし, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ はそれぞれ定理 6 のそれらと同じであり, $\tilde{\xi}_0(\mathbf{X}), \tilde{\tau}_0(\mathbf{X})$ はそれぞれ任意の位置尺度共変推定量, 尺度共変推定量とする.

証明　　定理 5 より, 定理 3 において, $\tilde{\psi}(\mathbf{X})$ を

$$\omega_1^*(\mathbf{Z}) := \frac{E_{\xi=0,\tau=1}[\tilde{\xi}_0(\mathbf{X})\tilde{\tau}_0(\mathbf{X})|\mathbf{Z}]}{E_{\xi=0,\tau=1}[(\tilde{\tau}_0(\mathbf{X}))^2|\mathbf{Z}]}, \tag{23}$$

とし, 定理 4 において, $\tilde{\psi}(\mathbf{X})$ を

$$\omega_2^*(\mathbf{Z}) := \frac{E_{\tau=1}[\tilde{\tau}_0(\mathbf{Y})|\mathbf{Z}]}{E_{\tau=1}[(\tilde{\tau}_0(\mathbf{Y}))^2|\mathbf{Z}]} \tag{24}$$

とすれば, 損失が (19), (20) であることから, それぞれの MRE 推定量が得られる. □

次に, MRE 推定量 (21), (22) を用いて, 第 2 節と同様 ξ, τ の条件付区間推定を行う. まず位置尺度共変推定量, 尺度共変推定量として, それぞれ

$$\tilde{\xi}_0(\mathbf{X}) = X_n =: \tilde{U}, \quad \tilde{\tau}_0(\mathbf{X}) = |X_{n-1} - X_n| =: \tilde{S}$$

をとる. このとき, (21)〜(24) より, ξ, τ の MRE 推定量 $\tilde{\xi}^*(\mathbf{X})$, $\tilde{\tau}^*(\mathbf{X})$ は, それぞれ

$$\tilde{\xi}^*(\mathbf{X}) = \tilde{U} - \tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})\tilde{S}, \quad \tilde{\tau}^*(\mathbf{X}) = \tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})\tilde{S}$$

になり,

$$\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) = \frac{E_{\xi=0,\tau=1}[X_n|X_{n-1} - X_n| \mid \mathbf{Z}]}{E_{\xi=0,\tau=1}[|X_{n-1} - X_n|^2 \mid \mathbf{Z}]}$$

$$\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z}) = \frac{E_{\tau=1}[|X_{n-1} - X_n| \mid \mathbf{Z}]}{E_{\tau=1}[|X_{n-1} - X_n|^2 \mid \mathbf{Z}]}$$

になる. これらの MRE 推定量 $\tilde{\xi}^*, \tilde{\tau}^*$ を用いて, 枢軸量として, (11) より

$$\tilde{v}^* = \frac{\tilde{\xi}^* - \xi}{\tilde{\tau}^*}, \quad \tilde{w}^* = \frac{\tilde{\tau}^*}{\tau}$$

をとる. また, 補助統計量として $\mathbf{Z}$ を用いる.

いま, $\mathbf{X}$ の p.d.f. は $(1/\tau)^n \prod_{i=1}^n g((x_i - \xi)/\tau)$ であるから, $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathbf{t}} \mapsto (\tilde{u}, \tilde{s}, z_1, \cdots z_{n-2})^{\mathbf{t}}$ と変数変換すると

$$\begin{cases} x_1 = z_1\tilde{s} + \tilde{u} \\ \quad \cdots \\ x_{n-2} = z_{n-2}\tilde{s} + \tilde{u} \\ x_{n-1} = z_{n-1}\tilde{s} + \tilde{u} \\ x_n = \tilde{u} \end{cases}$$

