



TITLE:

位置尺度母数をもつ切断分布族における位置母数の固定幅の逐次区間推定 (区間推定とその関連する問題)

AUTHOR(S):

小池, 健一; 赤平, 昌文

CITATION:

小池, 健一 ...[et al]. 位置尺度母数をもつ切断分布族における位置母数の固定幅の逐次区間推定 (区間推定とその関連する問題). 数理解析研究所講究録 2004, 1380: 191-199

ISSUE DATE:

2004-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25670>

RIGHT:

位置尺度母数をもつ切断分布族における 位置母数の固定幅の逐次区間推定

筑波大・数学系 小池 健一 (Ken-ichi Koike)
筑波大・数学系 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1. はじめに

一般に、位置尺度母数をもつ分布の平均に対して、非逐次で固定幅の区間推定をしようとしても、不可能であることが Lehmann [L51] により示されている。

平均と分散が未知の分布族において、Chow and Robbins [CR65] は、平均に対する固定幅の逐次信頼区間を構成している。この信頼区間は、区間幅 d を 0 に近づけたとき漸近一致性を持ち、しかも、分散が既知のときの最小の標本数（標本の大きさ）と逐次推定に必要なとされる標本数との比が 1 に収束するなどよい性質をもつことが分かる。この推定方式はもともとの分布型を仮定しなくてもよい長所があるため、その 2 次の漸近展開を求めるなど多くの研究がある（例えば Woodroffe [W77] など）。

非正則な分布に対する逐次区間推定としては、区間 $(0, \theta)$ 上の一様分布に関して、Graybill and Connell [GC64], Cooke [Co71], Akahira [A93], Bose [B01], Mukhopadhyay and Ciconetti [MC02] など多くの研究がある。この場合には、標本の最大値が完備十分統計量になり、未知母数も一変数であるので、比較的取り扱いやすい。また、区間 $(\theta - (1/2), \theta + (1/2))$ 上の一様分布に関して、Wald [W50] は、補助統計量を用いたある推定方式が、非逐次推定方式よりも優れた逐次推定方式となることを示し、これは、逐次解析の分野では極めて重要とされている。

一方、位置尺度母数をもつ一様分布、すなわち区間 $(\theta - (\xi/2), \theta + (\xi/2))$ 上の一様分布に関しては、ほとんど研究がなされていなかったが、最近、Akahira and Koike [AK04] は、位置尺度母数をもつ一様分布族において、平均に対する固定幅の信頼区間を構成した。ここでは、切断分布の位置尺度母数分布族を考え、その位置母数に対する固定幅の信頼区間を、[AK04] における方法を参考にして構成することを考える。その結果、台の端点で密度関数が 0 とならない場合には、新しい推定方式が [CR65] の方式より標本数の意味で優れているが、0 となる場合には、新しい推定方式は高々同等であることが分かる。このことは、密度に関する情報を取り入れて推定を行えば、標本数を十分に節約できることを示している。

2. 切断分布における極値の分布の漸近展開

本節では, Akahira and Takeuchi [AT95] と同様にして, 切断分布における極値の分布の漸近展開を求める.

まず, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ を, 互いに独立にいずれも Lebesgue 測度に関する確率密度関数 (p.d.f.) $g(z - \theta)$ に従う確率変数列とする. ただし, $\theta \in \mathbb{R}$, $g(z)$ は C^2 級で

$$g(z) \begin{cases} > 0 & (\alpha < z < \beta), \\ = 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で, $\lim_{z \rightarrow \alpha+0} g(z) = c (> 0)$, $\lim_{z \rightarrow \beta-0} g(z) = c' (> 0)$, $\lim_{z \rightarrow \alpha+0} g'(z) = h$, $\lim_{z \rightarrow \beta-0} g'(z) = h' (> 0)$ とする. $Z_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} Z_i$, $Z_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} Z_i$ とおいて, $U := n(Z_{(1)} - \alpha - \theta)$, $V := n(Z_{(n)} - \beta - \theta)$ とすると, 次の補題を得る (Akahira [A91], [AT95]).

