

Some approaches to confidence intervals for a restricted parameter

筑波大・理工 清水 淳史 (Atsushi Shimizu)
 筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

実験物理においては、母数が本来、正 (あるいは非負) であることが理論的に仮定されている場合が少なくない。そこで、誤差を含む観測値から未知の母数を区間推定する問題がある。誤差の大きさが未知母数の値とほぼ同じ大きさである場合には母数が正であることを考慮しない通常の信頼区間は負の範囲を含んでしまうし、またそれを正 (または非負) に限定した区間は空集合になることもあり得る。そしてこの問題について多くの方法が物理学者らから提案されているが ([FC98], [M02], [MS00a], [MS00b], [RW99], [RW01]), 数理統計学の立場からは基本的には Bayesian と Non-Bayesian の2つの観点がある。Bayesian の場合は母数の存在範囲に事前分布を限定すればよく、その場合そのような事前分布が適当であるかの考慮が必要であるが、それは一般の場合と本質的には変わりはない。

一方, Non-Bayesian, すなわち頻度主義者の立場からは、区間推定問題は一群の仮説検定問題を考えて、与えられた標本値に対し、その点を受容域に含まれるような仮説に対応する母数の集合をとればよい。すなわち、母数を $\theta > 0$ とすると、任意の $\theta = \theta_0 > 0$ に対して、仮説 $\theta = \theta_0$ を対立仮説 $\theta \neq \theta_0, \theta > 0$ を検定する (何らかの意味で良い) 水準 α の検定を受容域を $A(\theta_0)$ とするとき、観測値 X に対し、 $X \in A(\theta_0)$ となるような θ_0 の集合を $C(X)$ とすれば、 $\theta > 0$ のとき

$$P_\theta \{ \theta \in C(X) \} = P_\theta \{ X \in A(\theta) \} = 1 - \alpha$$

となるから、信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼域 $C(X)$ が得られ、それが区間ならば信頼区間が得られる。

本論では、制約のある母数の信頼区間の構成を Bayes 法と頻度主義法を組み合わせた方法によって行い、従来の信頼区間との数値的比較を行う ([AST03], [SAT03])。

2 正值母数の信頼区間の従来の構成法

本論では、Mandelkern [M02] のサーベイに従って、正值母数に対する信頼区間の従来の構成について述べる。いま、 X_1, \dots, X_n をたがいに独立に、いずれも正規分布 $N(\mu, \sigma_0^2)$ に従う確率変数とする。ただし、 $\mu > 0$, σ_0 は既知とする。

2.1 枢軸法

上記の無作為標本 X_1, \dots, X_n に基づく標本平均 $\bar{X} := (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ を基準化して

$$T(\bar{X}, \mu) := \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma_0 \sim N(0, 1)$$

とすれば, 区間

$$\left[\max \left\{ 0, \bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}, \max \left\{ 0, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\} \right]$$

は信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間となる. ただし, $u_{\alpha/2}$ は $N(0, 1)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点とする. しかし, 信頼区間は, 例えば, $n = 1, \sigma_0 = 1, \alpha = 0.3173$ のとき, $\bar{x} \leq -1$ において区間としては空集合となってしまい, 過小評価であるということが指摘されている (図 2.1 参照). そのため, 様々な信頼区間の構成法が提案されている.

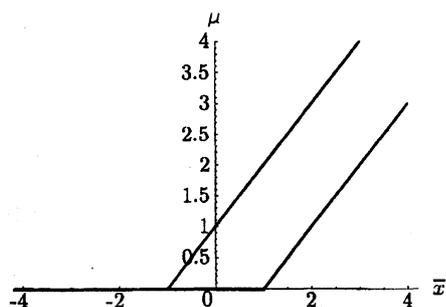
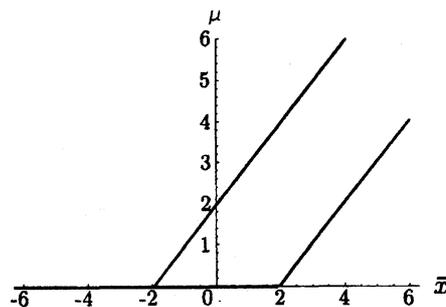


図 2.1: 枢軸法による 68.27% 信頼限界



枢軸法による 95% 信頼限界

2.2 ベイズ法

第 2.1 節のような枢軸法とは異なるベイズ的観点から, 信頼区間の構成を考える. 以後では $\sigma_0 = 1$ であると仮定する. まず, 母数 μ の事前分布として一般一様分布, すなわち

$$\pi(\mu) = \begin{cases} 1 & (\mu > 0), \\ 0 & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

に従うとすると, $\bar{X} = \bar{x}$ を与えたときの μ の事後密度は,

$$f(\bar{x}) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} (\mu - \bar{x})^2 \right\} d\mu = \Phi(\sqrt{n}\bar{x})$$

となるため,

$$\begin{aligned} f(\mu|\bar{x}) &:= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\Phi(\sqrt{n}\bar{x})} \exp \left\{ -\frac{n}{2} (\mu - \bar{x})^2 \right\} \\ &= \frac{\sqrt{n}\phi(\sqrt{n}(\bar{x} - \mu))}{\Phi(\sqrt{n}\bar{x})} \end{aligned}$$

となる. ここで, $\phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の確率密度関数 (probability density function, 略して p.d.f.) とし, $\Phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の累積分布関数 (cumulative distribution function, 略して c.d.f.) とする. このとき, μ の信頼区間 $[s(\bar{X}), t(\bar{X})]$ は,

$$\begin{cases} [s(\bar{x}), t(\bar{x})] = \{\mu | f(\mu|\bar{x}) \geq c\}, \\ P_{\mu} \{s(\bar{x}) \leq \mu \leq t(\bar{x})\} = 1 - \alpha \end{cases}$$

を解くことにより

$$[\max\{\bar{X} - d(\bar{X}), 0\}, \bar{X} + d(\bar{X})]$$

となる。ただし、 $d(\bar{X})$ は

$$d(\bar{X}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1} \left(1 - \alpha \Phi(\sqrt{n}\bar{X}) \right) & (\bar{X} \leq x_0), \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \alpha) \Phi(\sqrt{n}\bar{X}) \right) & (\bar{X} > x_0) \end{cases}$$

であり、境界点 x_0 は

$$x_0 := \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)$$

である。ここで、 Φ^{-1} は Φ の逆関数とする。第 2.1 節の特別な場合としては、 μ の信頼区間は、通常の枢軸法よりも $\alpha = 0.3173$, $\bar{x} \leq -1$ において、ある程度幅を持たせたものとなっていることがわかる (図 2.2 参照, Roe and Woodroffe [RW01]).