となる. ここで, 一見, z_{n-1} は変数に見えるが, ± 1 という値しかとらないので, 定数扱いだということに注意. いま, ヤコビアンは $J = \partial(\mathbf{X})/\partial(\mathbf{Z}, \tilde{S}, \tilde{U}) = |z_{n-1}\tilde{s}^{n-2}| = \tilde{s}^{n-2}$ であるから, $(\tilde{U}, \tilde{S}, \mathbf{Z})$ の j.p.d.f. は

$$f_{\tilde{U},\tilde{S},\mathbf{Z}}(\tilde{u}, \tilde{s}, z_1, \cdots, z_{n-2}) = \left(\frac{1}{\tau}\right)^n \tilde{s}^{n-2} \prod_{i=1}^n g\left(\frac{z_i\tilde{s} + \tilde{u} - \xi}{\tau}\right)$$

となる. ただし, 便宜上, $z_n = 0$ とする. さらに, $(\tilde{u}, \tilde{s}, z_1, \cdots z_{n-2})^{\mathbf{t}} \mapsto (\tilde{v}^*, \tilde{w}^*, z_1, \cdots z_{n-2})^{\mathbf{t}}$ と変数変換すると

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tau\tilde{v}^*\tilde{w}^* + \frac{\tau\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})}\tilde{w}^* + \xi \\ \tilde{s} = \frac{\tau}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})}\tilde{w}^* \end{cases}$$

となり, ヤコビアンは $J = \partial(\tilde{U}, \tilde{S})/\partial(\tilde{V}^*, \tilde{W}^*) = \tau^2\tilde{w}^*/\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{z})$ である. よって, $(\tilde{V}, \tilde{W}, \mathbf{Z})$ の j.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{\tilde{V}^*,\tilde{W}^*,\mathbf{Z}}(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*, z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ = & \left(\frac{1}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{z})}\right)^{n-1} \tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^n g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{z}) + z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right] \end{aligned}$$

となり, $\mathbf{Z}$ を与えたときの $(\tilde{V}^*, \tilde{W}^*)$ の c.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{\tilde{V}^*,\tilde{W}^*|\mathbf{Z}}(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*|z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ = & \frac{\tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^n g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right]}{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^n g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right] d\tilde{v}^* d\tilde{w}^*} \end{aligned}$$

となる. そして, $\mathbf{Z}$ を与えたときの $\tilde{V}^*$ の c.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{\tilde{V}^*|\mathbf{Z}}(\tilde{v}^*|z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ = & \frac{\int_0^\infty \tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^n g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right] d\tilde{w}^*}{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^n g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right] d\tilde{v}^* d\tilde{w}^*} \end{aligned} \tag{25}$$

になり, $\mathbf{Z}$ を与えたときの $\tilde{W}^*$ の c.p.d.f. は

$$f_{\tilde{W}^*|\mathbf{Z}}(\tilde{w}^*|z_1,\cdots,z_{n-2}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^{n} g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})+z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right] d\tilde{v}^*}{\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w^*}^{n-1} \prod_{i=1}^{n} g\left[\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})+z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} + \tilde{v}^*\right)\tilde{w}^*\right] d\tilde{v}^* d\tilde{w}^*} \tag{26}$$

となる. よって, (25) より, 任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ について,

$$\mathbf{P}_{\tilde{V}^*|\mathbf{Z}}\{v_1 < \tilde{v}^* < v_2\} = 1-\alpha$$

となる v_1, v_2 を求めれば

$$\mathbf{P}_{\tilde{V}^*|\mathbf{Z}}\{\tilde{\xi}^* - v_2\tilde{\tau}^* < \xi < \tilde{\xi}^* - v_1\tilde{\tau}^*\} = 1-\alpha$$

となるから, ξ の信頼区間 $[\tilde{\xi}^* - v_2\tilde{\tau}^*,\ \tilde{\xi}^* - v_1\tilde{\tau}^*]$ が得られる. また, (26) より, 任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ について,

$$\mathbf{P}_{\tilde{W}^*|\mathbf{Z}}\{w_1 < \tilde{w}^* < w_2\} = 1-\alpha$$

となる w_1, w_2 を求めれば

$$\mathbf{P}_{\tilde{W}^*|\mathbf{Z}}\left\{\frac{\tilde{\tau}^*}{w_2} < \tau < \frac{\tilde{\tau}^*}{w_1}\right\} = 1-\alpha$$

となるから, τ の信頼区間 $[\tilde{\tau}^*/w_2,\ \tilde{\tau}^*/w_1]$ が得られる.

