Sur Quelques Propriétés des Séries Entières en dehors de Leurs Cercles de Convergence

Par

Toshizô Matsumoto.

(Reçu le 7 novembre 1925)

La présente note est l'application des théorèmes de M. Montel dans la théorie de la famille normale des fonctions. En désignant par $S_n(z)$ la somme de $n+1$ premiers termes de la série entière, la racine $n$ième de $S_n(z)$ est une fonction limitée en valeur absolue dans tout le plan. Je considère la famille de $\sqrt[n]{S_n(z)}$ pour $n=1, 2, \ldots\ldots$, en introduisant une autre fonction déduite de $S_n(z)$. Si dans un domaine les sommes partielles ne s'annulent pas, la famille est normale. De là on démontre facilement le théorème de M. Jentsch. La recherche dans ou sur le cercle de convergence n'est pas essentielle. Quand z est en dehors du cercle de convergence j'ai obtenu trois propositions spéciales qui déterminent qu'un point z sous quelques conditions est ou non un point limite de zéros des sommes partielles. À la fin on considère une extension du théorème sur la détermination du rayon de convergence de la série.

1. Étant donnée une série entière

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots,$$

convergente dans le cercle de convergence de rayon unité et le centre à l'origine, nous écrivons

$$S_n(z)\equiv a_0+a_1z+\ldots\ldots+a_nz^n,$$
$$\sigma_n(\tau)\equiv a_0\tau^n+a_1\tau^{n-1}+\ldots\ldots+a_n\ ,$$

où
$$\tau=\frac{1}{z},\quad \sigma_n(\tau)=\frac{S_n(z)}{z^n},$$

et considérons la famille des fonctions $\sqrt[n]{S_n(z)}$ ou $\sqrt[n]{\sigma_n(\tau)}$.

Dans le cercle de convergence, $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéro qui est comme M. Montel l'a remarqué autrefois, le point limite de zéro de $S_n(z)$. Par suite dans une aire qui n'a pas de zéro de $f(z)$, les fonctions $\sqrt[n]{S_n(z)}$ sont d'une famille normale; la même pour $\sigma_n(\tau)$. On a dans cette aire

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{S_n(z)}\right|=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\sigma_n(\tau)}\right|=\frac{1}{|z|}>1.$$

Sur le cercle de convergence selon le théorème de M. Jentsch la famille n'est pas normale.

2. *Soit z un point quelconque sur ou en dehors du cercle de convergence, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{S_n(z)}\right|=|z|, \quad ou \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{\sigma_n(\tau)}\right|=1.$$

Car on a l'identité

$$S_n(z)=\left\{S_0(z_0)+S_1(z_0)\frac{z}{z_0}+\ldots\ldots+S_{n-1}(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1}\right\}$$
$$\times\left(1-\frac{z}{z_0}\right)+S_n(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

où z_0 est un point quelconque sur ou en dehors du cercle de convergence. Si pour tout $n>N$, on ait

$$\left|\sqrt[n]{S_n(z_0)}\right|<\varepsilon\,|z_0|$$

ou

$$|S_n(z_0)|<\varepsilon^n\,|z_0|^n$$

où $0<\varepsilon<1$, à l'aide de l'identité on a

$$|S_n(z)|<\left|S_0(z_0)+\ldots\ldots+S_N(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^N\right|\left|1-\frac{z}{z_0}\right|$$
$$+\left(\varepsilon^{N+1}|z|^{N+1}+\ldots\ldots+\varepsilon^{n-1}|z|^{n-1}\right)\left|1-\frac{z}{z_0}\right|+\varepsilon^n|z|^n.$$

Soit z un point tel que $\varepsilon|z|<1$, $1<|z|$, on constate que la série $f(z)$ est convergente au point z, c'est-à-dire en dehors du cercle de convergence. C'est contradictoire. Q. E. D.

3. De cette propriété on peut démontrer facilement le théorème de M. Jentsch:

Tous les points du cercle de convergence sont les points limites des zéros des sommes partielles $S_n(z)$ de la série $f(z)$.