補題 1. (U, V) の同時 (joint(j.)) p.d.f. $g_{U,V}^{(n)}(u, v)$ は, $n \rightarrow \infty$ のとき次のように展開される.

$$g_{U,V}^{(n)}(u, v) = \begin{cases} \exp\{-(uc - vc')\} \left[cc' + \frac{1}{n} \left\{ -cc' + cc' \left(2(uc - vc') - \left(\frac{hu^2}{2} - \frac{h'v^2}{2} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2}(uc - vc')^2 \right) + huc' + h'vc \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) & (v < 0 < u), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \quad (2.1)$$

証明の概略. (U, V) の j.p.d.f. $g_{U,V}^{(n)}(u, v)$ は

$$g_{U,V}^{(n)}(u, v) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \left\{ G\left(\beta + \frac{v}{n}\right) - G\left(\alpha + \frac{u}{n}\right) \right\}^{n-2} g\left(\alpha + \frac{u}{n}\right) g\left(\beta + \frac{v}{n}\right) & (v < 0 < u), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2.2)$$

となる. ただし, $G(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$ とする. ここで $g(x)$ は C^2 級なので, α の周りで Taylor 展開し (2.2) に代入すると, (2.1) を得る. \square

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を, 互いに独立にいずれも位置尺度母数をもつ p.d.f. $f((x - \theta)/\xi)/\xi$ に従う確率変数列とする. ただし, $\theta \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$, $f(x)$ は C^2 級で f の台が开区間 $(-a, a)$ とする *1, すなわち

$$f(x) \begin{cases} > 0 & (-a < x < a), \\ = 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

*1 f の台が开区間 $(-a, a)$ でないとき, 範囲の中央 (midrange) は θ に確率収束しない.

とする. いま, $Y_i = (X_i - \theta)/\xi$ ($i \geq 1$) とおけば, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ は, 互いに独立にいずれも p.d.f. $f(y)$ をもつ分布に従う. $Y_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} Y_i$, $Y_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$ とし, $S := n(Y_{(1)} + Y_{(n)})/2$, $T := n(Y_{(1)} - Y_{(n)} + 2a)$ とおくと, (S, T) の漸近 (asymptotic (as.)) p.d.f. は, 補題 1 より

$$g_{S,T}^{(n)}(s, t) = \begin{cases} 2cc' \exp\{s(-c+c') - t(c+c')\} + o(1) & (t > |s|), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる. したがって, S, T の漸近周辺 (as. marginal (m.)) p.d.f. は, それぞれ

$$g_S(s) = \frac{2cc'}{c+c'} \times \begin{cases} \exp(-2cs) & (s \geq 0), \\ \exp(2c's) & (s < 0), \end{cases} \quad (2.3)$$

$$g_T(t) = \begin{cases} \frac{2cc'}{-c+c'} \{\exp(-2ct) - \exp(-2c't)\} & (t > 0, c \neq c'), \\ 4c^2 t \exp(-2ct) & (t > 0, c = c'), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる.

3. 逐次信頼区間の構成とその性質

Akahira and Koike [AK04] は, 位置尺度母数をもつ一様分布, すなわち, 第 2 節の設定のもとで,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-1/2 < x < 1/2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

としたとき, θ の逐次区間推定方式として, 停止則

$$\tau_1 = \tau \left(-\frac{2d}{\log \alpha} \right) := \inf \left\{ n \geq n_0 \mid \frac{R_n}{n-1} \leq -\frac{2d}{\log \alpha} \right\}$$

を考えた. ただし, $0 < \alpha < 1$ とし, $n_0 (\geq 2)$ は初期標本数とする. ここで, $M_n := (X_{(1)} + X_{(n)})/2$, $R_n := X_{(n)} - X_{(1)}$ ($n \geq 1$) とすると, 次のことが成り立つ.

定理 1 ([AK04]). 上記の停止則 τ_1 に対して, 逐次推定方式 $(\tau_1, [M_{\tau_1} - d, M_{\tau_1} + d])$ は次を満たす.