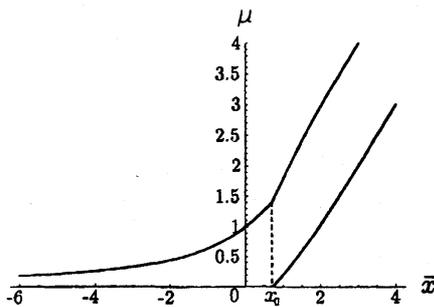
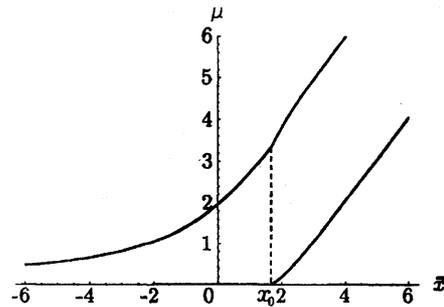


図 2.2: ベイズ法による 68.27% 信頼限界



ベイズ法による 95% 信頼限界

2.3 尤度法

いま、 $\bar{X} = \bar{x}$ を与えたとき、 μ の尤度関数 L は

$$L(\mu|\bar{x}) := \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} (\mu - \bar{x})^2 \right\}$$

となる。このとき、 μ の最尤推定量 $\hat{\mu}_{ML}$ は $\mu > 0$ という制約により

$$\hat{\mu}_{ML} := \max\{\bar{X}, 0\}$$

となる。したがって、

$$L(\hat{\mu}_{ML}|\bar{x}) := \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} & (\bar{x} > 0), \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \bar{x}^2 \right\} & (\bar{x} \leq 0) \end{cases}$$

になるから、尤度比検定統計量は

$$R(\bar{X}) := \frac{L(\mu|\bar{X})}{L(\hat{\mu}_{ML}|\bar{X})} = \begin{cases} \exp\{-n(\bar{X} - \mu)^2/2\} & (\bar{X} > 0), \\ \exp\{n(\mu\bar{X} - \mu^2/2)\} & (\bar{X} \leq 0) \end{cases}$$

になる。そこで、 $0 < \alpha < 1$ 、与えられた μ_0 について

$$\begin{cases} R(s(\mu_0)) = R(t(\mu_0)), \\ \Phi(\sqrt{n}(t(\mu_0) - \mu_0)) - \Phi(\sqrt{n}(s(\mu_0) - \mu_0)) = 1 - \alpha \end{cases}$$

となる $s(\mu_0)$, $t(\mu_0)$ を求めると、区間 $[s(\mu_0), t(\mu_0)]$ は受容域となるので、そこから信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間を得ることができる (第1節および図 2.3 参照, Feldman and Cousins [FC98]).

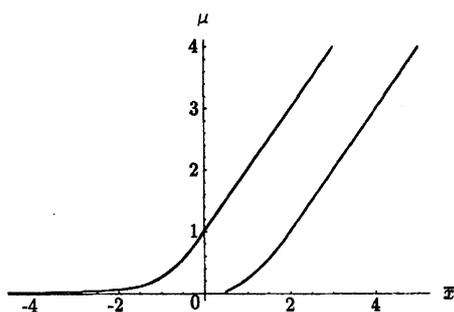
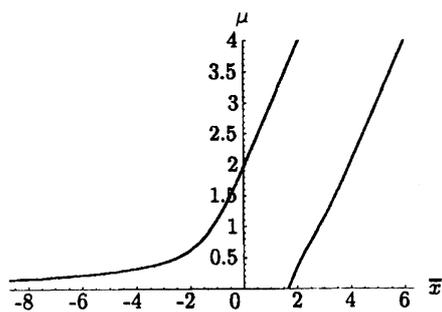


図 2.3: 尤度による 68.27% 信頼限界



尤度法による 95% 信頼限界

2.4 その他の信頼区間

制約条件 $\mu > 0$ を組み込んだ尤度関数

$$L(\mu) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \right] \theta(\mu)$$

を考える。ただし、 $\theta(\mu) = 1$ ($\mu > 0$); $= 0$ ($\mu \leq 0$) とする。このとき、 μ の最尤推定量は $\hat{\mu}_{ML} := \max\{\bar{X}, 0\}$ になり、その p.d.f は

$$f_{\hat{\mu}_{ML}}(\mu^*; \mu) = \left[\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n(\mu^* - \mu)^2}{2} \right\} \right] \chi_{\mu^*} + \delta(\mu^*) \{1 - \Phi(\sqrt{n}\mu)\}$$

になる。ただし、 $\chi_{\mu^*} = 1$ ($\mu^* > 0$); $= 0$ ($\mu^* \leq 0$), δ は Dirac のデルタ測度とする。これから μ の信頼区間を得ることができる (図 2.4 参照, Mandelkern and Schultz [MS00a]). しかし、この場合には上側信頼限界は一定となってしまう、あまり良い信頼区間とは言えない。

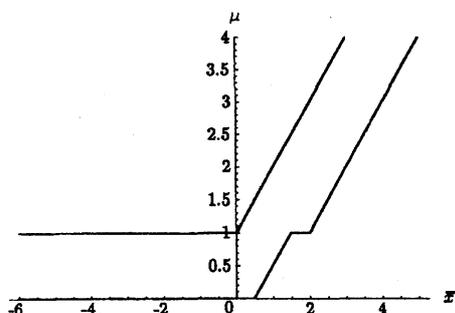
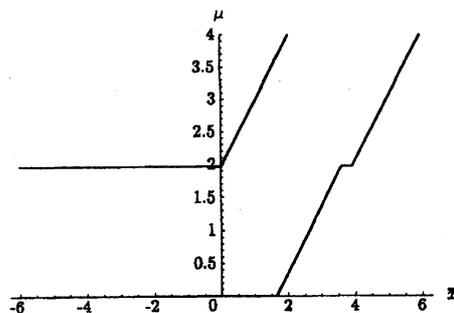


図 2.4: [MS00a] による 68.27% 信頼限界



[MS00a] による 95% 信頼限界

3 ベイズ・頻度主義法による信頼区間の構成

いま, X_1, \dots, X_n をたがいに独立にいずれも正規分布 $N(\mu, 1)$ に従う確率変数とする. ただし, $\mu > 0$ とする. このとき, 仮説 $H: \mu = \mu_0$ に対する対立仮説 K として, μ が事前分布 $\pi(\mu) = 1 (\mu > 0); = 0 (\mu \leq 0)$ に従うという, 水準 α の検定問題を考える. このとき, 検定統計量として

$$R(\bar{x}) := \frac{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu) d\mu}{\prod_{i=1}^n f(x_i, \mu_0)} = \frac{\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)^2\right\} d\mu}{\exp\left\{-\frac{n}{2}(\bar{x} - \mu_0)^2\right\}}$$

を用いれば, 右端の分子は置換積分によって,

$$\int_{-\sqrt{n}\bar{x}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - \Phi(-\sqrt{n}\bar{x}) = \Phi(\sqrt{n}\bar{x})$$

となるから, 統計量は

$$\begin{aligned} R(\bar{x}) &= \frac{\Phi(\sqrt{n}\bar{x})}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0))} \\ &= \frac{\Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0))}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})} \quad (t := \bar{x} - \mu_0) \\ &=: R(t) \end{aligned}$$

となる. ただし, ϕ, Φ はそれぞれ $N(0, 1)$ の p.d.f., c.d.f. とする. ここで, 水準 α のこの検定を受容域を求めるために, $T = \bar{X} - \mu_0$ が $N(0, 1/n)$ に従うことを用いて,

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\mu_0} \{R(t) > \lambda\} \\ &= \int_{\{t|R(t) > \lambda\}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{ns^2}{2}\right) ds \\ &= \int_{\{t|R(t) > \lambda\}} \sqrt{n}\phi(\sqrt{ns}) ds \end{aligned}$$

を満たすように, ある正数 λ を定める. ところで, 上式の積分範囲の $\{\dots\}$ について,

$$R(t) > \lambda \iff \frac{\Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0))}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})} > \lambda \iff \Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0)) > \lambda\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})$$

となり, Φ は単調増加関数, ϕ は単峰な関数であるから, 両者の交点は高々2つであることが示すことができる.