Car dans autre cas on peut écrire un cercle contenant dans son intérieur un arc du cercle de convergence qui n'a pas des points limites des zéros des sommes partielles $S_n(z)$. Puisqu'il n'y a dans le cercle qu'un nombre fini de point limite des zéros de chaque somme partielle, on peut prendre un domaine (D) simplement connexe dans le cercle où on ne trouve pas les zéros des sommes partielles, (D) contenant dans son intérieur un arc du cercle de convergence.

Considérons dans (D) la famille des fonctions holomorphes $\sqrt[n]{S_n(z)}$ avec une détermination pour le radical. Puisque $|\sqrt[n]{S_n(z)}|$ est limitée dans (D), par le théorème de M. Montel, de la suite quelconque

$$\sqrt[p_1]{S_{p_1}(z)},\quad \sqrt[p_2]{S_{p_2}(z)},\ \ldots\ldots,\quad \sqrt[p_k]{S_{p_k}(z)},\ \ldots\ldots \tag{1}$$

extraité de la suite $\sqrt[n]{S_n(z)}$, on peut extraire une nouvelle suite qui converge uniformément vers une fonction holomorphe $F(z)$ dans (D).

Mais dans l'aire commune de (D) et du cercle de convergence, on a

$$|F(z)|=1.$$

Par suite $|F(z)|=1$ dans (D). Car (D) contient une aire en dehors du cercle de convergence, la limite supérieure de la suite formée des valeurs absolues des fonctions de la suite (1) est unité. C'est contradictoire. Q. E. D.

4. Nous introduisons quelques notations abrégées. Écrivons

$$\varphi_n(\tau)\equiv\sqrt[n]{\sigma_n(\tau)}$$

avec une certaine détermination pour le radical. Si l'on extrait de la famille des fonctions $\varphi_n(\tau)$, une nouvelle suite

$$\varphi_{p_1}(\tau),\ \varphi_{p_2}(\tau),\ldots\ldots,\ \varphi_{p_k}(\tau),\ldots\ldots$$

où $p_1,\ p_2,\ldots\ldots p_k,\ldots\ldots$ sont quelques entiers de la suite $1,\ 2,\ldots\ldots,\ n,\ldots\ldots$ dans le même ordre, nous la disons une nouvelle suite (p).

Si $\Phi(\tau)$ est sa limite, nous écrivons

$$\lim_{(p)}\varphi_p(\tau)=\Phi(\tau).$$

Si l'on extrait de la suite (p) encore une nouvelle suite

$$\varphi_{q_1}(\tau),\ \varphi_{q_2}(\tau)\ldots\ldots,\ \varphi_{q_h}(\tau),\ldots\ldots$$

où $q_1,\ q_2,\ldots\ldots,\ q_h,\ldots\ldots$ sont quelques entiers de la suite (p), dans le même ordre, nous la disons une suite (q) etc. Les mêmes pour les fonctions limites.

5. Dans le suivant, z est en dehors du cercle (C), le centre à l'origine, de rayon $\rho\geqq 1$, et $\tau=\dfrac{1}{z}$ est dans le cercle (Γ) concentrique, de rayon $\dfrac{1}{\rho}$.

Si toutes les sommes partielles $S_n(z)$ ne s'annulent pas en dehors du cercle (C) et si tous les coefficients a_n ne sont pas nuls et tels que le point 1 est un point isolé de l'ensemble dérivé de l'ensemble des points $|\sqrt[n]{a_n}|$, la famille des fonctions $\varphi_n(\tau)$ est normale dans (Γ) et toutes les *fonctions limites des suites extraitées de la famille ont la valeur absolue unité.*

La famille des fonctions $\varphi_n(\tau)$ est normale. Car $S_n(z)$ ne s'annulent pas en dehors du cercle (C), $\varphi_n(\tau)$ ne s'annulent pas dans (Γ). Par suite á l'aide du théorème de M. Montel la famille est normale dans (Γ).

Par hypothèse on peut extraire une suite (p) des coefficients a_p de la suite (n) des coefficients a_n telle que

$$\lim_{(p)} \left| \sqrt[p]{a_p} \right| = 1$$

et l'autre suite quelconque extraitée de la suite (n) ne vérifie pas cette condition.