- (i) $\lim_{d \rightarrow 0+} P\{|M_{\tau_1} - \theta| \leq d\} = 1 - \alpha$ (漸近一致性).
- (ii) $\tau_1/n^* \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$ ($d \rightarrow 0+$).
- (iii) $E(\tau_1)/n^* \rightarrow 1$ ($d \rightarrow 0+$).

ただし, $n^* = (\log \alpha)/(\log(1 - (2d/\xi)))$ は, ξ が既知のときの最小標本数である.

証明省略.

本論では, この結果を第2節の切断分布の p.d.f. に拡張する. $0 < \alpha < 1$ なる α に対して,

$$\frac{c+c'}{cc'}\alpha = \frac{e^{-2d}}{c} + \frac{e^{-2c'l}}{c'}$$

の $l > 0$ での解を l_0 とする*2.

ξ が既知のとき, (2.3) より

$$\begin{aligned} P\{|M_n - \theta| \leq d\} &= P\{n|M_n - \theta|/\xi \leq dn/\xi\} \\ &\approx \int_{-dn/\xi}^{dn/\xi} g_S(s) ds \\ &= 1 - \frac{cc'}{c+c'} \left(\frac{e^{-2cnd/\xi}}{c} + \frac{e^{-2c'nd/\xi}}{c'} \right) \end{aligned}$$

となる. ここで, “ \approx ” は $n|M_n - \theta|/\xi$ の分布をその漸近分布で近似したものである. これが $(1 - \alpha)$ 以上になるには, n が

$$\alpha = \frac{cc'}{c+c'} \left(\frac{e^{-2cnd/\xi}}{c} + \frac{e^{-2c'nd/\xi}}{c'} \right)$$

を満たす $n = n^{**}$ 以上であればよい. これを l_0 の定義と比較すると, $n^{**} = l_0\xi/d$ となることが分かる. 次に, 停止則を

$$\tau_2 = \tau \left(\frac{2ad}{l_0} \right) := \inf \left\{ n \geq n_0 \mid \frac{R_n}{n-1} \leq \frac{2ad}{l_0} \right\} \quad (3.1)$$

とおく. ただし, $n_0 (\geq 2)$ は初期標本数とする. このとき, 次の定理を得る.

定理 2. 逐次推定方式 $(\tau_2, [M_{\tau_2} - d, M_{\tau_2} + d])$ は次を満たす.

- (i) $\lim_{d \rightarrow 0+} P\{|M_{\tau_2} - \theta| \leq d\} = 1 - \alpha$ (漸近一致性).
- (ii) $\tau_2/n^{**} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$ ($d \rightarrow 0+$).
- (iii) $E(\tau_2)/n^{**} \rightarrow 1$ ($d \rightarrow 0+$).

証明. まず, Chow and Robbins [CR65] の Lemma 1 より, (3.1) の停止則 τ_2 は

$$\lim_{d \rightarrow 0+} \frac{d\tau_2}{\xi l_0} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (3.2)$$

を満たす. また, $S = n(M_n - \theta)/\xi$ の as. p.d.f. は (2.3) で与えられるので, Anscombe [An52] の Theorem 1 より, $d \rightarrow 0+$ としたとき $\tau_2(M_{\tau_2} - \theta)/\xi$ も同じ分布に従う確率変数

*2 このような l_0 が唯一存在することは簡単に示される.

に法則収束する。よって、 $d \rightarrow 0+$ のとき、 $d\tau_2/\xi \xrightarrow{\text{a.s.}} l_0$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0+} P\{|M_{\tau_2} - \theta| \leq d\} &= \lim_{d \rightarrow 0+} P\{\tau_2 | M_{\tau_2} - \theta | / \xi \leq d\tau_2 / \xi\} \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} g_S(s) ds = 1 - \alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

を得る。

(ii) (3.2) と $n^{**} = l_0 \xi / d$ であることから

$$\frac{\tau_2}{n^{**}} = \frac{\tau_2 d}{l_0 \xi} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1 \quad \text{as } d \rightarrow 0+.$$