補題 3.1 $\Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0))/\phi(\sqrt{nt}) = \sqrt{n}\lambda$ となる t は存在すれば, 高々2つである.

証明 まず, $\Phi(t + c)/\phi(t) = \lambda$ となる t について考える.

$$G(t) := \Phi(t + c) - \lambda\phi(t)$$

とおく. ここで, $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = 0$ である. また,

$$\begin{aligned} G'(t) &= \phi(t+c) + \lambda t \phi(t) = \phi(t) \left\{ \frac{\phi(t+c)}{\phi(t)} + \lambda t \right\} \\ &= \phi(t) \left\{ \lambda t + \exp\left(-ct - \frac{c^2}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

となる. このとき, $\lambda > 0$ であることに注意すれば,

$$y = \exp\left(-ct - \frac{c^2}{2}\right), \quad y = -\lambda t$$

より, 次の2つの場合に分けられる.

- (i) $c < 0$ のとき, $G'(t) = 0$ となる t は唯1つ (図 3.1),
- (ii) $c > 0$ のとき, $G'(t) = 0$ となる t は高々2つ (図 3.2).

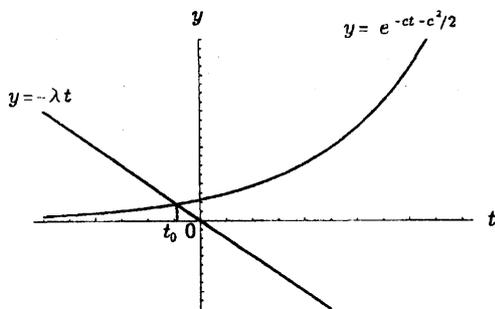


図 3.1: $c < 0$ のときの $G'(t) = 0$ の点 $t = t_0$

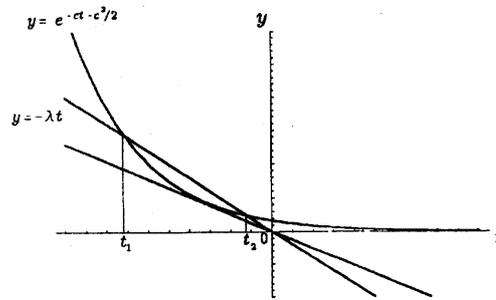


図 3.2: $c > 0$ のときの $G'(t) = 0$ の点 $t = t_1, t_2$

(i) の場合, $G'(t_0) = 0$ とすると, $G(t)$ の増減表は

| | | | |
|---------|---|-------|---|
| t | | t_0 | |
| $G'(t)$ | - | 0 | + |
| $G(t)$ | ↘ | | ↗ |

となるから, $G(t) = 0$ となる解は唯1つ存在 (図 3.3 参照).

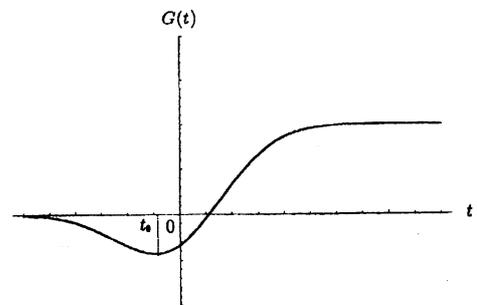


図 3.3: (i) の場合

(ii) の場合,

・ $G'(t) = 0$ の唯1つの解 t_0 が存在するとき, $G(t)$ の増減表は

| | | | |
|---------|---|-------|---|
| t | | t_0 | |
| $G'(t)$ | + | 0 | + |
| $G(t)$ | ↗ | | ↗ |

となるから, $G(t) = 0$ の解は存在しない (図 3.4 参照).

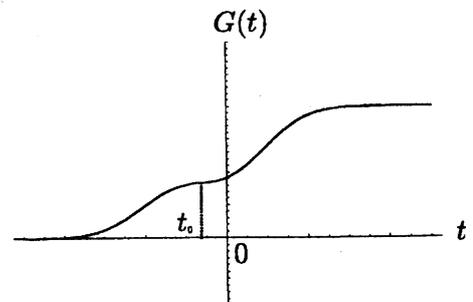


図 3.4: (ii) の場合

・ $G'(t)$ の解が 2 つ t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) が存在するとき, $G(t)$ の増減表は

| | | | | | |
|---------|---|-------|---|-------|---|
| t | | t_1 | | t_2 | |
| $G'(t)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $G(t)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

となるから, $G(t) = 0$ の解は高々 2 つ存在 (図 3.4, 図 3.5 参照).

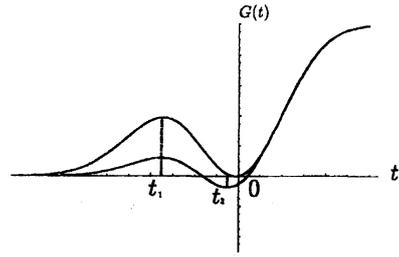


図 3.5 : (ii) の場合

以上により, 補題は示された. □

いま, $R(t) = \lambda$ の t の解が 2 つ存在する場合に,

$$\Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0)) = \lambda\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})$$

の両者の交点をそれぞれ \underline{t}, \bar{t} とすれば (図 3.6 参照), この検定の受容域, すなわち $\Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0)) \leq \lambda\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})$ となる t は

$$\underline{t}(\mu_0) \leq t \leq \bar{t}(\mu_0)$$

となる.

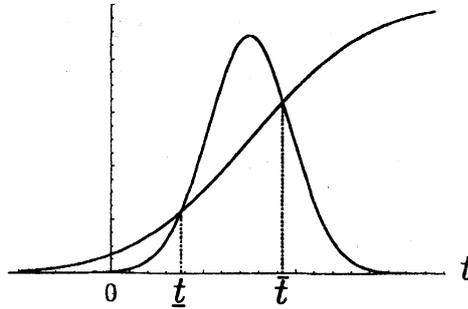


図 3.6 : $\Phi(\sqrt{n}(t + \mu_0)) = \lambda\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})$ の解 $t = \underline{t}, \bar{t}$

ところで, この \underline{t}, \bar{t} は

$$\frac{\Phi(\sqrt{n}(\bar{t} + \mu_0))}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{n\bar{t}})} = \frac{\Phi(\sqrt{n}(\underline{t} + \mu_0))}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{n\underline{t}})}$$

を満たすから,

$$\bar{z} := \sqrt{n\bar{t}}, \quad \underline{z} := \sqrt{n\underline{t}}, \quad m := \sqrt{n}\mu_0$$

とおいて,

$$\frac{\Phi(\bar{z} + m)}{\phi(\bar{z})} = \frac{\Phi(\underline{z} + m)}{\phi(\underline{z})} \tag{3.1}$$

とする. 一方, t, \bar{t} について

$$\begin{aligned}
 P\{t(\mu_0) \leq T \leq \bar{t}(\mu_0)\} &= 1 - \alpha, \\
 \Leftrightarrow \\
 P\{\sqrt{nt}(\mu_0) \leq \sqrt{n}T \leq \sqrt{n\bar{t}}(\mu_0)\} &= 1 - \alpha, \\
 (\sqrt{n}T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \sim N(0, 1)) \\
 \Leftrightarrow \\
 \Phi(\bar{z}) - \Phi(z) &= 1 - \alpha \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha &= P\{z \leq \sqrt{n}T \leq \bar{z}\} = P\{z \leq \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \leq \bar{z}\} \\
 &= P\{z \leq \sqrt{n}\bar{X} - m \leq \bar{z}\} = P\left\{\frac{z+m}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \frac{\bar{z}+m}{\sqrt{n}}\right\}
 \end{aligned}$$

であるから, \bar{X} は区間

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}(z+m), \frac{1}{\sqrt{n}}(\bar{z}+m) \right]$$

に確率 $1 - \alpha$ で入ると考えられる. つまり, (3.1), (3.2) を満たす z, \bar{z} を見つければ, 受容域から, μ に対する信頼区間を求めることができる (第1節参照).