Puisque la famille (n) des fonctions $\varphi_n(\tau)$ est normale dans (Γ), de la suite (p) des fonctions $\varphi_p(\tau)$ extraitées de la suite (n), on peut extraire une nouvelle suite (q), telle que

$$\lim_{(q)} \varphi_q(\tau) \equiv \Phi(\tau)$$

et

$$\left| \Phi(0) \right| = \lim_{(q)} \left| \sqrt[q]{a^q} \right| = 1.$$

Mais l'unité est la valeur maximum de $\Phi(\tau)$ dans (Γ), car la limite supérieure de $|\varphi_n(\tau)|$ est unité dans (Γ).
À l'aide du théorème de Cauchy $\Phi(\tau)$ est constante dans (Γ):

$$\Phi(\tau) = a, \quad |a| = 1.$$

Considérons la suite $(q+1)$ des fonctions $\varphi_{q+1}(\tau)$, la fonction $\varphi_{q+1}(\tau)$ étant la suite de $\varphi_q(\tau)$ dans la suite (n). On peut supposer que

$$\lim_{(q+1)} \varphi_{q+1}(\tau) = \Phi_1(\tau)$$

$\Phi_1(\tau)$ étant une fonction holomorphe dans (Γ), car dans autre cas on extrait de la suite $(q+1)$ une nouvelle suite que nous n'avons qu'écrire de nouveau $(q+1)$.

Par hypothèse on a

$$\lim_{(q+1)} \left| \sqrt[q+1]{a_{q+1}} \right| < 1,$$

donc on a

$$\Phi_1(0) < \delta < 1.$$

Étant donnés deux nombres petits et positifs ε, η, on peut trouver un nombre positif H tel que

$$\left| \sqrt[q_h]{a_{q_h}} \right| > 1 - \eta,$$

$$\left| \sqrt[q_h+1]{a_{q_h+1}} \right| < \delta + \varepsilon,$$

pour tout $h>H$.

En différentiant

$$\sigma_{q_h+1}(\tau)=\varphi_{q_h+1}^{\;q_h+1}(\tau),$$

on a

$$\sigma'_{q_h+1}=(q_h+1)\varphi_{q_h+1}^{\;q_h}\varphi'_{q_h+1}.$$

Pour $\tau=0$ on a

$$a_{q_h}=(q_h+1)\left\{\sqrt[q_h+1]{a_{q_h+1}}\right\}^{q_h}\varphi'_{q_h+1}(0)$$

ou

$$\frac{a_{q_h}}{(q_h+1)\,a_{q_h+1}}=\frac{\varphi'_{q_h+1}(0)}{\sqrt[q_h+1]{a_{q_h+1}}}$$

Mais la valeur absolue de la partie gauche est plus grande que

$$\frac{(1-\eta)^{q_h}}{(q_h+1)(\delta+\varepsilon)^{q_h+1}},\quad h>H$$

tendant vers ∞ avec h, car on peut choisir ε, η tels que

$$\varepsilon+\eta<1-\delta.$$

Par suite il faut que

$$\lim_{(q+1)}\sqrt[q+1]{a_{q+1}}=0,\ i.\ e.,\ \Phi_1(0)=0.$$

De lá on constate que $\Phi_1(\tau)\equiv 0$ dans (Γ), car dans autre cas à l'aide d'un théorème de M. Montel $\tau=0$ est un point limite des zéros des fonctions $\varphi_{q+1}(\tau)$ de la suite $(q+1)$. Donc les fonctions $\sigma_{q+1}(\tau)$ et par suite $S_{q+1}(z)$ auront de zéro en dehors du cercle (C). C'est contradictoire. Enfin on a

$$\lim_{(q+1)}\varphi_{q+1}(\tau)=\Phi_1(\tau),\quad \Phi_1(\tau)\equiv 0,$$

$$\lim_{(q)}\varphi_q(\tau)=\Phi(\tau),\qquad |\Phi(\tau)|=1.$$

$\varepsilon>0$ étant donné on peut trouver $H>0$ tel que pour $h>H$

$$\left|a_{q_h+1}\right|<\varepsilon^{q_h+1},$$

$$\left|\sigma_{q_h}(\tau)\right|>(1-\varepsilon)^{q_h},$$

Donc

$$|\sigma_{q_h+1}(\tau)|=|\tau\sigma_{q_h}(\tau)+a_{q_h+1}|>|\tau|(1-\varepsilon)^{q_h}-\varepsilon^{q_h+1}.$$

De là aux points $\tau\neq 0$,

$$|\Phi_1(\tau)|\geqq 1-\varepsilon.$$

C'est encore contradictoire.