(iii) [CR65] の Lemma 2 より示される。よって題意が示された。 \square

注意. 特に、 $c = c'$ のとき、 $l_0 = -(\log \alpha) / (2c)$ 、 $n^{**} = -(\xi \log \alpha) / (2cd)$ 、

$$\tau_2 = \inf \left\{ n \geq n_0 \mid \frac{R_n}{n-1} \leq -\frac{4acd}{\log \alpha} \right\}$$

となる。

Chow and Robbins [CR65] は、互いに独立にいずれも平均 μ 、分散 σ^2 をもつ分布に従う確率変数列に対して、平均 μ に対する固定幅の信頼区間を次のように構成した。まず、 $\bar{X}_n := \sum_{i=1}^n X_i / n$ 、 $s_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 / (n-1)$ とし、停止則 τ_3 を

$$\tau_3 := \inf \{ n \geq n_0 \mid n \geq u_{\alpha/2}^2 d^{-2} s_n^2 \}$$

とおく。ただし、 $u_{\alpha/2}$ は標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点、 $n_0 (\geq 2)$ は初期標本数とする。このとき、次が成り立つ。

定理 3 ([CR65]). 上記の停止則 τ_3 に対して、逐次推定方式 $(\tau_3, [\bar{X}_{\tau_3} - d, \bar{X}_{\tau_3} + d])$ は次を満たす。

(i) $\lim_{d \rightarrow 0+} P\{|\bar{X}_{\tau_3} - \theta| \leq d\} = 1 - \alpha$ (漸近一致性)。

(ii) $\tau_3 / n^{***} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$ ($d \rightarrow 0+$)。

(iii) $E(\tau_3) / n^{***} \rightarrow 1$ ($d \rightarrow 0+$)。

ただし、 $n^{***} = u_{\alpha/2}^2 \sigma^2 / d^2$ は、 σ^2 が既知のとき漸近的な手法により求めた最小標本数である。

証明省略。

定理 1, 2, 3 より、 $d \rightarrow 0+$ のとき

$$\tau_1 \approx \frac{\log \alpha}{\log(1 - (2d/\xi))} \approx \frac{-\xi \log \alpha}{2d}, \quad \tau_2 \approx l_0 \xi / d, \quad \tau_3 \approx u_{\alpha/2}^2 \sigma^2 / d^2$$

となるから, $\tau_1/\tau_3, \tau_2/\tau_3 \rightarrow 0$ ($d \rightarrow 0+$) が分かる. 従って, 停止則 τ_1, τ_2 は, τ_3 より期待標本数の意味で優れているといえる.

4. 台の端点で密度関数が0となる場合

第2, 3節では, 台の端点で p.d.f. が0にならない場合を考え, その際に標本平均を用いた Chow-Robbins の方式よりも τ_1, τ_2 の方式が優れていることを示したが, 本節では, 台の端点で p.d.f. が0となる場合を考える. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ を, 互いに独立にいずれも Lebesgue 測度に関する p.d.f. $f(z - \theta)$ に従う確率変数列とする. ただし, $\theta \in \mathbb{R}$, $f(x)$ が C^{p+1} 級で, 台の端点 $x = \alpha, \beta$ での $(p-1)$ 次までの片側微分係数が0, すなわち

$$f(x) = \frac{c}{p!}(x - \alpha)^p + \frac{f^{(p+1)}(\eta_1)}{p!}(x - \alpha)^{p+1} \quad (\alpha < \eta_1 < x),$$

$$f(x) = \frac{c'}{p!}(x - \beta)^p + \frac{f^{(p+1)}(\eta_2)}{p!}(x - \beta)^{p+1} \quad (x < \eta_2 < \beta)$$

と Taylor 展開できるとする. ただし, $p \geq 1$ とし, $c := f^{(p)}(\alpha)$, $c' := f^{(p)}(\beta)$ は0でない定数とする. このとき, $U := n^{1/(p+1)}(Z_{(1)} - \alpha - \theta)$, $V := n^{1/(p+1)}(Z_{(n)} - \beta - \theta)$ とすると, 補題1と同様に, 次のことが成り立つ.