特に, (1) において

$$g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} \qquad (x \in \mathbf{R}^1) \tag{27}$$

とすれば第 2 節と同じように両側指数分布の位置母数と尺度母数を区間推定できる. 実際, (25), (27) より, $\mathbf{Z}$ を与えたときの $\tilde{V}^*$ の c.p.d.f. は

$$f_{\tilde{V}^*|\mathbf{Z}}(\tilde{v}^*|z_1,\cdots z_{n-2}) = K'\Gamma(n)\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{v}^* + \frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{z})+z_i}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{z})}\right|\right\}^{-n} \tag{28}$$

となり, (26), (27) より, $\mathbf{Z}$ を与えたときの $\tilde{W}^*$ の c.p.d.f. は

$$f_{\tilde{W}^*|\mathbf{Z}}(\tilde{w}^*|z_1,\cdots z_{n-2}) = \begin{cases} K'\tilde{w^*}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)\tilde{w^*}} \exp\left[-\tilde{w}^* c_{\mathbf{z}}\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})+z_j}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})}\right)\right] & (n=2m-1), \\ K'\tilde{w^*}^{n-1}\Bigg\{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m,m+1}}^{n} \frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)\tilde{w^*}} \exp\left[-\tilde{w}^* c_{\mathbf{z}}\left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})+z_j}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})}\right)\right] & \\ \quad + \left(\frac{1}{\tilde{w^*}} + \frac{z_{(m+1)}-z_{(m)}}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})}\right)\exp\left[-\tilde{w}^* c_{\mathbf{z}}\left(\frac{2\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z})+z_{(m)}+z_{(m+1)}}{2\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})}\right)\right]\Bigg\} & (n=2m) \end{cases} \tag{29}$$

となる. ただし

$$
K' = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)} \left[c_{\mathbf{z}} \left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_j}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} \right) \right]^{-n+1} \right)^{-1} & (n = 2m-1), \\ \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m, m+1}}^{n} \frac{2}{(2j-n)(n+2-2j)} \left[c_{\mathbf{z}} \left(\frac{\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_j}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} \right) \right]^{-n+1} \right. & \\ \quad + \left[c_{\mathbf{z}} \left(\frac{2\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_{(m)} + z_{(m+1)}}{2\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} \right) \right]^{-n+1} & \\ \quad \left. + (n-1) \left[c_{\mathbf{z}} \left(\frac{2\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{Z}) + z_{(m)} + z_{(m+1)}}{2\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} \right) \right]^{-n} \left(\frac{z_{(m+1)} - z_{(m)}}{\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{Z})} \right) \right)^{-1} & (n = 2m) \end{cases}
$$

とする. ここで, 第2節のKappenman(1975)のc.p.d.f. (8), (9) をそれぞれ(28), (29) と比較すると, 類似の形をしていることが分かる. 実際, (8), (9) の u_i を, $(\tilde{\omega_1}^*(\mathbf{z}) + z_i)/\tilde{\omega_2}^*(\mathbf{z})$ に置き換えれば(28), (29) を得る.

4 シミュレーション結果

p.d.f. $f(x;\xi,\tau) = (1/2\tau)\exp(-|x-\xi|/\tau)$ を持つ両側指数分布 $T\text{-}Exp(\xi,\tau)$ に従う大きさ33の無作為標本

$$
\begin{array}{l} 3.79,\ 2.90,\ 5.65,\ 2.75,\ 3.62,\ 0.89,\ 3.64,\ 6.91,\ 4.35,\ 5.83,\ 3.52, \\ 3.72,\ 3.52,\ 3.90,\ 3.89,\ 4.10,\ 5.13,\ 4.89,\ 3.68,\ 1.89,\ 2.59,\ 3.58, \\ 4.06,\ 4.78,\ 3.76,\ 3.25,\ 4.14,\ 4.23,\ 2.52,\ 3.22,\ 3.28,\ 4.25,\ 3.32 \end{array}
$$