次に, 上記と同様にして, 対立仮説 K として, μ の事前分布が p.d.f.

$$\mu \sim \pi(\mu) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\mu} & (\mu > 0, \lambda > 0), \\ 0 & (\mu \leq 0, \lambda > 0) \end{cases}$$

を持つ指数分布 $\text{Exp}(1/\lambda)$ に従うという場合にも受容域を得ることができる. ここで, 特に $\lambda \rightarrow 0$ とすれば, 指数分布 $\text{Exp}(1/\lambda)$ は一般一様分布に収束すると考えられる. さて, 事前指数分布の場合には検定統計量は

$$\begin{aligned}
 R(\bar{X}) &:= \frac{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu) \pi(\mu) d\mu}{\prod_{i=1}^n f(X_i, \mu_0)} \\
 &= \frac{\lambda \exp\left\{-\lambda\bar{X} + \frac{\lambda^2}{2n}\right\} \Phi\left(\sqrt{n}\bar{X} - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0))} \\
 &= \frac{\lambda \exp\left\{-\lambda(t + \mu_0) + \frac{\lambda^2}{2n}\right\} \Phi\left(\sqrt{n}(t + \mu_0) - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})} \quad (t := \bar{X} - \mu_0) \\
 &=: R(t)
 \end{aligned}$$

となり, ここから

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\mu_0} \{R(t) > c\} \\ &= \int_{\{t|R(t)>c\}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{ns^2}{2}\right\} ds \\ &= \int_{\{t|R(t)>c\}} \sqrt{n}\phi(\sqrt{ns}) ds \end{aligned}$$

を満たすようなある正数 c を定める. ここで, 上式の積分範囲について

$$\begin{aligned} R(t) > c &\iff \frac{\lambda \exp\left\{-\lambda(t + \mu_0) + \frac{\lambda^2}{2n}\right\} \Phi\left(\sqrt{n}(t + \mu_0) - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt})} > c \\ &\iff \lambda \exp\left\{-\lambda(t + \mu_0) + \frac{\lambda^2}{2n}\right\} \Phi\left(\sqrt{n}(t + \mu_0) - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) > c\sqrt{n}\phi(\sqrt{nt}) \end{aligned}$$

となり, 補題 3.1 から $R(t) = c$ を満たすような解 $t = \underline{t}$, \bar{t} は

$$\frac{\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sqrt{n}}z\right\} \Phi\left(z + m - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)}{\phi(z)} = \frac{\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\bar{z}\right\} \Phi\left(\bar{z} + m - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)}{\phi(\bar{z})}, \tag{3.3}$$

$$(z := \sqrt{nt}, \bar{z} := \sqrt{n\bar{t}}, m := \sqrt{n}\mu_0)$$

$$\Phi(\bar{z}) - \Phi(z) = 1 - \alpha \tag{3.4}$$

を満たす. また, \bar{X} は区間

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}(z + m), \frac{1}{\sqrt{n}}(\bar{z} + m) \right]$$

に確率 $1 - \alpha$ で入ると考えられる. つまり, (3.3), (3.4) を満たす z, \bar{z} を見つければ, 受容域から, μ に対する信頼区間を求めることができる (第 1 節参照, 図 3.7, 図 3.8 参照).

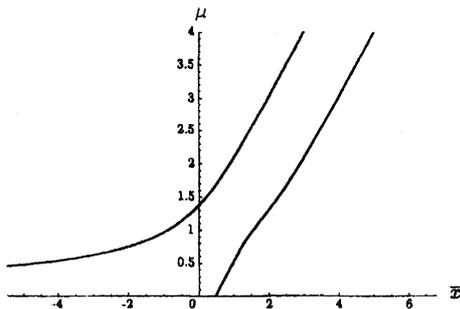


図 3.7: 事前一般一様分布による 68.27% 信頼限界

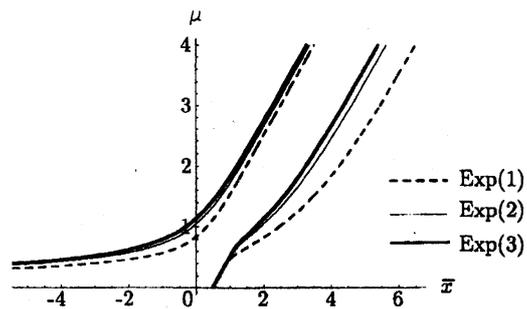


図 3.8: 事前指数分布 $\text{Exp}(1/\lambda)$ による 68.27% 信頼限界

4 信頼区間の数値的比較

第 2, 3 節で構成した区間をそれぞれ表にまとめ, 比較を行った. その結果, 尤度法による信頼区間は区間幅が短いという点で比較的安定しているが, ベイズ・頻度主義法による

信頼区間もそれに劣らず良い。また、尤度法による上側信頼限界が、 $x \rightarrow -\infty$ のとき、速く0に収束しているのに対して、ベイズ・頻度主義法による上側信頼限界が、 $x \rightarrow -\infty$ のとき、ゆっくりと0に収束しているのが特徴である。他の方法による信頼区間も許容的であり、一様に最適な信頼区間は存在しない。

表 4.1: 95% 信頼区間 ($n = 1$)

| \bar{x} | 枢軸法 | ベイズ法 | 尤度法 | [MS00a] |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| -4 | [0, 0] | [0, 0.660] | [0, 0.325] | [0, 1.960] |
| -3 | [0, 0] | [0, 0.817] | [0, 0.423] | [0, 1.960] |
| -2 | [0, 0] | [0, 1.052] | [0, 0.618] | [0, 1.960] |
| -1 | [0, 0.960] | [0, 1.412] | [0, 1.102] | [0, 1.960] |
| 0 | [0, 1.960] | [0, 1.960] | [0, 1.960] | [0, 1.960] |
| 1 | [0, 2.960] | [0, 2.723] | [0, 2.960] | [0, 2.960] |
| 2 | [0.040, 3.960] | [0.198, 3.802] | [0.355, 3.960] | [0.355, 3.960] |
| 3 | [1.040, 4.960] | [1.051, 4.949] | [1.141, 4.960] | [1.355, 4.960] |
| 4 | [2.040, 5.960] | [2.040, 5.960] | [2.040, 5.960] | [2.040, 5.960] |