補題2. (U, V) の j.p.d.f. $g_{U,V}^{(n)}(u, v)$ は, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$g_{U,V}^{(n)}(u, v) \rightarrow \begin{cases} \frac{cc'}{(p!)^2} u^p v^p \exp \left\{ \frac{c'v^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{cu^{p+1}}{(p+1)!} \right\} & (v < 0 < u), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である.

証明は補題1の場合と同様である.

従って, この場合にも U と V は漸近的に独立に, それぞれ母数 $(p+1, \{(p+1)!/c\}^{1/(p+1)})$ をもつ Weibull 分布, 母数 $(p+1, \{(p+1)!/c'\}^{1/(p+1)})$ をもつ Weibull 分布に従う確率変数を (-1) 倍した分布に従う.

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を, 互いに独立にいずれも位置尺度母数をもつ p.d.f. $f((x - \theta)/\xi)/\xi$ に従う確率変数列とする. ただし, $\theta \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$, f の台が開区間 $(-a, a)$ とする. いま, $Y_i = (X_i - \theta)/\xi$ ($i \geq 1$) とおけば, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ は, 互いに独立にいずれも p.d.f. $f(y)$ をもつ分布に従う. いま, $Y_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} Y_i$, $Y_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$ とし, $S := n^{1/(p+1)}(Y_{(1)} + Y_{(n)})/2$, $T := n^{1/(p+1)}(Y_{(1)} - Y_{(n)} + 2a)$ とおくと, (S, T) の as. j.p.d.f., S, T の as. m.p.d.f. が補題2より得られる. (3.3) と同様に, S の as. m.p.d.f. $g_S(s)$ について,

$$\int_{-l_0}^{l_0} g_S(s) ds = 1 - \alpha$$

となる l_0 をとる.

ξ が既知のとき, (2.3) より

$$\begin{aligned} P\{|M_n - \theta| \leq d\} &= P\{n^{1/(p+1)}|M_n - \theta|/\xi \leq dn^{1/(p+1)}/\xi\} \\ &\approx \int_{-dn^{1/(p+1)}/\xi}^{dn^{1/(p+1)}/\xi} g_S(s) ds \end{aligned}$$

となる. ここで, “ \approx ” は $n^{1/(p+1)}|M_n - \theta|/\xi$ の分布をその漸近分布で近似したものである. これが $(1 - \alpha)$ 以上になるには, n が

$$l_0 = dn^{1/(p+1)}/\xi$$

を満たす $n = n^{****} := (l_0\xi/d)^{p+1}$ 以上であればよい. 次に, 停止則を

$$\tau_4 := \inf \left\{ n \geq n_0 \mid \frac{R_n}{n^{1/(p+1)}} \leq \frac{2ad}{l_0} \right\}$$

とおく. ただし, $n_0 (\geq 2)$ は初期標本数とする. このとき次の定理を得る.

定理 4. 逐次推定方式 $(\tau_4, [M_{\tau_4} - d, M_{\tau_4} + d])$ は次を満たす.

- (i) $\lim_{d \rightarrow 0+} P\{|M_{\tau_4} - \theta| \leq d\} = 1 - \alpha$ (漸近一貫性).
- (ii) $\tau_4/n^{****} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$ ($d \rightarrow 0+$).
- (iii) $E(\tau_4/n^{****}) \rightarrow 1$ ($d \rightarrow 0+$).

証明. (i) は定理 2 の場合と同様である. また, (ii) は, 定理 2 の場合と同様に

$$(\tau_4/n^{****})^{1/(p+1)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1 \quad (d \rightarrow 0+)$$

が示せるので, この式を $(p+1)$ 乗すればよい.