1 est un seul point limite de l'ensemble des points $|\sqrt[n]{a_n}|$

Q. E. D.

6. Par exemple considérons la série

$$f(z)=1+\left(\frac{1}{1\,!}-1\right)z+\frac{1}{2\,!}z^2+\left(\frac{1}{3\,!}-1\right)z^3+\ldots\ldots$$

Les coefficients vérifient les conditions indiquées, mais

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}}=0.$$

Par conséquent aussi grand que n soit, on aura autour le point $z=\infty$, l'égalité

$$1+\frac{z}{1\,!}+\ldots\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)\,!}=z+z^3+\ldots\ldots+z^{2n-1}.$$

Remarquons que même quand $\lim\limits_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}|=1$, $S_n(z)$ peut avoir de zéro. Par exemple

$$f(z)=1-z+2z^2-z^3+\ldots\ldots+2nz^{2n}-z^{n+1}+\ldots\ldots$$

où
$$\sigma_{2n+1}(\tau)=\tau^{2\ +1}+2\tau\frac{\tau^{2n+2}-(n+1)\tau^2+n}{(1-\tau^2)^2}-\frac{1-\tau^{2n+2}}{1-\tau^2}.$$

7. *Supposons que les coefficients de $f(z)$ vérifient les conditions*

(1) $\qquad |a_n-a_{n-1}|<G,$

(2) $\qquad 0<g'<|a_{p_1}|,\ |a_{p_2}|,\ldots\ldots,\ |a_{p_k}|,\ldots\ldots<g,$

où G, g, g' sont quelques nombres positifs, et soit

$$\overline{\lim_{(p)}}\ |\varphi_p(\tau_0)|<1$$

où τ_0 est un point dans le cercle (Γ), on peut démontrer que τ_0 est un point limite des zéros des fonctions $\sigma_p(\tau)$ de la suite (p).

Car dans autre cas on peut écrire un cercle (γ), le centre á τ_0 tel que toutes les fonctions $\sigma_p(\tau)$ ne s'annulent pas dans (γ). Donc la suite (p) des fonctions $\varphi_p(\tau)$ est normale dans (γ). De la suite (p) on peut extraire une nouvelle suite (q) de $\varphi_q(\tau)$ telle que

$$\lim_{(q)} \varphi_q(\tau)=\Phi(\tau).$$

$\Phi(\tau)$ étant holomorphe dans (γ), elle vérifie par hypothèse la conditions suivante

$$|\Phi(\tau_0)|<1.$$

Par suite on peut écrire de nouveau un cercle (γ_1) concentrique a (γ) dans lequel on a

$$|\Phi(\tau)|<1.$$

Donc on a dans (γ_1)

$$\lim_{(q)} \sigma_q(\tau)\equiv 0. \tag{1}$$

Les coefficients a_q étant contenus dans la suite (p) de a_p, on a par hypothèse

$$|a_{q_h}|<g, \ |a_{q_h}-a_{q_h+1}|<G,$$

Donc

$$|a_{q_h-1}|<g+G,$$

$$|a_{q_h-2}|<g+2G,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

en général

$$|a_{q_h-m}|<g+mG$$

où m est un entier positif moindre que q_h.

On a pour toute valeur de h

$$|\sigma_{q_h}(\tau)|=|a_0\tau^{q_h}+\cdots\cdots+a_{q_h}|$$

$$<g+(g+G)|\tau|+\cdots\cdots+(g+q_hG)|\tau|^{q_h}.$$

Donc pour $|\tau|<1$, les polynomes $\sigma_q(\tau)$ de la suite (q) sont limités dans (Γ), et de là on peut extraire une suite (r) de $\sigma_r(\tau)$ telle que

$$\lim_{(r)}\sigma_r(\tau)=\Psi(\tau)$$

où $\Psi(\tau)$ est holomorphe dans (Γ).