ベイズ・頻度主義法 (事前一般一様分布および事前指数分布)

| \bar{x} | 一般一様分布 | Exp(1) | Exp(2) | Exp(3) |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| -4 | [0, 0.839] | [0, 0.502] | [0, 0.640] | [0, 0.698] |
| -3 | [0, 0.989] | [0, 0.572] | [0, 0.741] | [0, 0.813] |
| -2 | [0, 1.208] | [0, 0.674] | [0, 0.888] | [0, 0.981] |
| -1 | [0, 1.562] | [0, 0.919] | [0, 1.169] | [0, 1.281] |
| 0 | [0, 2.164] | [0, 1.666] | [0, 1.795] | [0, 1.886] |
| 1 | [0, 3.006] | [0, 2.648] | [0, 2.703] | [0, 2.764] |
| 2 | [0.355, 3.966] | [0.355, 3.647] | [0.355, 3.685] | [0.355, 3.736] |
| 3 | [1.337, 4.960] | [0.950, 4.646] | [1.180, 4.682] | [1.249, 4.731] |
| 4 | [2.182, 5.960] | [1.393, 5.646] | [1.793, 5.681] | [1.934, 5.730] |

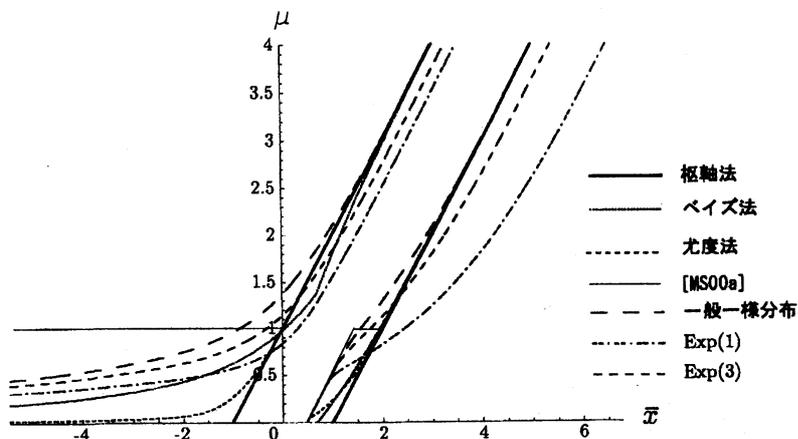


図 4.1: 68.27% 信頼限界

5 分散が未知の場合の正值平均の信頼区間

本節では、第3節と同様に、ベイズ・頻度主義法による信頼区間を、正規分布の分散が未知の場合に構成する。まず、 X_1, \dots, X_n をたがいに独立に、いずれも正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とする。ただし、 $\mu > 0, \sigma$ は未知とし、 $N(\mu, \sigma^2)$ の p.d.f. を $g(x; \mu, \sigma^2)$ とする。

このとき、帰無仮説 $H: \mu = \mu_0 (> 0), \sigma \sim \pi(\sigma) = 1/\sigma (\sigma > 0)$, 対立仮説 $K: (\mu, \sigma) \sim \pi(\mu, \sigma) = 1/\sigma (\mu > 0, \sigma > 0)$ の検定問題を考える。このとき、第3節と同様に検定統計量として

$$T(\mathbf{X}) := \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{i=1}^n g(x_i; \mu, \sigma^2) (1/\sigma) d\mu d\sigma}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n g(x_i; \mu_0, \sigma^2) (1/\sigma) d\sigma}$$

をとると、その右辺の分母は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n g(x_i; \mu_0, \sigma^2) \frac{d\sigma}{\sigma} &= \int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^{n+1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right\} d\sigma \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} (2\tau)^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\tau \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right\} d\tau \\ &= \frac{2^{(n/2)-1}}{(\sqrt{2\pi})^n} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right\}^{-n/2} \int_0^\infty y^{(n/2)-1} e^{-y} dy \\ &\hspace{15em} (y := \tau \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2) \\ &= C' \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right\}^{-n/2} \\ &= C' \{ (n-1)s_0^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2 \}^{-n/2} \\ &= C'' s_0^{-n} \left\{ 1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s_0^2} \right\}^{-n/2} \\ &= C s_0^{-n} \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma((n-1)/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-n/2} \\ &= C s_0^{-n} f_{n-1}(t) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$C' := \frac{2^{(n/2)-1} \Gamma(n/2)}{(\sqrt{2\pi})^n}, \quad C'' := C' (n-1)^{-n/2},$$

$$C := C'' \frac{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}, \quad s_0 := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

とする。このとき、

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^n g(x_i; \mu_0, \sigma^2) \frac{d\sigma}{\sigma} = C s_0^{-n} f_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s_0} \right)$$

となる。ただし、 $f_{n-1}(\cdot)$ は自由度 $n-1$ の t 分布 (t_{n-1} 分布) の p.d.f. とする。また、その分子については、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{i=1}^n g(x_i; \mu, \sigma^2) \frac{1}{\sigma} d\sigma d\mu &= \int_0^\infty C s_0^{-n} f_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s_0} \right) d\mu \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{x}/s_0} \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} dt \\ &\quad \text{(ここで、} t := \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/s_0 \text{とおく。)} \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{n}} F_{n-1}(\sqrt{n}\bar{x}/s_0) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $F_{n-1}(\cdot)$ は t_{n-1} 分布の c.d.f. とする。よって、求めたい統計量 $T(\bar{X})$ による受容域は

$$T(\bar{X}) = T_0(\bar{X}, S_0, \mu_0) = \frac{(S_0/\sqrt{n})F_{n-1}(\sqrt{n}\bar{X}/S_0)}{f_{n-1}(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S_0)} \leq \lambda. \quad (5.1)$$

の形となる。しかし、(5.1) を解くことは解析的に難しいので、 t 分布の正規近似を考える。

補題 5.1 ([T75]). 互いに独立な確率変数 U, Y について U が標準正規分布に従い、 νY^2 が自由度 ν のカイ 2 乗分布に従うとする。このとき、 t_ν 分布に従う確率変数の下側確率、すなわち c.d.f. は

$$P(t; \nu) = \Phi(t) - \phi(t) \left[\frac{1}{4\nu} t(t^2 + 1) + \frac{1}{96\nu^2} t(3t^6 - 7t^4 - 5t^2 - 3) \right] + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right) \quad (\nu \rightarrow \infty) \quad (5.2)$$

である。

証明 まず、確率変数 T は

$$T := U/Y = U/\sqrt{\nu Y^2/\nu} \sim t_\nu \text{ 分布}$$

であるから、 T の c.d.f. は

$$\begin{aligned} P(t; \nu) &= P\{T \leq t\} = P\{U/Y \leq t\} = P\{U \leq tY\} \\ &= E[P\{U \leq tY|Y\}] = E[\Phi(tY)] \end{aligned}$$

となるから、 $\Phi(tY)$ を Y の関数と見て、 $Y = 1$ の周りで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} P(t; \nu) &= \Phi(t) + t\phi(t)E[Y - 1] + \frac{1}{2}t^2\phi'(t)E[(Y - 1)^2] \\ &\quad + \frac{1}{6}t^3\phi''(t)E[(Y - 1)^3] + \frac{1}{24}t^4\phi^{(3)}(t)E[(Y - 1)^4] + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる. ここで, $\chi^2 := \nu Y^2$ とおくと

$$E[Y - 1] = E\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\chi^2}{\nu} - 1\right)} - 1\right]$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{\chi^2}{\nu} - 1\right)} &= \left\{1 + \left(\frac{\chi^2}{\nu} - 1\right)\right\}^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2\nu}(\chi^2 - \nu) - \frac{1}{8\nu^2}(\chi^2 - \nu)^2 \\ &\quad + \frac{3}{48\nu^3}(\chi^2 - \nu)^3 - \frac{15}{384\nu^4}(\chi^2 - \nu)^4 + \dots\end{aligned}$$