を得たときに, 位置母数 ξ, 尺度母数 τ の信頼係数0.95の条件付信頼区間を求める. これらの標本より,

$$
\begin{aligned} \mathbf{z} \ = \ & (0.511,\ -0.456,\ 2.52,\ -0.624,\ 0.322,\ -2.64,\ 0.340,\ 3.89,\ 1.11,\ 2.72,\ 0.213, \\ & 0.435,\ 0.209,\ 0.629,\ 0.616,\ 0.842,\ 1.96,\ 1.70,\ 0.389,\ -1.55,\ -0.795,\ 0.279, \\ & 0.800,\ 1.59,\ 0.471,\ -0.0838,\ 0.883,\ 0.983,\ -0.868,\ -0.111,\ -0.0442,\ 1) \end{aligned}
$$

となる. このとき, $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ を与えたときの $\tilde{V}^*, \tilde{W}^*$ の条件付分布を用いると, $\alpha = 0.05$ について

$$
\mathbf{P}_{\tilde{V}^*|\mathbf{Z}}\{-0.31 \le \tilde{v}^* \le 0.28\} = 0.95
$$
$$
\mathbf{P}_{\tilde{W}^*|\mathbf{Z}}\{0.71 \le \tilde{w}^* \le 1.27\} = 0.95
$$

となり, いま,

$$
\tilde{\xi}^*(\mathbf{x}) = 3.73, \quad \tilde{\tau}^*(\mathbf{x}) = 0.76
$$

となるので, ξ, τ の95%条件付信頼区間はそれぞれ

$$
[3.52,\ 3.97], \quad [0.60,\ 1.07]
$$

となる. 実は, 上記の無作為標本は両側指数分布 $T\text{-}Exp(3.7,\ 0.7)$ から得られたものであるから, 上記の条件付信頼区間は妥当なものといえる.

5 おわりに

本論では, 十分統計量が存在しない場合に, Fisher(1934) によって提唱され, 後に Cox(1975) らによって大きく発展し, 生物統計学等の広い分野に適用可能となった条件付推測について論じた. まず, 通常の区間推定について述べた上で, 補助統計量を与えたときに, ある統計量 T の条件付分布を考えることによって, その統計量 T の情報量損失を回復できることを述べた. 特に, まず, Kappenman(1975) に従って, 両側指数分布の位置母数, 尺度母数の条件付区間推定を最尤推定量に基づいて述べ, さらに, 一般に, 位置尺度母数分布族の場合に, 補助統計量を与えたときの MRE 推定量に基づく枢軸量の条件付分布を用いて条件付信頼区間について論じた.

今後の課題としては, 実際に, 特定の位置尺度母数分布において, 補助統計量を与えたときのその枢軸量の条件付分布を求めた上で, その分布のパーセント点を与える表を作成すれば, 実用上有用になるので, そのような表の作成が望まれる. また, 大標本の観点からは Cox(1975) が提唱している partial likelihood の概念を通して漸近的に条件付区間推定を論じることもできるであろう.

参考文献

[1] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Lecture Notes in Statistics **107**, Springer, New York.

[2] Antle, C. E. and Bain, L. J. (1969). A property of maximum likelihood estimators of location and scale parameters. *SIAM Review,* **11** 251-253

[3] Cox, D. R. (1975). Partial likelihood. *Biometrika,* **62**, 269-276

[4] Cox, D. R. and Takeuchi, K. (1981). On conditional inference. (In Japanese), *Applied Statistics,* **10**, 77-91

[5] Fisher, R. A. (1925). Theory of statistical estimation. *Proc. Camb. Phil. Soc.,* **22**, 700-725

[6] Fisher, R. A. (1934). Two new properties of mathematical likelihood. *Proc. Roy. Soc.* A, **144**, 285-307

[7] Kappenman, R. F. (1975). Conditional confidence intervals for double exponential distribution parameters. *Technometrics,* **17** 233-235

[8] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* (2nd ed.), Springer, New York.

[9] Reid, N. (1995). The roles of conditioning in inference. *Statistical Science,* **10** 138-199

[10] Takeuchi, K. (2003). Some theorems on invariant estimators of location. To appear.