Mais à l'aide de (1), il faut que $\Psi(\tau)$ soit identiquement nulle dans (γ_1) donc dans (Γ) $\Psi(\tau)\equiv 0$. Donc on a

$$\Psi(0)\equiv\lim_{(r)}a_r=0.$$

C'est contradictoire à l'hypothèse que $0<g'<|a_r|$. Q. E. D.

Comme corollaire, *si tous les coefficients vérifient la condition* $0<g'<|a_n|<g$ *et soit* $\lim\limits_{(p)}|\varphi_p(\tau)|<1$, τ_0 *étant un point de* (Γ), τ_0 *est un point limite de zéro des fonctions* $\sigma_p(\tau)$ *de la suite* (p).

8. Dans les théorèmes précedants, les hypothèses sur les coefficients jouent le rôle essentiel. Dans la suite je démontre un théorème sans hypothèse explicite sur les coefficients.

Si un point τ_0 *dans* (Γ) *est tel que*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}|\varphi_{2m}(\tau_0)|<1,$$

il est un point limite de zéro des polynomes $\sigma_{2m}(\tau)$.

Pour le démontrer nous introduirons les identités.

Posons

$$T_n(x)\equiv\sigma_0(\tau)+\sigma_1(\tau)x+\cdots\cdots+\sigma_n(\tau)x^n$$

on a les identités:

$$\sigma_n\left(\frac{1}{x}\right)=(1-\tau x)\frac{T_n(x)}{x^n}+\tau x\sigma_n(\tau),$$

$$\sigma_n\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}-\tau\right)\frac{T_{n-1}(x)}{x^{n-1}}+\sigma_n(\tau),$$

On remarque que la série entière $T_\infty(x)$ a le rayon de convergence unité. (N°2)

Supposons que toutes les fonctions $\sigma_{2m}(\tau)$ ne s'annulent pas dans un petit cercle (γ), le centre à τ_0, la famille des fonctions $\varphi_{2m}(\tau)$ est normale dans (γ). Par suite on peut écrire un cercle (γ_1) concentrique à (γ) tel que dans lequel

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,|\varphi_{2m}(\tau)|<1.$$

Prenons $x=\frac{1}{\tau_0}(|x|>1)$ et $\tau\neq\tau_0$ dans (γ_1), on a à l'aide des identités

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\sqrt[2m]{\frac{T_{2m}(x)}{x^{2m}}}\right|<1,$$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\sqrt[2m-1]{\frac{T_{2m-1}(x)}{x^{2m-1}}}\right|<1.$$

C'est contradictoire car comme on a remarqué, la serié $T_\infty(x)$ est convergente dans le cercle de rayon unité et il faut que par N°2

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{T_n(x)}\right|=|x|>1.$$

Le théorème est aussi vrai quand $\overline{\lim_{m\to\infty}}\,|\varphi_{2m+1}(\tau_0)|<1.$

9. *Exemple.* Soient $\alpha>0$, $\beta>1$

$$f(z)=\alpha-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)z-\alpha z^2+\left(1+\frac{1}{\beta^3}\right)z^3-\ldots\ldots$$
$$+(-1)^n\alpha z^{2n}+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{\beta^{2n+1}}\right)z^{2n+1}\pm\ldots\ldots$$

On a facilement que

$$\varphi_{2m+1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\beta}\sqrt[2m+1]{\frac{(-1)^m+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2m+2}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}$$

Si $\beta>\alpha>1$, en prenant $\tau_0=\frac{1}{\alpha}$ on a

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varphi_{2m+1}(\tau_0)\right|=\frac{1}{\beta}<1.$$

À l'aide du théorème précédent $z=a$ est un point limite de zéro de $\sigma_{2m+1}(\tau)$ ou $S_{2m+1}(z)$.

On peut le démontrer aussi par le théorème de N°7.

Je veux étendre dans la suite la somme partielle de la série donnée.