より,

$$E[Y - 1] = -\frac{1}{4\nu} + \frac{1}{32\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)$$

になる. また, 同様にして,

$$E[(Y - 1)^2] = \frac{1}{2\nu} - \frac{1}{16\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right),$$

$$E[(Y - 1)^3] = -\frac{1}{8\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right),$$

$$E[(Y - 1)^4] = \frac{3}{4\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)$$

となるから, (5.3) より

$$\begin{aligned}P(t; \nu) &= \Phi(t) + t\phi(t) \left\{-\frac{1}{4\nu} + \frac{1}{32\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{t^3}{2}\phi(t) \left\{\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{16\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)\right\} \\ &\quad + \frac{t^3}{6}(t^2 - 1)\phi(t) \left\{-\frac{1}{8\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)\right\} \\ &\quad + \frac{t^4}{24}(-t^3 + 3t)\phi(t) \left\{\frac{3}{4\nu^2} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)\right\}\end{aligned}$$

となり, これを整理して (5.2) を得る. \square

補題 5.1 より,

$$\begin{aligned}F_{n-1}(t) &= \Phi(t) - \frac{1}{4(n-1)}t(t^2 + 1)\phi(t) \\ &\quad - \frac{1}{96(n-1)^2}t(3t^6 - 7t^4 - 5t^2 - 3)\phi(t) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} f_{n-1}(t) &= F'_{n-1}(t) = \phi(t) + \frac{1}{4(n-1)}(t^4 - 2t^2 - 1)\phi(t) \\ &\quad + \frac{1}{4(n-1)}(3t^8 - 28t^6 + 30t^4 + 12t^2 + 3)\phi(t) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &=: q_{n-1}(t) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

になる. また, $Q_{n-1}(t) := \int_{-\infty}^t q_{n-1}(x)dx$ として, (5.1) の T の代わりに

$$\tilde{T}(\bar{X}, S_0, \mu_0) := \frac{(S_0/\sqrt{n})Q_{n-1}(\sqrt{n}\bar{X}/S_0)}{q_{n-1}(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S_0)} \quad (5.4)$$

を用いる. このとき, $t := \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/s_0$ とおいて,

$$\begin{cases} (s_0/\sqrt{n})Q_{n-1}\left(\underline{t} + \frac{\sqrt{n}\mu_0}{s_0}\right)/q_{n-1}(\underline{t}) = (s_0/\sqrt{n})Q_{n-1}\left(\bar{t} + \frac{\sqrt{n}\mu_0}{s_0}\right)/q_{n-1}(\bar{t}), \\ P\{\underline{t} \leq t \leq \bar{t}\} = 1 - \alpha \end{cases}$$

を満たす \underline{t}, \bar{t} を求めればよい. しかし, t と s_0 とは独立ではないため, この解を求めることは難しい. そこで, まず, σ を既知とすれば

$$P_{\mu_0, \sigma} \left\{ \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\underline{t}_0\left(\frac{\mu_0}{\sigma}\right) \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\bar{t}_0\left(\frac{\mu_0}{\sigma}\right) \right\} = 1 - \alpha$$

の形となるから, 受容域は

$$\left[\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\underline{t}_0\left(\frac{\mu_0}{\sigma}\right), \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\bar{t}_0\left(\frac{\mu_0}{\sigma}\right) \right]$$

になる. しかし, 実は σ は未知であるから, ここで, 簡便的に σ を S_0 に置き換えた

$$\left[\mu_0 + \frac{S_0}{\sqrt{n}}\underline{t}_0\left(\frac{\mu_0}{S_0}\right), \mu_0 + \frac{S_0}{\sqrt{n}}\bar{t}_0\left(\frac{\mu_0}{S_0}\right) \right]$$

を受容域とし, そこから信頼区間を構成する (図 5.1 参照). そのとき, 実際に, その信頼区間の被覆確率を求めると, たとえば $\alpha = 0.05$ のときに, ほぼ 95% の信頼係数を達成していることが分かる (表 5.1 参照).

表 5.1

$n = 5, \alpha = 0.05$ のときの被覆確率

| $\sigma^2 \setminus \mu$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.3 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | 94.955 | 95.022 | 95.023 | 95.014 | 94.970 |
| 1.0 | 94.910 | 95.025 | 95.001 | 95.016 | 94.988 |
| 1.5 | 94.995 | 94.922 | 94.961 | 94.994 | 95.025 |
| 2.0 | 95.019 | 94.967 | 95.021 | 95.039 | 94.997 |

$n = 10, \alpha = 0.05$ のときの被覆確率

| $\sigma^2 \setminus \mu$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.3 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | 95.060 | 94.977 | 94.959 | 95.023 | 94.971 |
| 1.0 | 95.027 | 95.007 | 95.006 | 95.012 | 95.021 |
| 1.5 | 94.965 | 95.047 | 95.041 | 95.015 | 94.969 |
| 2.0 | 94.987 | 95.000 | 95.001 | 94.986 | 94.967 |

$n = 50, \alpha = 0.05$ のときの被覆確率

| $\sigma^2 \setminus \mu$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.3 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | 94.252 | 94.940 | 95.024 | 95.058 | 94.989 |
| 1.0 | 94.209 | 94.747 | 94.995 | 94.974 | 94.984 |
| 1.5 | 94.237 | 94.572 | 94.964 | 95.010 | 95.000 |
| 2.0 | 94.216 | 94.417 | 94.922 | 95.062 | 95.060 |

$n = 100, \alpha = 0.05$ のときの被覆確率

| $\sigma^2 \setminus \mu$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.3 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | 94.475 | 94.994 | 95.003 | 95.078 | 95.014 |
| 1.0 | 94.323 | 94.736 | 95.040 | 95.004 | 94.985 |
| 1.5 | 94.342 | 94.904 | 95.070 | 94.990 | 95.055 |
| 2.0 | 94.257 | 94.838 | 95.022 | 95.012 | 95.033 |

$n = 150, \alpha = 0.05$ のときの被覆確率

| $\sigma^2 \setminus \mu$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.3 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | 94.775 | 94.995 | 95.052 | 95.055 | 95.035 |
| 1.0 | 94.484 | 95.037 | 95.043 | 95.007 | 95.053 |
| 1.5 | 94.437 | 94.987 | 95.004 | 95.075 | 95.048 |
| 2.0 | 94.427 | 94.999 | 95.027 | 95.006 | 95.029 |

6 制約付平均をもつポアソン分布の信頼区間

前節までは、正規分布 $N(\mu, \sigma_0^2)$ の平均 μ に正值または非負値の制約があるときの信頼区間の構成について考察した。同様にして、離散分布の典型であるポアソン分布 $Po(\lambda)$ の場合について考える。ただし、ポアソン分布の場合、母数 λ が正であるから、制約として、ある既知の正值 b (実験物理の分野での、background parameter) について理論上 $\lambda > b$ と分かっているときに信頼区間の構成について考察する。

6.1 通常の方法

いま, X_1, \dots, X_n をたがいに独立に, いずれもポアソン分布 $Po(\lambda := \mu + b)$ に従う確率変数とする. ただし, b は既知の母数とし, μ は正值で未知母数とする. このとき, 標本の総和 $Y := X_1 + \dots + X_n$ はポアソン分布の再生性より $Po(n\lambda)$ に従うから,

$$e^{-nl} \sum_{k=y}^{\infty} \frac{(nl)^k}{k!} = \alpha/2, \quad e^{-nu} \sum_{k=0}^y \frac{(nu)^k}{k!} = \alpha/2$$

を各 $y = 0, 1, 2, \dots$ に対して, l, u について解いて, 区間 $[l, u]$ を信頼区間とする (図 6.1 参照, Johnson, Kotz and Kemp [JKK93]). ここで, この区間は例えば, $\alpha = 0.1, n = 1, y = 0$ のとき, 区間が空集合になってしまうため正規分布の場合と同様に数々の信頼区間が提案されている.