(iii) (ii) より, Fatou の補題を用いれば,

$$\liminf_{d \rightarrow 0+} \frac{E(\tau_4)}{n^{****}} \geq E \left(\liminf_{d \rightarrow 0+} \frac{\tau_4}{n^{****}} \right) = 1 \quad (4.1)$$

を得る. 一方, τ_4 の定義と $0 \leq R_{\tau_4} \leq 2a\xi$ であることから,

$$\tau_4 < \left(\frac{l_0\xi}{d} \right)^{p+1} + 1 \quad (4.2)$$

となり, n^{****} の定義と (4.2) より

$$\frac{E(\tau_4)}{n^{****}} \leq \left\{ \left(\frac{l_0\xi}{d} \right)^{p+1} + 1 \right\} \left(\frac{l_0\xi}{d} \right)^{-(p+1)} = 1 + \left(\frac{d}{l_0\xi} \right)^{p+1}$$

となり,

$$\limsup_{d \rightarrow 0+} \frac{E(\tau_4)}{n^{****}} \leq 1 \quad (4.3)$$

を得る. (4.1), (4.3) とを合わせて (iii) を得る. \square

定理 4 より, 逐次推定方式 $(\tau_4, [M_{\tau_4} - d, M_{\tau_4} + d])$ は漸近一緻性などよい性質を持つが, 定理 3 より, $d \rightarrow 0+$ のとき

$$\tau_4 \approx (l_0 \xi / d)^{p+1}, \quad \tau_3 \approx u_{\alpha/2}^2 \sigma^2 / d^2$$

となる. $p \geq 1$ なので, $\tau_3 / \tau_4 = O(1)$ ($p = 1$ のとき) もしくは $\tau_3 / \tau_4 = o(1)$ ($p > 1$ のとき) ($d \rightarrow 0+$) が分かる. 従って, τ_4 は, τ_3 より期待標本数の意味で同等もしくは劣っている.

以上では, p.d.f. の台の両端点での片側微分係数が同じ $(p-1)$ 次まで 0 で, 同じく p 次で 0 でない場合を考えたが, 次数が端点で異なる場合, もしくは片側の端点のみ 0 となる場合には, $n^\gamma(X_{(1)} - a - \theta)$ と $n^\delta(X_{(n)} - b - \theta)$ とで確率分布に収束するための係数 γ, δ が異なるため, 範囲の中央 (midrange) M_n を用いて推測するのは適当でない.

参考文献

- [A91] Akahira, M. (1991). The 3/2th and 2nd order asymptotic efficiency of maximum probability estimators in non-regular cases. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **43**, 181–195.
- [A93] Akahira, M. (1993). Two-stage sequential estimation procedures for the uniform distribution. (In Japanese). *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto University*, **842**, 151–156.
- [AK04] Akahira, M. and Koike, K. (2004). Sequential interval estimation of a location parameter with the fixed width in the uniform distribution with an unknown parameter. *To appear in Sequential Analysis*.
- [AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation*. Lecture Notes in Statistics 107, Springer, New York.
- [An52] Anscombe, F. J. (1952). Large sample theory of sequential estimation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48**, 600–607.

- [B01] Bose, A. (2001). A boundary crossing problem with application to sequential estimation. *Sequential Analysis*, **20**, 65–76.
- [CR65] Chow, Y. S. and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. *Ann. Statist. Math.*, **36**, 457–462.
- [Co71] Cooke, P. J. (1971). Sequential estimation in the uniform density. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **66**, 614–617.
- [GC64] Graybill, F. A. and Connell, T. L. (1964). Sample size required to estimate the parameter in the uniform density within d units of the true value. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **59**, 550–556.
- [L51] Lehmann, E. L. (1951). *Notes on the Theory of Estimation*. Berkeley: Univ. of Calif. Press.
- [MC02] Mukhopadhyay, N. and Cicconetti, G. (2002). Second-order properties of a two-stage point estimation procedure for the range in a power family distribution. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **52**, 219–234.
- [W50] Wald, A. (1950). *Statistical Decision Functions*. Wiley, New York.
- [W77] Woodroffe, M. (1977). Second order approximations for sequential point and interval estimation. *Ann. Statist.*, **5**, 984–995.