Posons

$$S_{p,\nu}(z)\equiv a_{p+1}z^{p+1}+\ldots\ldots+a_{p+\nu}z^{p+\nu},$$

on a sauf que sur le cercle de convergence

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\left|\sqrt[p+\nu]{S_{p,\nu}(z)}\right|=|z|$$

où ν est un nombre entier positif quelconque.

Car le rayon de convergence de la serie donnée est unité, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{a_n}\right|=1,$$

ou $\varepsilon>0$, si n est assez grand, on a

$$|a_n|<(1+\varepsilon)^n.$$

Mais selon que $|z|\gtrless 1$, on a

$$|S_{p,\nu}(z)|<\nu(1+\varepsilon)^{p+\nu}|z|^{p+\nu}$$

ou

$$<\nu(1+\varepsilon)^{p+\nu}|z|^{p+1}.$$

Donc pour tous les points du plan z, on a

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\left|\sqrt[p+\nu]{S_{p,\nu}(z)}\right|\leqq|z|.$$

Si l'inégalité sera vraie, il y a un nombre $\varepsilon>0$ tel que pour p assez grand

$$\left|\sqrt[p+\nu]{S_{p,\nu}(z)}\right|<(1-\varepsilon)|z|. \tag{1}$$

Considérons le cas où $|z|>1$ et posons

$$n=p+m\nu,$$

on a

$$S_n(z)=S_p(z)+S_{p,\nu}(z)+\ldots\ldots+S_{p+\overline{m-1}\,\nu,\,\nu}(z).$$

Donc si p est assez grand à l'aide de l'inégalité (1), on a

$$|S_n(z)|<|S_p(z)|+(1-\varepsilon)^{p+\nu}|z|^{p+\nu}+\ldots\ldots+(1-\varepsilon)^{p+m\nu}|z|^{p+m\nu}$$

$$=|S_p(z)|+\{(1-\varepsilon)|z|\}^{p+\nu}\frac{1-\{(1-\varepsilon)|z|\}^{m\nu}}{1-(1-\varepsilon)|z|},$$

d'où on constate facilement que pour tous les cas $(1-\varepsilon)|z|\gtreqless 1$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[\nu]{S\,(z)}\right| < |z|$$

qui est contradictoire. (N°2)

Dans le cas où $|z|<1$, considérons un point z quelconque à l'intérieur du cercle de convergence. Pour la simplicité nous prenons $\nu=2$. L'inégalité (1) devient

$$\left|\sqrt[p+2]{S_{p,\,2}(z)}\right| < (1-\varepsilon)\,|z|.$$

Puisque la série $a_0+a_1z+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$ est convergente,

$$\begin{aligned} a_nz^n &= a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots\ldots-(a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\ldots\ldots) \\ &= S_{n-1,\,2}(z)+S_{n+1,\,2}(z)+\ldots\ldots \\ &\quad -\{S_{n,\,2}(z)+S_{n+2,\,2}(z)+\ldots\ldots\}. \end{aligned}$$

On a à l'aide de l'inégalité

$$\begin{aligned} |a_nz^n| &< (1-\varepsilon)^{n+1}|z|^{n+1}+(1-\varepsilon)^{n+3}|z|^{n+3}+\ldots\ldots \\ &\quad +\{(1-\varepsilon)^{n+2}|z|^{n+2}+(1-\varepsilon)^{n+4}|z|^{n+4}+\ldots\ldots\} \\ &< \frac{2(1-\varepsilon)^{n+1}|z|^{n+1}}{1-(1-\varepsilon)|z|}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$|\sqrt[\nu]{a_n}|\,|z_0| < \frac{\sqrt[\nu]{2(1-\varepsilon)|z|}}{\sqrt[\nu]{1-(1-\varepsilon)|z|}}(1-\varepsilon)|z|.$$

Pour la limite de $n\to\infty$ on aura

$$|z| < (1-\varepsilon)\,|z|$$

C'est absurde.

De la même manière les cas $\nu\geqq 3$ sont faciles à démontrer. Notre résultat est donc général.

Si $\nu=1$, c'est le théorème de M. Hadamard. C'est vrai aussi sur le cercle de convergence.