6.2 ベイズ法

通常の方法と同じ設定の下で, Y は確率量関数 (probability mass function, 略して p.m.f.)

$$p(y|\lambda) = \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^y}{y!} \quad (y = 0, 1, \dots; \lambda > 0)$$

をもつポアソン分布に従い, $\lambda = \mu + b$ とすると, Y の p.m.f. は

$$p(y|\mu) = \frac{e^{-n(\mu+b)} \{n(\mu+b)\}^y}{y!} \quad (y = 0, 1, \dots; \mu > 0)$$

となる. このとき, 正規分布の場合と同様に, μ は事前分布として一般一様分布, すなわち

$$\pi(\mu) = \begin{cases} 1 & (\mu > 0), \\ 0 & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

とすると, Y の周辺 p.m.f. は

$$\begin{aligned} p(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(y, \mu) d\mu = \int_0^{\infty} \frac{e^{-n(\mu+b)} \{n(\mu+b)\}^y}{y!} d\mu \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^y \frac{e^{-nb} (nb)^k}{k!} =: \frac{1}{n} P_b(y) \end{aligned}$$

となるから, 事後分布は

$$p(\mu|y) = \frac{p(y, \mu)}{p(y)} = \frac{np(y|\mu)\pi(\mu)}{P_b(y)}$$

となる. これから, ある正值 c について

$$\begin{cases} \frac{P_{b+l}(y) - P_{b+u}(y)}{P_b(y)} = 1 - \alpha, \\ [l, u] = \{\mu | p(\mu|y) \geq c\} \end{cases}$$

となる l, u を求めると, 区間 $[l, u]$ は信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間になる (図 6.2 参照, Roe and Woodroffe [RW01]). ここで, ベイズ法により構成された信頼区間は通常の方法により構成されたものと異なり, 既知母数 b の値に依存して区間が空集合にならないように見える.

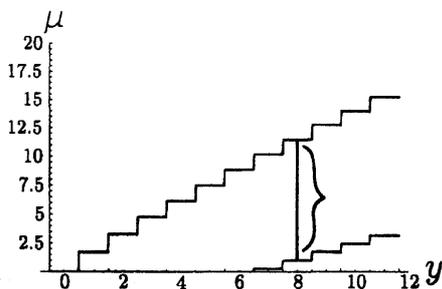


図 6.1: 通常の方法による 90% 信頼区間 ($b = 3$)

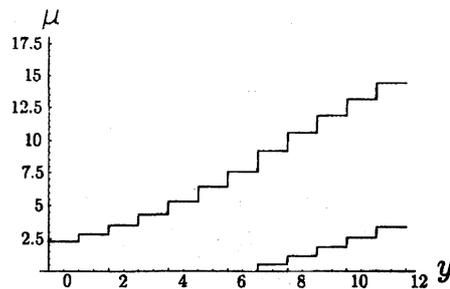


図 6.2: ベイズ法による 90% 信頼区間の限界 ($b = 3$)

6.3 尤度法

$Y = y$ を与えたときの μ の対数尤度関数 $L(\mu|y)$ を μ について微分すれば

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -n + \frac{y}{\mu + b}$$

となるから, $\mu > 0$ の下での最尤推定量は

$$\begin{aligned} \mu^* &:= \begin{cases} (y/n) - b & ((y/n) - b > 0), \\ 0 & ((y/n) - b \leq 0) \end{cases} \\ &= \max \{0, (y/n) - b\} \end{aligned}$$

となる. このとき, 尤度比検定統計量は

$$R(Y) := \frac{L(\mu|Y)}{L(\mu^*|Y)}$$

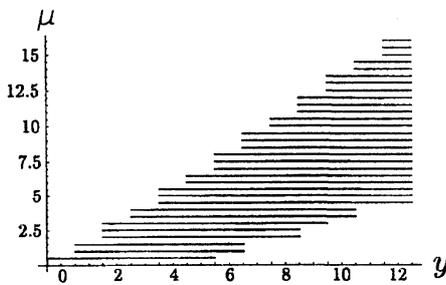
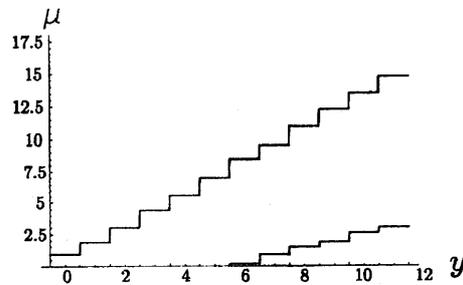
となる. このとき, 例えば, $\mu = 1.5$ について

$$\sum_{y=1}^7 p(y, 1.5) = 0.9023$$

となり, 仮説 $H: \mu = 1.5$ の検定の受容域は区間 $[1, 7]$ となる (表 6.1 参照). ただし, 表 6.1 における rank は検定統計量の値の順位とし, 信頼係数 (confidence coefficient 略して c.c.) の欄 における * 印は c.c. 90%以上となるような信頼区間である. 同様に μ の値 0.0001(0.0001)25 について計算して, 受容域を求め (図 6.3 参照, Feldman and Cousins [FC98]), そこから信頼区間をつくる (第 1 節および図 6.4 参照).

表 6.1: 尤度法による受容域の導出表

| y | $L(\mu y)$ | $p(\mu^* y)$ | $R(y)$ | rank | c.c. |
|-----|------------|--------------|--------|------|------|
| 0 | 0.0111 | 0.0498 | 0.2231 | 9 | |
| 1 | 0.0499 | 0.1494 | 0.3347 | 7 | * |
| 2 | 0.1125 | 0.2240 | 0.5020 | 6 | * |
| 3 | 0.1687 | 0.2240 | 0.7531 | 4 | * |
| 4 | 0.1898 | 0.1954 | 0.9715 | 2 | * |
| 5 | 0.1708 | 0.1755 | 0.9735 | 1 | * |
| 6 | 0.1281 | 0.1606 | 0.7976 | 3 | * |
| 7 | 0.0824 | 0.1490 | 0.5528 | 5 | * |
| 8 | 0.0463 | 0.1396 | 0.3319 | 8 | |
| 9 | 0.0232 | 0.1251 | 0.1758 | 10 | |
| 10 | 0.0104 | 0.1194 | 0.0833 | 11 | |

図 6.3: 尤度法による受容域 ($b = 3$)図 6.4: 尤度法による 90% 信頼限界 ($b = 3$)

6.4 ベイズ・頻度主義法

正規分布の場合と同様に、母数 μ が事前分布として一般一様分布

$$\pi(\mu) = \begin{cases} 1 & (\mu > 0), \\ 0 & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

とすると、検定統計量として

$$\begin{aligned} T(Y) &:= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu) d\mu}{\prod_{i=1}^n f(X_i, \mu_0)} = \frac{\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-(\mu+b)} (\mu+b)^{X_i}}{X_i!} d\mu}{\prod_{i=1}^n \frac{e^{-(\mu_0+b)} (\mu_0+b)^{X_i}}{X_i!}} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} e^{-n(\mu+b)} (\mu+b)^Y d\mu}{e^{-n(\mu_0+b)} (\mu_0+b)^Y} \end{aligned}$$

をとって、尤度法における表 6.1 と同様の表を作ることにより受容域を求めることができる (図 6.5 参照). そして、その受容域から信頼区間を得る (第 1 節および図 6.6 参照).

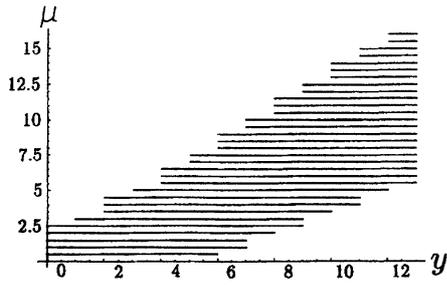


図 6.5: ベイズ・頻度主義法による受容域 ($b = 3$)

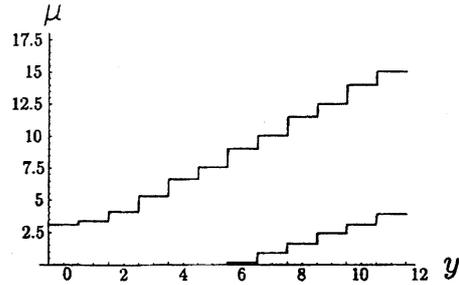


図 6.6: ベイズ・頻度主義法による 90% 信頼限界 ($b = 3$)

6.5 信頼区間とその被覆確率の数値比較

正規分布の場合と同様にそれぞれの信頼区間を数値的に比較すれば、既知母数 b より小さい y において尤度法が最も区間幅が短いものとなっているという点、また提案したベイズ・頻度主義法による信頼区間は大きい y において尤度法よりも短い区間を得られたということで、正規分布の場合と同様の結果であるということが言える (表 6.2 参照). しかし、離散型分布の場合、確率変数が整数値のみを取るため、これらの信頼区間は信頼係数に丁度一致するという保証がない保守的な信頼区間であると言える (表 6.3 参照).

表 6.2: 90% 信頼区間 ($n = 1$)

| y | 通常の方法 | ベイズ法 | 尤度法 | ベイズ・頻度主義法 |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | [0, 0] | [0, 2.303] | [0, 0.954] | [0, 3.113] |
| 1 | [0, 1.744] | [0, 2.839] | [0, 1.878] | [0, 3.408] |
| 2 | [0, 3.296] | [0, 3.523] | [0, 3.036] | [0, 4.123] |
| 3 | [0, 4.754] | [0, 4.362] | [0, 4.425] | [0, 5.328] |
| 4 | [0, 6.153] | [0, 5.345] | [0, 5.598] | [0, 6.641] |
| 5 | [0, 7.513] | [0, 6.437] | [0, 6.988] | [0, 7.603] |
| 6 | [0, 8.842] | [0, 7.599] | [0.152, 8.470] | [0.152, 9.032] |
| 7 | [0.285, 10.148] | [0.550, 9.179] | [0.895, 9.531] | [0.895, 10.052] |
| 8 | [0.981, 11.435] | [1.201, 10.597] | [1.506, 10.992] | [1.657, 11.518] |
| 9 | [1.695, 12.705] | [1.902, 11.918] | [1.878, 12.298] | [2.433, 12.548] |
| 10 | [2.425, 13.962] | [2.632, 13.193] | [2.633, 13.501] | [3.113, 14.019] |
| 11 | [3.169, 15.208] | [3.379, 14.446] | [3.036, 14.810] | [3.908, 15.047] |
| 12 | [3.924, 16.443] | [4.138, 15.686] | [4.008, 16.002] | [4.512, 16.519] |

表 6.3 : 制限されたポアソン分布の信頼区間の被覆確率
($\alpha = 0.1, n = 1, b = 3$ のときの被覆確率)

| $\lambda(:= \mu + b)$ | 通常の方法 | ベイズ法 | 尤度法 | ベイズ・頻度主義法 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-----------|
| 3.1 | 91.41 | 96.20 | 90.43 | 90.43 |
| 3.5 | 94.38 | 93.30 | 93.52 | 93.52 |
| 4.0 | 95.90 | 94.88 | 92.98 | 94.95 |
| 4.5 | 95.09 | 96.23 | 90.21 | 91.00 |
| 5.0 | 92.99 | 97.05 | 92.76 | 93.55 |
| 5.5 | 94.92 | 94.10 | 91.54 | 94.30 |
| 6.0 | 94.22 | 94.12 | 94.03 | 92.02 |
| 6.5 | 92.14 | 95.49 | 92.34 | 93.47 |
| 7.0 | 94.54 | 91.70 | 91.51 | 91.70 |

7 おわりに

本論では, 正規分布の平均が正または非負値をとるような制約的な場合に, ベイズ・頻度主義法による信頼区間の構成法を提案した. また, 離散分布の典型であるポアソン分布の制約平均の区間推定についても考察した. そして, 従来, 物理学者らにより提案されていた信頼区間と本論において提案した信頼区間を数値的に比較検討した. その結果, 尤度法による信頼区間は区間幅が短いという点で比較的安定しているが, ベイズ・頻度主義法による信頼区間もそれに劣らず良いことが分かった. なお, 1 母数離散指数型分布族において最適なランダム検定からランダム信頼区間を構成する方法が, [ATT97] において提案されているが, それを本論のような制約付母数の区間推定に適用することも可能であろう.

参考文献

- [AST03] Akahira, M., Shimizu, A. and Takeuchi, K. (2003). The construction of combined Bayesian-frequentist confidence intervals for a positive parameter. Submitted for publication.
- [ATT97] Akahira, M., Takahashi, K. and Takeuchi, K. (1997). Randomized confidence intervals of a parameter for a family of discrete exponential type distributions. *Commun. Statist. -Simula.* **26**(3), 1103-1128.
- [FC98] Feldman G. J. and Cousins R. D. (1998). Unified approach to the classical statistical analysis of small signals. *Phys. Rev.*, **D57**, 3873-3889.
- [JKK93] Johnson, N. L., Kotz, S. and Kemp, A. W. (1993). *Univariate Discrete Distributions* (2nd ed.). Wiley & Sons, New York.

- [M02] Mandelkern M. (2002). Setting confidence intervals for bounded parameters. *Statist. Sci.*, **17**, 149–172.
- [MS00a] Mandelkern M. and Schultz J. (2000). The statistical analysis of Gaussian and Poisson signals near physical boundaries, *J. Math. Phys.*, **41**, 5701–5709.
- [MS00b] Mandelkern M. and Schultz J. (2000). Coverage of confidence intervals based on conditional probability. *J. High Energy Phys.*, **11**, 036.
- [RW99] Roe B. P. and Woodroffe M. B. (1999). Improved probability method for estimating signal in the presence of background. *Phys. Rev.*, **D60**, 053009.
- [RW01] Roe B. P. and Woodroffe M. B. (2001). Setting confidence belts. *Phys. Rev.*, **D63**, 013009.
- [SAT03] 清水淳史, 赤平昌文, 竹内啓 (2003). Combined Bayesian-Frequentist approach to confidence intervals for a positive parameter. 2003年統計関連学会連合大会講演報告集, 431–432.
- [T75] 竹内啓 (1975). 確率分布と統計解析. 日本規格協会.